

УДК 532.64

© 2005 г. А. П. Блинов

**О ФОРМЕ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ В ОДНОРОДНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ**

Предлагается метод построения формы поверхности капли, подвешенной к горизонтальной плоскости силами поверхностного натяжения, либо лежащей на ней, либо зажатой между параллельными плоскостями.

Уравнения поверхностей капель обычно определяются численными методами [1, 2] или с помощью степенных рядов, сходящихся в некоторых окрестностях точек разложения, с последующим аналитическим продолжением<sup>1</sup>. Однако уравнение поверхности в указанных первых двух случаях имеет нерегулярную особенность, которая при разложении решения в ряды не учитывалась. В предлагаемом методе эта особенность учитывается.

В случае капли между двумя плоскостями в дополнение к полученным ранее результатам к [3] в условиях невесомости капли производится аппроксимация ее поверхности эллипсоидом вращения. Отмечается некоторая аналогия изучаемых уравнений с уравнениями движения твердого тела [4].

**1. Капля, свисающая с горизонтальной плоскости.** Форма равновесия жидкой капли, свисающей с горизонтальной плоскости (фиг. 1), описывается дифференциальным уравнением [1]

$$\alpha(1/R_1 + 1/R_2) = \rho g y - \alpha K$$

где  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны капли,  $K$  – удвоенная средняя кривизна капли в основании.

Выбрав в качестве единицы длины величину  $\sqrt{\alpha/(\rho g)}$ , уравнение равновесия можно записать в безразмерном виде [1]

$$y''/(\sqrt{1+y'^2})^3 + y'/(x\sqrt{1+y'^2}) = -y + K \tag{1.1}$$

(штрих означает производную по  $x$ ). Это уравнение имеет нерегулярную особую точку  $x = 0$ , что при учете нелинейности не позволяет применить известные методы интегрирования [5].

Решение будем искать для краевых углов  $\theta > \pi/2$ .

Введя новую переменную

$$X = y'/\sqrt{1+y'^2} \tag{1.2}$$

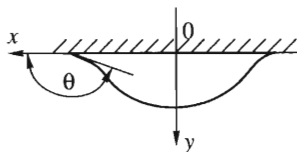
из уравнения (1.1) получим

$$X' + X/x = -y + K \tag{1.3}$$

или после дифференцирования (с учетом совпадения знаков  $X$  и  $y'$ )

$$X'' + X'/x - X/x^2 + X/\sqrt{1-X^2} = 0 \tag{1.4}$$

<sup>1</sup> Барняк М.Я. Приближенные методы решения краевых задач статики и динамики ограниченного объема идеальной и вязкой жидкости. Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. н.: 020. Киев, 1991. 23 с.



Фиг. 1

В силу симметрии задачи относительно оси  $y$  будем искать решение уравнения (1.4) для  $x \geq 0$  ( $X \leq 0$ ,  $X(0) = 0$ ).

В полученном уравнении, как и в (1.1), нерегулярность сохраняется, но нелинейная часть допускает разложение в сходящийся степенной ряд для всех значений переменной  $X$ , имеющих физический смысл ( $|X| < 1$ ; при  $|X| = 1$  капля отрывается от опоры), чего нельзя сказать относительно величины  $y'$  в уравнении (1.1). Кроме того, уравнение (1.4) позволяет сделать некоторые качественные выводы. В самом деле, величины  $X'$  и  $X/x$  представляют главные кривизны поверхности, которые становятся равными при  $x = 0$ , поэтому из равенства (1.3) получаем

$$X'(0) = -1/R_0 = (K - h)/2, \quad h = y(0) \quad (1.5)$$

где  $R_0$  – радиус кривизны меридиана  $R = R(x)$  при  $x = 0$ .

Пусть  $x_*$  и  $x_c$  – значения  $x$ , при которых соответственно  $X'(x_*) = 0$ ,  $y(x_c) = 0$ . Покажем, что функция  $R(x)$  монотонно возрастает от значения  $R_0$  при увеличении  $x$  от 0 до  $x^*$  (или до  $x_c$ , если точка перегиба  $x_*$  отсутствует).

В окрестности точки  $x = 0$  уравнение (1.4) аппроксимируется уравнением Бесселя

$$X'' + X'/x + (1 - 1/x^2) = 0 \quad (1.6)$$

Его решение, удовлетворяющее условиям  $X(0) = 0$ ,  $X'(0) = -1/R_0$ , представляет собой функцию Бесселя первого рода [6]

$$X_B = -\frac{1}{R_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k} k!(k+1)!}$$

Из этого решения видно, что  $X''(0) = 0$ , и в правой полуокрестности точки  $x = 0$  имеем  $X'' > 0$ . Если бы в интервале  $(0, x_*)$  нашлась точка экстремума  $X'$ , то в этом интервале нашлась бы и еще одна точка экстремума  $X'$ , так как  $X''(x_*) > 0$  (при переходе через значение  $x = x_*$  знак  $X'$  меняется с минуса на плюс). Исключая из уравнения (1.4) величину  $X'$  посредством соотношения (1.3), получаем

$$X'' = (2/x^2) + X/\sqrt{1 - X^2} + (y - K)/x \quad (1.7)$$

При возрастании  $x$  оба слагаемые в правой части монотонно убывают, причем первое остается отрицательным, а второе – положительным. Поэтому сумма этих слагаемых может обращаться в нуль только в одной точке, и обращение в нуль  $X''$  в интервале  $(0, x_*)$  невозможно.

Решение уравнения (1.4) будем искать в виде степенного ряда

$$X = a_1 x + a_1 x^2 + \dots; \quad a_1 = -1/R_0 \quad (1.8)$$

После подстановки этого ряда и его производных в уравнение (1.4) (с учетом разложения нелинейной части последнего по степеням  $X$ ) получим выражения для коэффициентов через коэффициент  $a_1$

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1} + A_{2n-1}}{(2n+1)^2 - 1}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} A_{2n-1} &= \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!} a_1^{2n-1} + \frac{(2n-5)!!}{2^{n-2}(n-2)!} \sum \frac{(2n-3)!}{l_1! l_3!} a_1^{l_1} a_3^{l_3} + \dots \\ &\dots + \frac{[2(n-m)-3]!!}{2^{n-m-1}(n-m-1)!} \sum \frac{[2(n-m)-1]!}{l_1! l_3! \dots l_{2m+1}!} a_1^{l_1} a_3^{l_3} \dots a_{2m+1}^{l_{2m+1}} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} \sum \frac{3!}{l_1! l_3! \dots l_{2n-3}!} a_1^{l_1} a_3^{l_3} \dots a_{2n-3}^{l_{2n-3}}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Суммирование ведется по всем  $l_1, l_3, \dots, l_{2m+1}$ , удовлетворяющим условиям

$$l_1 + 3l_3 + \dots + (2m+1)l_{2m+1} = 2n-1, \quad l_1 + l_3 + \dots + l_{2m+1} = 2(n-m)-1 \quad (1.11)$$

т.е.  $l_1, l_3, \dots, l_{2m+1}$  должны представлять неотрицательные целочисленные решения системы диофантовых уравнений (1.11).

Так как непосредственно определить радиус сходимости ряда (1.8) трудно, рассмотрим некоторые оценки решения уравнения (1.4).

Заменим в этом уравнении выражение  $1/\sqrt{1-X^2}$  его первым приближением  $1 + X^2/2$  и для полученного уравнения

$$X^n + X/x + (1 - X/x^2)X + X^3/2 = 0 \quad (1.12)$$

оценим радиус сходимости ряда вида (1.8). Теперь коэффициент  $A_{2n-1}$  при степени  $x^{2n-1}$  разложения  $X^3/2$  имеет вид

$$A_{2n-1} = \frac{1}{2} \sum \frac{3!}{k_1! k_3! \dots k_{2n-1}!} a_1^{k_1} a_3^{k_3} \dots a_{2n-1}^{k_{2n-1}}$$

где суммирование ведется по  $k_1, k_3, \dots, k_{2n-1}$  удовлетворяющим системе диофантовых уравнений

$$k_1 + 3k_3 + \dots + (2n-1)k_{2n-1} = 2n-1, \quad k_1 + k_3 + \dots + k_{2n-1} = 3 \quad (1.13)$$

Для дальнейшего потребуется оценка числа неотрицательных целочисленных решений этой системы. Соответствующие оценки известны только для уравнений вида

$$l_1 Z_1 + l_2 Z_2 + \dots + l_p Z_p = n \quad (1.14)$$

( $l_1, l_2, \dots, l_p, n$  – неотрицательные целые числа). Число решений уравнения (1.14) равно коэффициенту  $E_n$  разложения [7]

$$[(1 - \xi^{l_1})(1 - \xi^{l_2}) \dots (1 - \xi^{l_p})]^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} E_m \xi^m \quad (1.15)$$

Применяя эту формулу ко второму уравнению (1.13), найдем

$$E_3 = n(n+1)(n+2)/6 \quad (1.16)$$

а для первого уравнения (1.13) формула (1.15) практически бесполезна из-за сложности вычисления коэффициента  $E_{2n-1}$ . Это вычисление можно несколько упростить, если воспользоваться неравенством

$$\begin{aligned} [(1 - \xi)(1 - \xi^3)(1 - \xi^5) \dots (1 - \xi^{2n-1})]^{-1} &\leq (1 + \xi)(1 + \xi^2)(1 + \xi^3) \dots = \\ &= 1 + \xi + \xi^2 + 2\xi^3 + 2\xi^4 + 3\xi^5 + 3\xi^6 + 5\xi^7 + \dots \end{aligned}$$

откуда

$$E_{2n+1} < n + 1 + E_n + E_{n-1} + \dots \quad (1.17)$$

Поскольку число решений системы (1.13) значительно меньше числа решений (1.16) или (1.17), то для дальнейшей оценки перейдем от системы (1.13) к эквивалентной системе

$$k_1 + k_3 + k_5 + \dots + k_{2n-1} = 3, \quad k_3 + 2k_5 + 3k_7 + \dots + (n-1)k_{2n-1} = n-2; \quad n > 2 \quad (1.18)$$

Решения этой системы упорядочим:

$$k_1 = 3, \quad k_i = 0, \quad i > 1 \quad (\text{будет решением лишь при } n = 2)$$

$$k_2 = 2, \quad k_{2n-3} = 1, \quad \text{остальные } k_i = 0$$

Следующую серию решений будем называть первой серией:

$$k_1 = 1, \quad k_3 = 1, \quad k_{2n-5} = 1$$

$$k_1 = 1, \quad k_3 = 0, \quad k_5 = 1, \quad k_{2n-7} = 1$$

$$k_1 = 1, \quad k_3 = 0, \quad k_5 = 0, \quad k_7 = 1, \quad k_{2n-9} = 1$$

.....

Число решений первой серии не более  $[n/2] - 2$ .

Рассмотрим решения второй серии

$$k_1 = 0, \quad k_3 = 1, \quad k_5 = 1, \quad k_{2n-9} = 1$$

$$k_1 = 0, \quad k_3 = 1, \quad k_5 = 0, \quad k_7 = 1, \quad k_{2n-11} = 1$$

$$k_1 = 0, \quad k_3 = 1, \quad k_5 = 0, \quad k_7 = 0, \quad k_9 = 1, \quad k_{2n-13} = 1$$

.....

Число решений этой серии не более  $[n/2] - 3$ .

Так как число таких серий не более  $[n/2] - 2$ , то общее число решений в них не более

$$([n/2] - 1)([n/2] - 2)/2$$

К указанным решениям надо еще добавить следующие:

$$k_1 = 0, \quad k_3 = 2, \quad k_{2n-7} = 1$$

$$k_1 = 0, \quad k_3 = 0, \quad k_5 = 2, \quad k_{2n-11} = 1$$

.....

Число таких решений не более  $[(n-1)/4]$ .

Число же всех решений системы (1.18) не более  $N = 3 + [n^2/8] - [n/2]$ .

Для оценки радиуса сходимости ряда, представляющего решение уравнения (1.12), предположим, что  $|a_1| \leq 1/2$ . Тогда для первых номеров  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  выполняются неравенства

$$|a_{2n-1}| < (1/2)^{2n-1} \quad (1.19)$$

Принимая это свойство за основание индукции, можно доказать, используя первое равенство (1.13), что оно выполняется и для  $|a_{2n+1}|$ . В результате заключаем, что радиус сходимости рассматриваемого степенного ряда не меньше двух.

Докажем, что решение уравнения (1.12)  $\psi(x)$  представляет миноранту точного решения  $\phi(x)$  уравнения (1.4) (при условиях  $\psi(0) = \phi(0) = 0$ ,  $\psi'(0) = \phi'(0) = a_1$ ).

Сравнение решений  $\phi(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots$  и  $\psi(x) = a_1x + \bar{a}_3x^3 + \bar{a}_5x^5 + \dots$  в малой окрестности  $x = 0$  показывает, что  $\phi(x) \geq \psi(x)$  (и  $\phi'(x) \geq \psi'(x)$ ), так как  $\bar{a}_3 = a_3$ ,  $\bar{a}_5 = a_5$ ,  $\bar{a}_7 < a_7$ .

Докажем теперь, что неравенство  $\phi(x) \geq \psi(x)$  сохранится в интервале сходимости ряда, представляющего  $\psi(x)$ .

Запишем уравнения (1.4) и (1.12) соответственно в виде

$$(xX)' = (1/x - x)X - x(X^3/2 + 3X^5/8 + \dots), \quad (xX)' = (1/x - x)X - xX^3/2$$

Подставим в эти уравнения соответствующие решения и, вычтя одно из другого, получим

$$[x(\varphi' - \psi)'] = (1/x - x)(\varphi - \psi) - x/2(\varphi^3 - \psi^3) - x(3\varphi^5/8 + \dots)$$

Предположим, что найдется точка  $x_1 \in (0; 1)$ , в которой кривые  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  пересекутся, т.е.  $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$  и  $\varphi'(x_1) < \psi'(x_1)$  и для  $x \in (x_1; x_1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$  имеем  $\varphi(x) < \psi(x)$  и  $\varphi'(x) < \psi'(x)$ . Тогда после интегрирования последнего уравнения на достаточно малом отрезке  $[x_1, x_1 + \varepsilon]$  слева и справа получим числа разных знаков. Это абсурдно. Поэтому пересечение кривых невозможно.

Наряду с минорантой  $\psi(x)$  для решения  $\varphi(x)$  можно указать его мажоранту  $\Psi(x)$ , если в уравнении (1.4) заменим  $1/\sqrt{1 - X^2}$  куском параболы  $1 + \lambda X^2$ , выбрав величину  $\lambda$  такой, чтобы для  $0 \leq X^2 \leq X_*^2 < 1$  выполнялось неравенство  $1/\sqrt{1 - X^2} \leq 1 + \lambda X^2$ . Например,  $\lambda = 0.62$  при  $X_* = -1/2$ . При такой замене мажоранта  $\Psi(x)$  определяется в виде ряда, аналогично определению  $\psi(x)$ .

Таким образом, хотя радиус сходимости ряда (1.8) не установлен, этим рядом можно пользоваться, по крайней мере, для значений  $x$ , при которых числовые значения ряда остаются между значениями  $\psi(x)$  и  $\Psi(x)$ , и иметь при этом оценку погрешности.

Используя формулы (1.9), (1.10), запишем первые коэффициенты разложения (1.8) в явном виде

$$a_3 = -\frac{1}{8}a_1, \quad a_5 = -\frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}a_1^3 + a_3\right), \quad a_7 = -\frac{1}{48}\left(\frac{3}{8}a_1^5 + \frac{3}{2}a_1^2a_3 + a_5\right)$$

$$a_9 = -\frac{1}{80}\left(\frac{5}{16}a_1^7 + \frac{15}{8}a_1^4a_3 + \frac{3}{2}a_1^2a_5 + \frac{3}{2}a_1a_3^2 + a_7\right)$$

Из соотношения (1.3) имеем решение

$$y = K - X' - X/x = K - 2a_1 - 4a_3x^2 - 6a_5x^4 - \dots \tag{1.20}$$

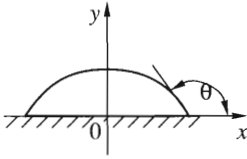
содержащее два параметра:  $K$  и  $R_0$ . Чтобы определить эти параметры, воспользуемся выражением (1.2) и краевым условием  $y'(x_c) = \text{tg } \theta$ ; тогда из выражения (1.2) получим  $X(x_c, R_0) = -\sin \theta$ . Из равенства (1.3) выразим  $K = X'(x_c, R_0) - (\sin \theta)/x_c$  и, подставив в соотношение (1.20) (при  $x = x_c$ ,  $y = 0$ ), выразим  $x_c = x_c(R_0)$  и  $K = K(R_0)$ ,  $y = y(x, R_0)$ .

Объем капли  $V = 2\pi \int_0^{x_c} yx dx$  (считается заданным) определяет величину  $R_0$ .

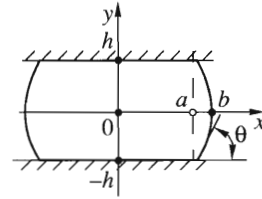
Ниже для значений  $R_0 = 1$ ,  $h = 1$  приведены результаты вычисления величины  $y$  по формуле (1.20) и величины  $\Delta$ , равной разности найденных значений  $y$  и результатов численного решения уравнения (1.1)

$x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
$y$	1	0.9978	0.9433	0.8495	0.6988	0.4690	0.1170
$\Delta \cdot 10^4$	0	0	0	0	1	15	64

**2. Капля на плоскости.** Рассмотрим форму капли, лежащей на плоскости (фиг. 2) и имеющую краевой угол  $\theta > \pi/2$ . Уравнение меридиана в этом случае будет отличаться от (1.1) только знаком правой части (направление оси  $y$  теперь противоположно направлению силы тяжести) и вместо уравнения (1.4) получим уравнение, в котором знак последнего слагаемого меняется с плюса на минус. В окрестности точ-



Фиг. 2



Фиг. 3

ки  $x = 0$  в линейном приближении оно имеет вид уравнения, родственного уравнению Бесселя [6].

Решение задачи вновь ищем в виде ряда (1.8). Теперь получим

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{a_{2n-1} + A_{2n-1}}{(2n+1)^2 - 1}$$

(величины  $A_{2n-1}$  по-прежнему определяются по формулам (1.10)). Далее вместо выражения (1.20) имеем

$$y = K + X/x + X' = K + 2a_1 + 4a_3x^2 + \dots$$

**3. Капля между параллельными плоскостями в невесомости.** Рассмотрим форму капли, заключенной между параллельными стенками (фиг. 3) в невесомости при краевых углах  $\theta < \pi/2$  (несмачивание). Пусть ось  $y$  совпадает с осью симметрии капли, а ось  $x$  лежит в плоскости ее экватора на расстоянии  $h$  от стенки. Уравнение для переменной  $X$  принимает вид

$$X' + X/x = -K \quad (K > 0) \quad (3.1)$$

а его общее решение

$$X = -Kx/2 + c_1/x \quad (3.2)$$

Хотя решение для  $y$  выражается в квадратурах, точное решение краевой задачи получается довольно сложным даже при малых деформациях капли [3].

Рассмотрим аппроксимацию меридиана капли дугой эллипса, используя наблюдение за изменением кривизны меридиана. Пусть  $a$  и  $b$  – соответственно значения  $x$ , при которых меридиан соприкасается со стенкой и пересекает экватор капли. Используя краевое условие

$$X(b) = -1 = -Kb/2 + c_1/b$$

получим

$$c_1 = (Ka/2 - \sin\theta)a \quad (3.3)$$

Видно, что

$$c_1 > 0 \text{ и } c = -2(b + a \sin\theta)/(b^2 - a^2) \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) следует, что кривизна меридиана по модулю монотонно убывает с ростом  $x$ .

При  $x = a$ ,  $y = h$  радиус главной кривизны вдоль параллели равен  $a/\sin\theta$ . Поэтому радиус кривизны меридиана в точке контакта

$$R_a = 1/|X'(a)| = a/(aK - \sin\theta)$$

В точке пересечения с экватором радиус кривизны меридиана  $R_0 = -b(1 - Kb)$  (так как экватор – линия кривизны).

Аппроксимируем меридиан дугой эллипса так, что последняя будет иметь заданный краевой угол  $\theta$  и убывающую по модулю кривизну с ростом  $x$ , причем ее радиус кривизны  $\rho_a$  в точке  $x = a, y = h$  совпадает с  $R_a$ , а радиус кривизны  $\rho_0$  в точке  $(b, 0)$  совпадает с  $R_0$ .

Пусть  $\xi^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$  – искомое уравнение эллипса, где  $\xi = x - a - l$ .  $l$  – расстояние от центра эллипса до точки  $x = a$  и  $\rho(y, \xi)$  – радиус кривизны эллипса. Здесь

$$\rho(y, \xi) = \frac{1}{AB} \left( \frac{A^4 y^2 + B^4 \xi^2}{A^2 y^2 + B^2 \xi^2} \right)^{3/2}$$

Подбирая параметры  $A, B, l$  так, чтобы удовлетворить указанным требованиям, получим

$$l = \frac{A^2 \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{A^2 \operatorname{tg}^2 \theta + B^2}}, \quad \frac{B^2}{A} = \frac{-b}{1 - Kb}, \quad \rho(h, l) = \frac{a}{aK - \sin \theta}$$

К этим соотношениям присоединим краевые условия

$$b = a - A - l, \quad h = B \sqrt{1 - l^2/A^2}$$

и условие постоянства объема капли

$$V = 2\pi a^2 h + 2\pi \int_a^b u x dx = 2\pi a^2 h + \pi(a-l)AB \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{l}{A} - \frac{l}{A} \sqrt{1 - \frac{l^2}{A^2}} \right) + \frac{2}{3} \pi A^2 B \left( \sqrt{1 - \frac{l^2}{A^2}} \right)^3$$

В частности, при полном несмачивании ( $\theta = 0$ ) получаем

$$l = 0, \quad B = h, \quad V = 2\pi a^2 h + (\pi^2/2)Aha + 2\pi A^2 h/3$$

Определив отсюда величину  $a$  как положительный корень  $a = a(A)$ , из предшествующих формул определяем  $K = h/A^2$  и  $A = A(h)$ .

При  $\theta > 0$  найденные значения параметров можно использовать как первые приближения для вычисления поправок.

*Замечание.* В задаче о понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела ([4] и др.) получено уравнение

$$\frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3} = \frac{(V_y - V_x y')^2}{2V\sqrt{1+y'^2}} \pm \frac{\Omega}{\sqrt{2V}}$$

где  $V$  и  $\Omega$  – некоторые заданные функции переменных  $x, y$ ;  $V_x = \partial V/\partial x, V_y = \partial V/\partial y$ .

Это уравнение имеет некоторое сходство с рассматриваемыми выше. Заменой переменной  $X = 1/\sqrt{1+y'^2}$  оно приводится к системе

$$y' = \frac{\sqrt{1+X^2}}{X}, \quad X' = \frac{1}{2} \left( V_y - \frac{V_x \sqrt{1-X^2}}{X} \right)^2 \frac{\sqrt{1-X^2}}{V} \pm \frac{\Omega}{X} \sqrt{\frac{1-X^2}{2V}}$$

правые части которой допускают представление в виде произведений рядов по степеням  $X^2$  на  $X^{-1}$  или  $X^{-2}$  во всей области значений  $X \in [0, 1)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Саранин В.А. Равновесие жидкостей и его устойчивость. Простая теория и доступные опыты. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 171 с.
2. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д. и др. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
3. Блинов А.П. О форме поверхности жидкости в невесомости // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 61–69.
4. Яхья Х.М. О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1976. № 6. С. 76–79.
5. Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. N. Y., etc: Wiley, 1965 = Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
6. Kamke E. Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Teubner: Leipzig, 1977 = Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
7. Pölya G., Szegö G. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Berlin, etc.: Sprihger, 1964 = Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. I. М.: Наука, 1978. 392 с.

Москва

Поступила в редакцию  
6.IV.2003