

УДК 532.5

© 2005 г. О. В. Войнов

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УГЛЕ НА ТЕЧЕНИЕ С ИСКРИВЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

Рассматривается медленное течение вязкой жидкости по поверхности твердого тела, которую пересекает под углом другая граничная поверхность. Течение осесимметрично, и контуры поверхностей искривлены. На второй поверхности отсутствует касательное напряжение, как на свободной. Течение изучается вблизи линии пересечения при произвольных углах. Выведены формулы функции тока и нормального напряжения на границе для малых расстояний от линии пересечения. Первый член разложения соответствует известному решению задачи о течении внутри угла. Второй член разложения нормального напряжения на свободной поверхности учитывает искривление границ потока. Осевая симметрия течения и искривление граничных контуров приводят к логарифмической особенности в нормальном напряжении.

Исследования медленных течений вязкой жидкости внутри угла были начаты Релеем [1], который рассмотрел случай неподвижных сторон угла. Тейлор рассмотрел [2] задачу течения внутри угла, образованного двумя плоскими твердыми границами, одна из которых движется. В отличие от задачи Тейлора в задаче Моффатта [3] на одной из сторон угла отсутствует касательное напряжение, как на свободной границе жидкость–газ.

Будем рассматривать аналогичную задачу, когда пересекающиеся поверхности неплоские. При таком обобщении естественно обратиться к анализу течения на малых расстояниях от линии пересечения (контакта). При этом можно будет распространить решение задачи о течении внутри угла как приближенное на широкий класс течений. Реальность такому обобщению может придать второй член асимптотики, до сих пор не рассматривавшийся даже в частных случаях.

Задача интересна в связи с гидромеханикой смачивания твердых тел вязкими жидкостями. Краевой угол может быть образован за счет движения жидкости со свободной границей в малой окрестности движущейся линии контакта. Эффект динамического краевого угла основан на медленном изменении угла наклона границы с расстоянием согласно нелинейной асимптотике [4–6]. Эта асимптотика справедлива в промежуточной области малого масштаба вблизи линии контакта, где расстояния ограничены снизу минимальным – микроскопическим масштабом. Микромасштаб может быть обусловлен динамикой сверхтонкой прекурсионной пленки, опережающей растекание жидкости с краевым углом, как было установлено в асимптотической теории [4, 5] и подтверждено Де Женом [7].

Если малая область указанной нелинейной асимптотики существует, то возможен другой эффект: на большом масштабе динамика жидкости может почти не влиять на форму свободной поверхности. Отсюда возникла модель квазистатической поверхности на большом масштабе [4], смысл которой в следующем.

На свободной границе жидкость–газ S верно условие Лапласа для средней кривизны H

$$2\sigma H = P_n + p_0$$

где P_n – нормальное напряжение в жидкости, p_0 – давление в газе, σ – поверхностное натяжение. В области большого масштаба напряжение P_n мало отличается от статического – константы в отсутствие массовых сил, поэтому форма поверхности приближенно определяется уравнением капиллярной статики, при этом может зависеть от времени. Для статической поверхности S можно найти напряжение P_n из задачи вязкого течения. Затем можно уточнить

форму поверхности – найти мало возмущенную форму из граничного условия с переменным напряжением P_n . Возмущенная форма поверхности S поэтому будет квазистатической. Эта модель динамики растекающейся жидкости со свободной поверхностью была указана [4] для уточнения формы растекающейся капли, близкой к сферическому сегменту переменного радиуса с произвольным контактным углом. Модель включает как частный случай малых углов.

Модель растекания капли [4] была дополнена формулами [5] общих параметров модели растекания для случая, когда есть движущаяся прекурсионная пленка. Модель [4] квазистатичности поверхности капли в центральной области использована во многих работах для случая малых углов, что было отражено в обзоре Де Жена [7].

Таким образом, в связи с гидромеханикой смачивания твердых тел имеет смысл задача течения вязкой жидкости по твердой поверхности при статической форме свободной границы.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматриваем осесимметричное течение вязкой жидкости по поверхности твердого тела при малых числах Рейнольдса. Свободная граница S пересекает поверхность твердого тела S_{sol} вдоль движущейся линии контакта. Задача рассматривается на плоскости, проходящей через ось симметрии системы, на этой плоскости граничные поверхности представлены контурами (образующими). Предполагаем, что твердое тело неподвижно. На его поверхности скорость жидкости равна нулю:

$$\mathbf{v} = 0 \text{ на } S_{\text{sol}} \quad (1.1)$$

На свободной поверхности S нормальная скорость жидкости равна нормальной скорости поверхности w :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = w \quad (1.2)$$

\mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности жидкости S .

Если контур S движется как твердый и не вращается, то условие (1.2) принимает вид

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_0 n_1, \text{ где } n_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (1.3)$$

v_0 – скорость линии контакта, \mathbf{e}_1 – единичный вектор касательной, направленный к сухой части поверхности твердого тела.

В общем случае зададим скорость w в пределе малого расстояния r от линии контакта:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_0 n_1 + \omega_F r + \dots, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

Здесь ω_F – угловая скорость вращения единичного вектора $\boldsymbol{\tau}_F$ касательной к контуру S в точке линии контакта.

Касательное напряжение P_τ на контуре S равно нулю:

$$P_\tau = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.5)$$

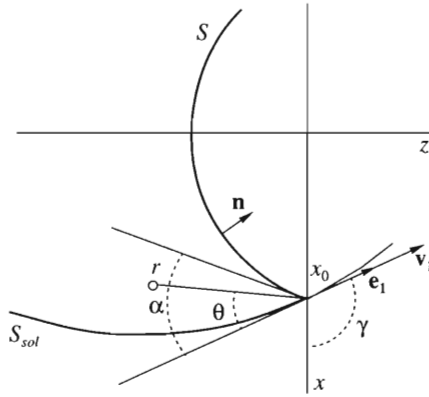
где \mathbf{P} – тензор напряжений в жидкости, $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной к контуру S .

Введем цилиндрические координаты x и z , где x – расстояние от оси симметрии, z – координата вдоль этой оси.

Запишем уравнения для функции тока и для давления

$$\hat{E}^2 \Psi = 0, \quad \hat{E} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \quad \left(v_x = -\frac{1}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, v_z = \frac{1}{x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial z} \hat{E} \Psi, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \hat{E} \Psi \quad (1.7)$$



Если расстояние от линии контакта мало, то достаточно локального описания геометрии границ. Предполагаем, что граничные поверхности гладкие, так что координаты их точек можно представить несколькими членами разложения в ряд Тейлора.

Обозначим угол, образованный пересекающимися границами, через α .

Рассмотрим также второй угол γ , который образован касательным вектором \mathbf{e}_1 и радиальной осью x (фигура). Примем, что $\gamma > 0$, если внешняя нормаль к поверхности твердого тела направлена к оси симметрии и $\gamma < 0$, если она направлена от оси симметрии.

Зададим кривизны контуров поверхностей S и S_{sol} на линии контакта, k_F и k_S соответственно. Точка линии контакта имеет координаты $x = x_0$ и $z = 0$, x_0 – радиус линии контакта.

Введем полярные координаты r и θ с началом в точке линии контакта, причем линия $\theta = 0$ касается твердой поверхности и направлена к ее смоченной части (фигура). Контур S_{sol} вблизи линии контакта близок к касательной:

$$\theta = \frac{1}{2}k_S r + O(r^2), \quad r \rightarrow 0 \tag{1.8}$$

Контур свободной границы S для малых r описывается уравнением

$$\theta - \alpha = \frac{1}{2}k_F r + O(r^2), \quad r \rightarrow 0 \tag{1.9}$$

Таким образом, геометрию границ задают пять параметров: углы α и γ , радиус x_0 линии контакта или ее кривизна x_0^{-1} , и кривизны k_F и k_S контуров.

Функция тока $\psi = 0$ на поверхности твердого тела, поэтому $\psi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ в силу отсутствия особенности на линии контакта.

Известно решение [3] в частном случае плоских границ, когда линия контакта прямая. Обозначим соответствующие функцию тока и нормальное напряжение на свободной границе через ψ_0 и P_{n0} . В общем случае ψ может определяться разложением для малых значений r

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots \tag{1.10}$$

Второй член ψ_1 – малая поправка, $\psi_1 \ll \psi_0$ при $r \rightarrow 0$. Первое слагаемое имеет известный вид $\psi_0 = r f(\theta)$, а второе можно искать в виде $\psi_1 = r^2 f_1(\theta)$.

Используя линейность задачи, можно заключить, что возмущение функции тока ψ_1 – линейная функция кривизн k_0 , k_F и k_S , поэтому задачу определения ψ_1 можно разбить на три различные задачи со следующими условиями:

- 1) кривизна линии контакта $k_0 \neq 0$, но две другие кривизны равны нулю;
- 2) кривизна контура свободной границы $k_F \neq 0$, но $k_0 = k_S = 0$;
- 3) кривизна контура твердой стенки $k_S \neq 0$, но $k_0 = k_F = 0$.

Приведем далее последовательно решения этих трех задач. При решении третьей задачи рассмотрим также возможное влияние нестационарности границ.

2. Задача 1: течение с осевой симметрией. Принимая $k_F = 0$ и $k_S = 0$, учитываем, что $k_0 \neq 0$. Примем, что касательная к контуру свободной границы в точке линии контакта не вращается в рассматриваемый момент, т.е. $\omega_F = 0$.

Из соотношений (1.3) и (1.9) имеем на свободной границе

$$v_\theta(r, \theta) = v_0 \sin \alpha + O(r^2) \quad \text{для } \theta = \alpha + O(r^2) \quad (2.1)$$

Условие (1.5) нулевого касательного напряжения дает

$$P_{r\theta}(r, \theta) = O(r) \quad \text{для } \theta = \alpha + O(r^2) \quad (2.2)$$

причем

$$\frac{1}{\mu} P_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \quad (2.3)$$

Компоненты скорости в полярных координатах выражаются через функцию тока следующим образом:

$$v_r = \frac{1}{rx} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.4)$$

Подставляя разложение (1.10) в уравнение (1.6), получим в главном приближении бигармоническое уравнение

$$\Delta_0^2 \psi_0 = 0, \quad \Delta_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.5)$$

Граничные условия (1.1) на твердой стенке в главном приближении дают

$$\psi_0 = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \quad (2.6)$$

Присоединим сюда также граничные условия (2.1) и (2.2), записанные в главном приближении при $r \rightarrow 0$. Запишем известное решение задачи для (2.5) с такими условиями в виде

$$\psi_0 = rx_0 f_0(\theta) \quad (2.7)$$

$$f_0 = v_0 Q [\sin \theta \cos \alpha - \theta \cos \theta - \alpha], \quad Q = \sin \alpha / (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \quad (2.8)$$

Решения задачи с однородными граничными условиями на сторонах угла и условием убывания при $r \rightarrow 0$ убывают быстрее ψ_0 при любом $\alpha < \pi$. При $\alpha = \pi$ решение выродается: $\psi_0 \equiv 0$.

Уравнение для возмущения ψ_1 следует из соотношений (1.6), (1.10) и (2.5):

$$\Delta_0^2 \psi_1 = \frac{2}{x_0} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_0 \psi_0$$

Используя выражения (2.7), (2.8), имеем

$$\Delta_0^2 \psi_1 = \frac{4}{r^2} v_0 Q(\alpha) \sin(2\theta - \alpha - \gamma) \quad (2.9)$$

Выведем теперь граничные условия для ψ_1 . Условия на твердом теле дают

$$\psi_1(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}(r, 0) = 0 \quad (2.10)$$

Используя равенство

$$x - x_0 = -r \cos(\theta - \gamma)$$

найдем из соотношений (2.1) и (2.4) условие на свободной границе

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r}(r, \alpha) = v_0 r \sin \alpha \cos(\alpha - \gamma) \quad (2.11)$$

Из соотношений (2.1)–(2.4) следует, что

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + x r v_0 \sin \alpha + \dots \text{ для } \theta = \alpha$$

Подставив сюда разложение (1.10), получим

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2}(r, \alpha) = -v_0 \sin \alpha \cos(\alpha - \gamma) - v_0 Q \sin^2 \alpha \sin(\alpha - \gamma) \quad (2.12)$$

В результате имеем граничные условия (2.10), (2.11) и (2.12) на сторонах угла $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$. Частное решение задачи для уравнения (2.9) с такими условиями имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= r^2 f_1(\theta); \\ f_1 &= \frac{1}{4} v_0 Q \{ -\cos \alpha \sin(2\theta - \gamma) - \cos \alpha \sin \gamma + \theta \cos(2\theta - \alpha - \gamma) + \theta \cos(\alpha - \gamma) \} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Определим нормальное напряжение на свободной границе S вблизи линии контакта. В пределе $r \rightarrow 0$ нормальное напряжение с учетом соотношений (1.9) и (2.7), (2.13) можно представить в виде

$$P_n|_S = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_{\theta\theta}(r, \theta) + \dots \text{ при } \theta = \alpha + O(r^2)$$

$$P_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) = -p + O(1)$$

поэтому

$$P_n|_S = -p(r, \alpha) + O(1) \text{ при } r \rightarrow 0 \quad (2.14)$$

Перепишем уравнение (1.7) в полярных координатах

$$\frac{1}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta_0 \psi - \frac{1}{x} \nabla_x \psi \right), \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{x r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Delta_0 \psi - \frac{1}{x} \nabla_x \psi \right) \quad (2.15)$$

Используя разложение

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{x - x_0}{x_0^2} + \dots$$

и тождества

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \Delta_0 \Psi_0 = \frac{2x_0}{r} v_0 Q \cos(\theta - \alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \Delta_0 \Psi_1 = v_0 Q \cos(\alpha - \gamma) - 2v_0 Q \cos(2\theta - \alpha - \gamma)$$

$$\frac{1}{x_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla_x \Psi_0 = 2v_0 Q \sin(\theta - \gamma) \sin(\theta - \alpha)$$

из соотношений (2.15) найдем

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2v_0}{r^2} Q \cos(\theta - \alpha) + \frac{v_0}{x_0 r} Q \cos(\alpha - \gamma) + \dots$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\frac{1}{\mu} p = -\frac{2v_0}{r} Q \cos(\theta - \alpha) + \frac{v_0}{x_0} Q \cos(\alpha - \gamma) \ln r + O(1) \quad (2.16)$$

Из соотношений (2.14) и (2.16) следует, что при $r \rightarrow 0$ нормальное напряжение на границе S равно

$$P_n|_S = \frac{2}{r} \mu v_0 Q + P_{n1}, \quad P_{n1} = -\frac{\mu v_0}{x_0} Q \cos(\alpha - \gamma) \ln r + O(1) \quad (2.17)$$

Первый член в разложении P_n (2.17) соответствует плоской задаче о течении в угле. Второй член P_{n1} обусловлен осевой симметрией течения; существенно, что он бесконечен в точке $r = 0$. Слагаемое P_{n1} зависит от угла γ , который образует радиальная ось и единичный вектор e_1 скорости линии контакта (фигура).

Рассмотрим примеры разных значений этого угла.

Если жидкость течет в круглой трубе, то $\gamma = \pi/2$.

Если жидкость течет по поверхности твердого стержня, то $\gamma = -\pi/2$.

Пусть жидкость течет по плоской поверхности. Предположим, что ее смоченная часть – круг, тогда $\gamma = 0$; это соответствует, в частности, жидкой капле на поверхности. Если сухая часть плоской поверхности твердого тела – круг, получим $\gamma = \mp\pi$; это относится к случаю газового пузырька в контакте со стенкой.

Замечание о роли решений однородной задачи о течиении в угле. Как видно, анализ течения в пределе малых расстояний от линии контакта приводит к задаче о течиении внутри угла для неоднородного уравнения относительно ψ_1 (1.10) при неоднородных условиях на сторонах угла. Можно преобразовать решение этой задачи, добавив произвольное решение $\tilde{\psi}$ задачи для бигармонического уравнения с однородными граничными условиями на сторонах угла, причем $\tilde{\psi} \rightarrow 0, r \rightarrow 0$. При этом асимптотическое решение $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$ не изменится, если все решения однородной задачи убывают быстрее, чем r^2 при $r \rightarrow 0$, $\tilde{\psi} = o(r^2)$. Тогда решения однородной задачи убывают быстрее ψ_1 и не дают вклад в асимптотическое решение. В противном случае вклад решения однородной задачи важнее, чем ψ_1 .

Для решений вида $\tilde{\psi} = r^{m+1} \varphi(\theta)$ получается известное [3] уравнение

$$\sin 2m\alpha - m \sin 2\alpha = 0; \quad m \neq 1, \quad \operatorname{Re} m > -1$$

Корень с действительной частью $\operatorname{Re} m_1 < 1$ есть при $\alpha > \alpha_* = 128.7^\circ$, причем при $\alpha < \alpha_*$ для всех корней $\operatorname{Re} m_1 > 1$, поэтому вклад $\tilde{\psi}$ в асимптотическое решение важнее вклада ψ_1 , если угол α

больше критического значения α_* . Если $\alpha < \alpha_*$, любое решение однородной задачи $\bar{\psi}$ убывает быстрее ψ_1 при $r \rightarrow 0$ и может дать вклад только в остаточный член разложения (1.10).

Следовательно, рассматриваемые асимптотические выражения для функции тока и нормального напряжения пригодны, когда контактный угол меньше критического угла: $\alpha < \alpha_* = 128.7^\circ$.

3. Задача 2: течение с искривленным контуром свободной границы. Примем, что кривизна контура свободной границы k_F не равна нулю, но $k_0 = k_S = 0$. При этом достаточно рассмотреть плоскую задачу. Используем функцию тока, отличающуюся от ψ в соотношениях (2.4) множителем x_0 :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3.1)$$

При этом первое слагаемое в разложении ψ (1.10) имеет вид

$$\Psi_0 = r f_0(\theta) \quad (3.2)$$

Функция $f_0(\theta)$ определяется выражением (2.8).

Рассмотрим единичные векторы нормали \mathbf{n} и касательной $\boldsymbol{\tau}$ к свободной поверхности. С точностью до $O(r^2)$

$$n_r = -\delta, \quad \tau_\theta = \delta; \quad \delta = k_F r / 2 \quad (3.3)$$

Используя выражение (3.3), определим компоненту нормали по оси с единичным вектором скорости \mathbf{e}_1

$$n_1 = \sin \alpha + 2\delta(r) \cos \alpha + \dots \quad (3.4)$$

Условие отсутствия касательного напряжения (1.5) дает

$$P_\tau = P_{r\theta} + (P_{\theta\theta} - P_{rr})\delta + \dots = 0 \quad (3.5)$$

Компоненту $P_{r\theta}$ на поверхности S представляем разложением

$$P_{r\theta}(r, \alpha + \delta) = P_{r\theta}(r, \alpha) + \frac{\partial P_{r\theta}}{\partial \theta}(r, \alpha)\delta + \dots, \quad r \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Из соотношений (1.10), (2.8) и (3.2) найдем

$$P_{rr} - P_{\theta\theta} = O(r), \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial P_{r\theta}}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{2}{r} Q v_0 + O(1)$$

Используя эти формулы в соотношениях (3.5) и (3.6), с учетом равенства (2.3) получим

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = -v_0 k_F Q \quad \text{при } \theta = \alpha \quad (3.7)$$

Запишем условие для нормальной скорости жидкости на поверхности S

$$v_\theta n_\theta + v_r n_r = v_0 n_1 + O(r^2)$$

Представив v_θ двумя членами разложения в ряд Тейлора и учитывая выражения (3.2)–(3.4), найдем

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r}(r, \alpha) = -v_0 k_F r (\cos \alpha - Q \sin^2 \alpha) \quad (3.8)$$

Условия на поверхности твердого тела S_{sol} можно перенести на касательную линию $\theta = 0$ при $r \rightarrow 0$, потому что кривизна $k_S = 0$. Имеем

$$\psi(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(r, 0) = 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

Следовательно, пришли к задаче для бигармонического уравнения с условиями (3.7)–(3.9), которые заданы на сторонах угла $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$. Ее частное решение

$$\psi_1 = r^2 \Phi(\theta), \quad \Phi = \frac{1}{4} v_0 k_F Q [1 - \cos 2\theta - \text{ctg} \alpha (2\theta - \sin 2\theta)] \quad (3.10)$$

Давление в жидкости определяется двучленным выражением $p = p_0 + p_1$, где слагаемое p_0 соответствует ψ_0 , а $p_1 - \psi_1$. Из уравнения для давления

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta \psi \quad (3.11)$$

и решения (3.10) найдем

$$p_1 = -2\mu v_0 k_F Q \text{ctg} \alpha \ln r + O(1) \quad (3.12)$$

Подставив выражение (3.12) в соотношение (2.14), получим вклад ψ_1 в нормальное напряжение P_n на поверхности S :

$$P_{n1} = 2\mu v_0 k_F \frac{\cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \ln r + O(1) \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

Первый член разложения нормального напряжения $P_n = P_{n0} + P_{n1}$ дан второй формулой (2.17). Второй член разложения нормального напряжения, определяемый выражением (3.13), бесконечен на линии контакта при $\alpha \neq \pi/2$. Аналогично величине P_{n1} (2.17) он ведет себя как $\ln r$.

4. Задача 3: течение по искривленной стенке. Рассмотрим плоскую задачу, когда кривизна стенки k_S не равна нулю, но $k_F = 0$. Функция тока представляется разложением (1.10), величина ψ_0 дана формулами (2.8) и (3.2).

Используя граничные условия на поверхности S_{sol} и разлагая в ряд Тейлора ψ и v_r в точке $\theta = 0$, с учетом разложения (1.10) и выражения для ψ_0 получим

$$\psi_1(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}(r, 0) = r^2 k_S v_0 Q \sin \alpha \quad (4.1)$$

Для малых r граничные условия на свободной поверхности можно перенести на касательную $\theta = \alpha$, потому что кривизна $k_F = 0$. Из соотношений (1.4), (1.5) и (1.10) имеем

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r}(r, \alpha) = -\omega_F r \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0 \quad \text{при } \theta = \alpha \quad (4.3)$$

Запишем решение задачи для бигармонического уравнения внутри угла с условиями (4.1)–(4.3)

$$\psi_1 = r^2 \Phi(\theta)$$

$$\Phi(\theta) = c\theta + \frac{2c\alpha + \omega_F}{2D(\alpha)} \{ \operatorname{tg} 2\alpha(1 - \cos 2\theta) - 2\theta + \sin 2\theta \} \quad (4.4)$$

$$c = k_S v_0 Q \sin \alpha, \quad D = 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha$$

Подставив выражение (4.4) в (3.11), найдем давление p_1 . Имеем

$$\frac{1}{\mu} p_1 = -\frac{4c \operatorname{tg} 2\alpha}{D} \ln r - \frac{4\omega_F}{D} \ln r + O(1)$$

Из выражения (2.14) получим второй член разложения нормального напряжения

$$\frac{1}{\mu} P_{n1} = 4k_S v_0 \frac{Q \sin \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{D} \ln r + \frac{4\omega_F}{D} \ln r + O(1) \quad (4.5)$$

Здесь k_S – кривизна твердой стенки. Второе слагаемое учитывает нестационарность поверхности S .

Решение (4.5) годится, если $\alpha \neq \alpha_*$, где α_* – корень уравнения $D(\alpha) = 0$. Это значение совпадает с критическим углом α_* , обсуждаемым в разд.2.

Рассмотрим касательную к контуру S_{sol} в точке линии контакта и направим ее единичный вектор τ_S к смоченной части стенки. Кривизна k_S стенки вызывает изменение τ_S при движении линии контакта. Вектор τ_S вращается с угловой скоростью

$$\omega_S = -k_S v_0 \quad (4.6)$$

Единичный вектор τ_F касательной к контуру свободной границы вращается с угловой скоростью ω_F . Угол между τ_F и τ_S равен α . Следовательно,

$$\alpha' = \omega_F - \omega_S \quad (4.7)$$

Заменив ω_F в равенстве (4.5) при помощи соотношений (4.6) и (4.7), получим уравнение

$$\frac{1}{\mu} P_{n1} = \left\{ -\frac{2k_S v_0}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{4\alpha'}{2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha} \right\} \ln r + O(1) \quad (4.8)$$

определяющее вклады в разложение нормального напряжения на свободной границе, которые дают кривизна контура твердого тела k_S и нестационарность границ.

5. Асимптотическая формула для нормального напряжения на свободной поверхности. Суммируя вклады в нормальное напряжение на поверхности S , определяемые соотношениями (2.17), (3.13) и (4.8), получим в пределе $r \rightarrow 0$ асимптотическое выражение для нормального напряжения на свободной границе в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} P_n = & \frac{2v_0}{r} \frac{\sin \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} + \\ & + \left\{ v_0 \frac{2k_F \cos \alpha - 2k_S - k_0 \sin \alpha \cos(\alpha - \gamma)}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{4\alpha'}{2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha} \right\} \ln r + O(1) \end{aligned} \quad (5.1)$$

где v_0 – скорость линии контакта, α – контактный угол, γ – угол, связанный с осевой симметрией течения (фигура); k_0 , k_F и k_S – соответственно кривизны линии контакта, контура свободной поверхности и контура твердого тела. Контактный угол может принимать значения в интервале $(0, \alpha_*)$, $\alpha_* \approx 128.7^\circ$.

Формула (5.1) верна для малых расстояний от линии контакта, ее новизна состоит в появлении логарифмического члена за счет искривления границ течения. Этот член существенный, потому что он бесконечен на линии контакта.

Для частного случая плоских границ и фиксированного контактного угла выражение (5.1) совпадает с известным решением [3].

Отметим, что выражение нормального напряжения (5.1) имеет общий смысл, так как справедливо для произвольного осесимметричного стокового течения с пересекающимися границами.

Автор благодарит Г.Г. Черного за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rayleigh, Lord*. Steady motion in a corner of a viscous fluid. Cambridge: Univ. Press, Scient. Papers, 1920. V. 6. P. 8–21.
2. *Taylor G.I.* Similarity solutions of hydrodynamic problems // *Aeronautics and Astronautics*. L. etc.: Pergamon Press, 1960. P. 21–28.
3. *Moffatt H.K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 18. Pt 1. P. 1–18.
4. *Воинов О.В.* Гидродинамика смачивания // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1976. № 5. С. 76–84.
5. *Воинов О.В.* Об углах наклона границы в движущихся жидких слоях // *ПМТФ*. 1977. № 2. С. 92–99.
6. *Воинов О.В.* Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости // *Докл. АН СССР*. 1978. Т. 243. № 6. С. 1422–1425.
7. *Де Жен П.Ж.* Смачивание: Статика и динамика // *Успехи физ. наук*. 1987. Т. 151. № 4. С. 619–681; *De Gennes P.G.* Wetting: Statics and dynamics // *Rev. Mod. Phys.* 1985. V. 57. № 3. Pt 1. P. 827–863.

Тюмень
e-mail: o.v.voinov@mtu-net.ru

Поступила в редакцию
13.V.2004