

УДК 541.182.2/3

© 2005 г. С. П. Баканов

О ТЕРМОФОРЕЗЕ ТЕЛ В ГАЗАХ

Дается краткий обзор существующих представлений о природе термофореза тел в газах. Излагается схема расчета скорости термофореза крупных тел. Предлагается процедура анализа экспериментальных данных и отбора на этой основе доброкачественного материала.

1. Введение. Кинетическая теория газов позволяет достаточно просто рассчитать скорость термофореза малого тела, которое, как предполагается, слабо возмущает состояние окружающего тело газа. Общепринятая формула для скорости термофореза в так называемом свободномолекулярном режиме имеет вид [1, 2]

$$V_{fm} = -\frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho T_0} \frac{\text{grad}T}{1 + \pi \epsilon / 8} \quad (1.1)$$

где η – динамическая вязкость, ρ – плотность газа, ϵ – коэффициент, характеризующий аккомодацию импульса при взаимодействии газовых молекул с поверхностью конденсированной фазы, T_0 – температура в центре сферического тела, $\text{grad}T$ – малый постоянный градиент температуры вдали от тела. Некоторое разночтение в численном множителе в знаменателе формулы (1.1) далее несущественно.

Классическое представление о природе термофореза крупных тел в газах базируется на открытии Максвеллом [3] и Рейнольдсом [4] теплового скольжения газа вдоль поверхности раздела фаз. Эпштейн [5] положил его в основу решения задачи о термофорезе крупных тел в качестве граничного условия, связавшего задачу об обтекании тела газом и задачу о распределении температуры, когда вдали от тела поддерживается малый постоянный градиент температуры. Формула Эпштейна имеет вид

$$V_{th}^E = -\frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho T_0} \frac{\text{grad}T}{1 + \xi / 2}, \quad \xi = \frac{\kappa_i}{\kappa} \quad (1.2)$$

где κ , κ_i – теплопроводности газа и конденсированной фазы.

Работа Эпштейна дала толчок к исследованию природы термофореза крупных тел в газах. (Говоря о крупных телах, имеем в виду, что число Кнудсена $Kn = \lambda/R$ (λ – длина свободного пробега молекул газа, R – характерный размер тела) много меньше единицы.) Последовавшие за этим эксперименты показали, что механизм максвелловского скольжения не исчерпывает всех возможных причин явления. В частности, такой подход не позволил объяснить экспериментально наблюдавшуюся неожиданно большую скорость термофореза высокотеплопроводных тел. Поэтому теоретическое изучение проблемы было продолжено и к настоящему времени в литературе имеется уже значительное число работ на эту тему (см. обзоры [6, 7]), в которых использованы разнообразные подходы и методы расчетов. Результаты оказались не вполне тождественными. Однако общий и бесспорный вывод состоит в том, что выражение для скорости термофореза крупных тел при $Kn = 0$ с точностью до числового множителя имеет вид (1.2), что необходимо иметь в виду при анализе любых экспериментальных и теоретических данных по термофорезу крупных тел.

По мнению ряда авторов, наиболее удовлетворительные результаты дает модифицированный метод Эпштейна, основанный на решении задачи, включающей уравнения Навье–Стокса и Фурье с граничными условиями, учитывающими скольжение. Он представляется и более прозрачным физически. Важным этапом в развитии этого метода оказалась работа Вальдмана и др. [8] (см. также [9]), в которой для получения граничных условий вместо эвристического подхода был предложен метод, основанный на использовании термодинамики необратимых процессов. Граничные условия в этом случае получаются автоматически. Такой подход сразу позволил устранить все разногласия, возникавшие ранее при формулировке граничных условий, и обобщить их на случаи летучих тел и газовых смесей.

Напомним вкратце схему расчета скорости термофореза крупных тел в газах по методу Эпштейна–Вальдмана.

2. Постановка задачи. При решении задачи о термофорезе крупных тел рассматривают задачу Стокса для обтекаемой газом сферы, на бесконечном расстоянии от которой поддерживается малый постоянный градиент температуры $\text{grad}T$. Ограничимся случаем нелетучих тел. Формально это означает, что поверхность сферы непроницаема для газовых молекул, т.е. нормальную составляющую скорости газа на поверхности тела следует положить равной нулю. (Рассматривая случай достаточно крупных тел, для которых $\text{Kn} \ll 1$, можно, соблюдая известную осторожность, некоторые слагаемые, пропорциональные Kn , отбросить не только в ходе вычислений, но уже на стадии постановки задачи.) Таким образом, для нормальной составляющей скорости имеем

$$v_r = 0 \quad (2.1)$$

Граничное условие для тангенциальной составляющей скорости газа менее очевидно. Запишем его в форме [9]

$$v_\theta = \text{Kn} \frac{R}{\eta} C_m \sigma_{r\theta} + k_{\text{TS}} \frac{\eta}{\rho T_0 R} \frac{1}{2} \frac{\partial T + T_i}{\partial \theta} + \frac{3}{2} \frac{\eta}{\rho T_0 R} \frac{1}{2} \frac{\partial T - T_i}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

Первые два слагаемых в выражении (2.2) описывают вязкое и тепловое скольжения. Они содержатся уже в модели Эпштейна. Отметим, однако, что здесь сделаны некоторые уточнения, а именно: в выражении для компоненты тензора вязких напряжений $\sigma_{r\theta}$ учитываются наряду с обычными также и тепловые напряжения $\sigma_{r\theta}^{(T)}$; во втором слагаемом вместо численного коэффициента $3/4$ используется коэффициент теплового скольжения k_{TS} . Кроме того, в более общем виде записано выражение для тангенциальной производной температуры. Однако наиболее существенное различие – появление третьего слагаемого, которого нет в модели Эпштейна.

Здесь использованы следующие обозначения: v – скорость газа относительно тела (индексы r и θ указывают соответственно на радиальную и тангенциальную составляющие), C_m – коэффициент вязкого скольжения, T , T_i и T_0 – температура вне, внутри и в центре сферы соответственно.

Сформулируем граничные условия для определения температур в задаче Лапласа. Нормальная составляющая потока тепла \mathbf{q} на границе непрерывна:

$$q_r = q_{ir}, \text{ или } \partial T / \partial r = \xi \partial T_i / \partial r \quad (2.3)$$

Для температуры имеем (по существу это в уточненном виде соотношение Смоуловского [10])

$$T - T_i = \text{Kn} k^{-1} C_i (\mathbf{q} + \mathbf{q}_i) / 2 \quad (2.4)$$

C_i – коэффициент температурного скачка.

3. Распределение скорости газа и температуры. Выражения для составляющих скорости газа в окрестности тела и для силы, с которой газ действует на тело, запишем в стандартной форме

$$v_r = v_0 \left[1 - 2a \frac{R}{r} + 2b \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta, \quad v_\theta = -v_0 \left[1 - a \frac{R}{r} - b \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta; \quad \mathbf{F} = 8\pi\eta R a \mathbf{v}_0$$

где \mathbf{v}_0 – скорость набегающего потока газа. В равновесии с учетом граничного условия (2.1) имеем для постоянных интегрирования: $a = 0, b = -1/2$.

Распределения температуры внутри и вне тела запишем в форме

$$T_i = T_0 + (\mathbf{A}\mathbf{r}), \quad T = T_0 + (\text{grad}T\mathbf{r}) + (\mathbf{B}\mathbf{r})(R/r)^3 \tag{3.1}$$

Из условий (2.3) и (2.4) имеем

$$-2\mathbf{B} + \text{grad}T = \xi\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} + \text{grad}T - \mathbf{A} = C_t \mathbf{A} \xi \text{Kn}/2$$

Отсюда получим

$$\mathbf{A} = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \xi/2} \text{grad}T, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{1 - \xi}{1 + \xi/2} \text{grad}T \tag{3.2}$$

Наконец, для теплового напряжения в газе имеем

$$\sigma_{r\theta}^{(T)} = \frac{3}{r\rho T_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{9}{2R\rho T_0} \frac{1 - \xi}{1 + \xi/2} \sin \theta \text{grad}T \tag{3.3}$$

4. Скорость термофореза. Используя равенство (2.2) и принимая во внимание, что равновесная скорость тела (скорость термофореза) равна взятому с обратным знаком равновесному значению \mathbf{v}_0 , имеем

$$\mathbf{V}_{th} = -k_{TS} \frac{\eta}{\rho T_0} \frac{\text{grad}T}{1 + \xi/2} \left\{ 1 + \xi \text{Kn} \left[\frac{1}{2} C_t + \frac{3}{k_{TS}} \left(\frac{1}{4} C_t - C_m \right) \right] \right\} \tag{4.1}$$

Напомним, что в результате использования условия малости числа Кнудсена был отброшен ряд слагаемых, в том числе и в выражении (4.1). Следует, однако, подчеркнуть, что возможна ситуация, когда теплопроводность тела настолько велика, что даже при малых числах Кнудсена $\xi \text{Kn} \gg 1$ (такой случай реализуется, например, для металлических тел). Поэтому слагаемые, содержащие множитель ξKn , сохранены. Если же теплопроводность тела не слишком велика по сравнению с теплопроводностью газа, то второе слагаемое в фигурных скобках выражения (4.1) также мало по сравнению с единицей и может быть отброшено, что приводит к уточненной формуле Эпштейна (1.2).

Соотношение (4.1) можно записать в виде следующего выражения для приведенной скорости термофореза в режиме сплошной среды:

$$V_{thr} = -\frac{\mathbf{V}_{th} T_0 (1 + \xi/2)}{\eta \rho^{-1} \text{grad}T} = k_{TS}(\epsilon) (1 + \xi \text{Kn} \Delta(\epsilon, \alpha)) \tag{4.2}$$

$$\Delta(\epsilon, \alpha) = \frac{1}{2} \left[C_t(\alpha) + \frac{3}{k_{TS}(\epsilon)} \left(\frac{1}{2} C_t(\alpha) - 2C_m(\epsilon) \right) \right]$$

Дадим также выражение для приведенной скорости термофореза в свободномолекулярном пределе

$$V_{\text{fmr}} = -\frac{V_{\text{fm}} T_0}{\eta \rho^{-1} \text{grad} T} = \frac{3}{4} \frac{1}{1 + \pi \epsilon / 8} \quad (4.3)$$

Для расчета входящих в формулу (4.1) кинетических коэффициентов воспользуемся результатами расчета, полученными на основании данных [11] для модели твердых шаров:

ϵ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
k_{TS}	0.81	0.87	0.93	0.98	1.02	1.07	1.11	1.15	1.18	1.22
C_m	18.20	8.78	5.62	4.03	3.07	2.42	1.95	1.60	1.32	1.09

и формулой [12]

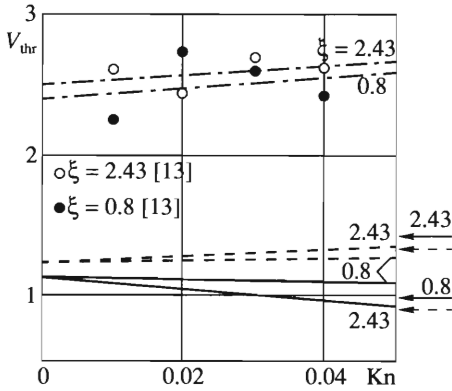
$$C_i(\alpha) = 1.78(2/\alpha - 1)(1 + 0.162\alpha)$$

Здесь α – коэффициент, характеризующий аккомодацию энергии при взаимодействии газовых молекул с поверхностью конденсированной фазы.

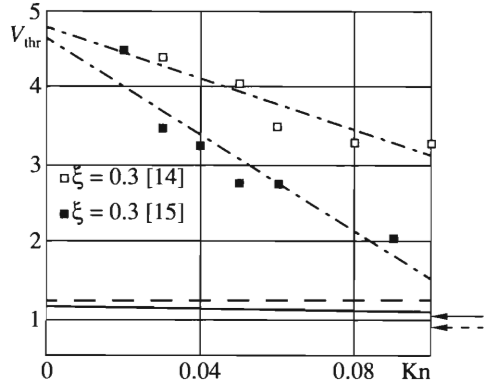
Полученные значения $\Delta(\epsilon, \alpha)$ сведены в таблицу.

α	$\epsilon = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.1	-18.1	16.6	26.8	3.2	33.4	34.5	35.2	35.5	35.6	35.6
0.2	-43.5	-7.76	3.47	8.59	11.4	13.1	14.2	14.9	15.4	15.8
0.3	-51.9	-15.8	-4.33	1.04	4.05	5.92	7.16	8.03	8.65	9.11
0.4	-56.2	-19.8	-8.25	-2.76	0.36	2.32	3.64	4.57	5.26	5.77
0.5	-58.8	-22.3	-10.6	-5.05	-1.87	0.14	1.51	2.48	3.21	3.75
0.6	-60.5	-23.9	-12.2	-6.59	-3.37	-1.32	0.08	1.08	1.83	2.40
0.7	-61.7	-25.1	-13.3	-7.70	-4.45	-2.37	-0.95	0.07	0.83	1.42
0.8	-62.7	-26.0	-14.2	-8.54	-5.27	-3.17	-1.73	-0.70	0.08	0.68
0.9	-63.4	-26.7	-14.9	-9.21	-5.92	-3.80	-2.35	-1.30	-0.51	0.10
1	-64.1	-27.3	-15.5	-9.75	-6.44	-4.31	-2.85	-1.79	-0.99	-0.38

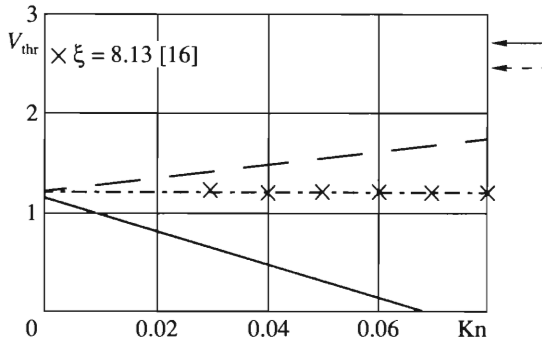
Таблица позволяет, задаваясь отношением теплопроводностей тела и газа ξ , рассчитать по формуле (4.2) скорость термофореза тел при $\text{Kn} \ll 1$ в зависимости от числа Кнудсена во всем диапазоне значений α и ϵ от 0.1 до 1. Любая принципиально возможная кривая $V_{\text{thr}}(\text{Kn})$ при $\text{Kn} \ll 1$ должна лежать внутри области, ограниченной двумя лучами. Так, например, если ограничиться диапазоном значений α и ϵ от 0.8 до 1, то кривая зависимости приведенной скорости термофореза V_{thr} от числа Кнудсена должна пересекать ось ординат в точке с ординатой, заключенной между значениями 1.15 и 1.22, а ее наклон, определяемый функцией $\Delta(\alpha, \epsilon)$, должен лежать в интервале между значениями 0.68ξ и -1.79ξ (фиг. 1). Экспериментальные точки, полученные Канки и Ючи [13], не удовлетворяют ни одному из этих условий, и приходится их отвергнуть. То же можно сказать о результатах измерений для $\xi = 0.8$ [13] (фиг. 1), а также для $\xi = 0.3$ [14, 15], представленных на фиг. 2. И лишь данные для $\xi = 8.13$ [16] (фиг. 3) демонстрируют хорошее согласие с предсказаниями представленной модели: экспериментальные точки укладываются на расчетную кривую $\epsilon = 1$, $\alpha = 0.92$, что прекрасно



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

коррелирует с существующими представлениями и результатами других измерений. На всех фигурах сплошная полужирная прямая соответствует расчетной прямой для значений $\epsilon = 0.8$, $\alpha = 1$, штриховая – для $\epsilon = 1$, $\alpha = 0.8$; справа стрелками указаны соответствующие значения V_{fmr} . Штрихпунктирные прямые – линейные аппроксимации экспериментальных данных, полученные методом наименьших квадратов.

К сожалению, автор, не располагая данными других экспериментов в области $Kn \ll 1$, не имеет возможности провести их анализ.

5. Обсуждение результатов. В последние годы широкое распространение получила оценка экспериментальных данных путем сопоставления их с интерполяционной формулой Тальбота и др. [17]. Однако очевидно, что эта интерполяция, по крайней мере при $Kn \ll 1$, где она базируется на заведомо неудовлетворительной формуле Брока [18], неубедительна. Еще более важное соображение состоит в том, что существующие экспериментальные методики измерения скорости термофореза дают столь значительный разброс данных, что такое сопоставление может в лучшем случае говорить лишь о качественном согласии модели [17] и эксперимента. (Это относится, кстати, и к сопоставлению экспериментальных результатов даже с более надежными расчетными данными, например [19].) Тем не менее многие авторы утверждают, что полученные ими экспериментальные данные вполне согласуются с расчетными. Предлагаемый в данной работе метод оценки результатов (и даже самих методик) измерений дает возможность однозначно и практически независимо от

их точности произвести селекцию, т.е. отбросить неудовлетворительные экспериментальные данные, сохранив при этом принципиально допустимые. В случае, когда критерии достоверности удовлетворены, открывается возможность путем подгонки расчетных и экспериментальных кривых достаточно точно оценить значения коэффициентов аккомодации энергии и импульса при соударении молекул газа с поверхностью тела (аэрозольной частицы).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баканов С.П., Дерягин Б.В. О теории термопреципитации высокодисперсных аэрозольных систем // Коллоид. ж. 1959. Т. 21. № 4. С. 377–384.
2. Waldmann L. Über die Kraft eines inhomogenen Gases auf kleine suspendierte Kugeln // Z. Naturforsch. 1959. Bd. 14a. H. 7. S. 589–599.
3. Maxwell J.C.I. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature // Phil. Trans. Royal Soc. of London. 1879. V. 170. Pt 1. P. 231–256.
4. Reynolds O. On certain dimensional properties of matter in the gaseous state // Phil. Trans. Roy. Soc. Ser.B. 1880. V. 170. P. 727–845.
5. Epstein P.S. Zur Theorie des Radiometers // Z. Physik. 1929. Bd. 54. H 7/8. S. 537–563.
6. Bakanov S.P. Thermophoresis in gases at small Knudsen numbers // Aerosol Sci. Technol. 1991. V. 15. № 2. P. 77–92.
7. Баканов С.П. Термофорез в газах при малых числах Кнудсена // Успехи физических наук. 1992. Т. 162. № 9. С. 133–152.
8. Waldmann L. Non-equilibrium thermodynamics of boundary conditions // Z. Naturforsch. 1967. Bd. 22a. № 8. S. 1269–1280.
9. Баканов С.П., Ролдугин В.И. Граничные задачи кинетической теории газов и необратимая термодинамика // ПИММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 651–659.
10. Smoluchowski M. Über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen // Sitzber. Akad. Wiss. Wien. 1898. Bd. 107. S. 304–329.
11. Баканов С.П. Расчет теплового скольжения при произвольной аккомодации газа на границе раздела фаз // Ж. техн. физики. 1977. Т. 47. Вып. 2. С. 421–427.
12. Onishi Y. Effect of accommodation coefficient on thermal creep flow of rarefied gas // Trans. Japan. Soc. Aeronaut. and Space Sci. 1972. V.15. № 29. P. 117–123.
13. Kanki T., Iuchi S. Accurate measurements of thermal and diffusion forces on a spherical particle // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 14th Intern. Symp. Tokyo: Univ. Tokyo Press. 1984. P. 865–872.
14. Davis L.A., Adair T.W. III. Thermal force on a sphere // J. Chem. Phys. 1975. V. 62. № 6. P. 2278–2285.
15. Tong N.T. Experiments on photophoresis and thermophoresis // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 51. № 1. P. 143–151.
16. Rosenblatt P., Lamer V.K. Motion of a particle in a temperature gradient // Phys. Rev. 1946. V. 70. № 5/6. P. 385–395.
17. Talbot L., Cheng R.K., Scheffer R.W., Willis D.R. Thermophoresis of particles in a heated boundary layer // J. Fluid Mech. 1980. V. 101. Pt 4. P. 737–758.
18. Brock J.R. Comments on “Thirteen-Moment Theory of the Thermal Force on a Spherical Particle” // Phys. Fluids. 1968. V. 11. № 4. P. 922–933.
19. Sone Y., Aoki K. Negative thermophoresis: thermal stress slip flow around a spherical particle in a rarefied gas // Progress in Astronautics and Aeronautics. N.Y.: AIAA. 1981. V. 74. Pt I. P. 489–503.