

УДК 532.5

© 2005 г. Л. И. Рубина

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ И РЕШЕНИЯХ ОДНОМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Выписаны уравнения характеристик для нестационарного одномерного уравнения фильтрации. Показано, что любое точное решение уравнения характеристик имеет константный произвол (не более трех произвольных постоянных). Этот произвол используется для построения, вообще говоря, приближенного решения начально-краевой задачи.

1. Постановка задачи. Для уравнения нестационарной фильтрации в одномерном случае [1]

$$p_{xx} = mp^{-\gamma/(\gamma+1)} p_t / (k\gamma) \quad (1.1)$$

(m – пористость среды, k – коэффициент фильтрации, γ – показатель политропы, p – давление в среде, t – время, x – пространственная переменная; нижними индексами обозначается дифференцирование по соответствующей переменной), которое в несколько измененном масштабе времени имеет вид

$$p_t = p_x^2 / \gamma + pp_{xx} \quad (1.2)$$

была поставлена [2] начально-краевая задача со следующими начальными и граничными условиями:

$$p(x, 0) = 0, \quad p(0, t) = F(t), \quad F(0) = 0 \quad (1.3)$$

Эта задача рассматривается ниже.

Выбрав в качестве зависимой переменной время $t = t(x, p)$, уравнение (1.2) запишем в виде

$$t_p^2 - t_x^2 t_p / \gamma + p(t_{xx} t_p^2 - 2t_x t_{xp} t_p + t_x^2 t_{pp}) = 0 \quad (1.4)$$

Если в качестве зависимой переменной выберем x , то для функции $x = x(p, t)$ получим уравнение

$$x_t x_p^2 + x_p / \gamma - px_{pp} = 0 \quad (1.5)$$

Уравнения (1.2), (1.4), (1.5) имеют особенность при старших производных и характеризуются конечной скоростью распространения возмущений [2].

В ряде работ (см., например, [3–7]) разными методами для таких уравнений получены точные решения, имеющие константный произвол, но остается открытым вопрос, почему точные решения уравнений (1.2), (1.4), (1.5) имеют только константный произвол.

Изучение характеристик уравнения (1.1) позволяет ответить на этот вопрос.

2. Изучение характеристик. В уравнении (1.4) перейдем к новым независимым переменным

$$p - \varphi(x) = \xi, \quad x = \eta \quad (2.1)$$

Якобиан преобразования, очевидно, не равен нулю.

Посмотрим, при каких условиях $\xi = \text{const}$ – характеристика уравнения (1.4).

В новых переменных уравнение (1.4) имеет вид

$$t_\xi^2 - t_\xi(t_\eta - \varphi_x t_\xi)^2 / \gamma + (\varphi + \xi)[(t_{\eta\eta} - 2\varphi_x t_{\xi\eta} + \varphi_x^2 t_{\xi\xi} - \varphi_{xx} t_\xi) t_\xi^2 - 2t_\xi(t_\eta - \varphi_x t_\xi)(t_{\xi\eta} - \varphi_x t_{\xi\xi}) + (t_\eta - \varphi_x t_\xi)^2 t_{\xi\xi}] = 0 \quad (2.2)$$

Соберем коэффициенты при выводящей производной $t_{\xi\xi}$ и потребуем, чтобы их сумма была равна нулю, тогда линия $\xi = \text{const}$ – характеристика [8]. Получим

$$\varphi_x^2 t_\xi^2 + 2\varphi_x t_\xi(t_\eta - \varphi_x t_\xi) + (t_\eta - \varphi_x t_\xi)^2 = 0$$

Отсюда следует, что $t_\eta = 0$, и $t = \text{const}$ вдоль характеристик $\xi = \text{const}$.

Выпишем соотношение, которое должно выполняться на характеристике, чтобы уравнение (2.2) имело решение. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$1/t_\xi - \varphi_x^2 / \gamma - (\varphi + \xi)\varphi_{xx} = 0 \quad (2.3)$$

которому должны удовлетворять характеристики уравнения (2.2). Решения уравнения (2.3) зависят от параметра $\xi = \text{const}$.

Уравнение (2.3) имеет особое решение

$$\varphi(x) = \pm (x\sqrt{\gamma/t_\xi}) + a(\xi), \quad a(\xi) = \text{const} \quad (2.4)$$

Если $\varphi_x \neq 0$, то, положив $\varphi_x(x) = y(\varphi)$, для функции $y^2(\varphi) = q$ получим ОДУ первого порядка

$$[(\varphi + \xi)/2]q_\varphi = 1/t_\xi - q/\gamma$$

Отсюда следует, что

$$q^{1/2} = \varphi_x = u, \quad u = \pm \sqrt{\gamma \left(\frac{1}{t_\xi} - \frac{c(\xi)}{(\varphi + \xi)^{2/\gamma}} \right)} \quad (2.5)$$

Здесь $c(\xi)$ – произвольная постоянная.

Выпишем решение ОДУ (2.5) с разделяющимися переменными, выразив функцию $\varphi(x)$ через u . Получим

$$A(\xi) \int \frac{dv}{(1 \pm v^2)^{1+\gamma/2}} = x + b(\xi), \quad v = u \sqrt{\frac{|t_\xi|}{\gamma}} \quad (2.6)$$

где $A(\xi)$, $b(\xi)$ – некоторые постоянные.

Если $\gamma = 2(n-1)$, где n – целое число, то, выполнив интегрирование в равенстве (2.6), получаем [9] (см. также [4])

$$x = -b(\xi) + A(\xi)W$$

$$W = \frac{(2n-3)!!}{2^n(n-1)!} z_\pm + \frac{v}{2n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)}{2^k(n-1)(n-2)\dots(n-k)(1 \pm v^2)^{n-k}} \quad (2.7)$$

$$z_- = \ln \frac{1+v}{1-v}, \quad z_+ = 2 \operatorname{arctg} v$$

Если в формуле (2.6) под знаком интеграла стоит знак минус(плюс), берется $z_-(z_+)$.

При $\gamma = 2n - 1$ [9]

$$W = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n-1}{k} \frac{(\pm 1)^k v^{2k+1}}{(1 \pm v^2)^{k+1/2}}$$

Знаки плюс (минус) в числителе и знаменателе этого выражения выбираются одинаковыми и соответствуют знакам в формуле (2.6).

Если γ – любое число, то [9]

$$x = -b(\xi) + vF(\gamma/2 + 1, 1/2; 3/2; -v^2) \tag{2.8}$$

Здесь $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ – гипергеометрическая функция.

Выражения (2.7), (2.8) являются, фактически, решениями уравнения (1.5) при фиксированном времени (см. соотношения (2.1), (2.5)). Следовательно, для любого t решение уравнения (1.5) при произвольном γ будет иметь вид

$$x(p, t) = b(t) + A(t)B^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\gamma/2 + 1)(\gamma/2 + 2) \dots (\gamma/2 + i)}{(1/2 + i)!} B^i \right] \tag{2.9}$$

$$B = 1 - a(t)p^{-2/\gamma}$$

Подставив выражение (2.9) в уравнение (1.5), получим систему ОДУ первого порядка для определения функций $a(t)$, $A(t)$, $b(t)$, решив которую, будем иметь решение уравнения (1.5), зависящее от трех произвольных постоянных.

Рассмотрим случай $\gamma = -1$. В этом случае уравнение (2.3) имеет решения

$$\varphi(x) = -\xi + a(\xi) \cos x + b(\xi) \sin x, \quad a(\xi)^2 + b(\xi)^2 = -1/t_\xi, \quad t_\xi < 0$$

$$\varphi(x) = -\xi + c(\xi) \operatorname{ch} x + d(\xi) \operatorname{sh} x, \quad c(\xi)^2 + d(\xi)^2 = 1/t_\xi, \quad t_\xi > 0$$

Отсюда следует, что

$$p(x, t) = r(t) + a(t) \cos x + b(t) \sin x, \quad t_\xi < 0 \tag{2.10}$$

$$p(x, t) = f(t) + c(t) \operatorname{ch} x + d(t) \operatorname{sh} x, \quad t_\xi > 0 \tag{2.11}$$

Подставив выражение (2.10) в уравнение (1.2), получим (точкой обозначено дифференцирование по времени)

$$\dot{r} + \dot{a} \cos x + \dot{b} \sin x = -(b \cos x - a \sin x)^2 - (r + h)h, \quad h = b \sin x + a \cos x$$

Это выражение будет тождеством, если

$$\dot{r} = -(a^2 + b^2), \quad \dot{a} = -ra, \quad \dot{b} = -rb \tag{2.12}$$

Будем полагать (общий случай), что $a(t) \neq 0$ и $b(t) \neq 0$, тогда

$$r^2 + v = a^2 + b^2, \quad v = \operatorname{const}$$

Далее, пусть $\alpha = \sqrt{|v|}$, тогда [5]

$$p(x, t) = \alpha \operatorname{tg}[\alpha(\beta - t)] + (\lambda \cos x + \mu \sin x) / \cos[\alpha(\beta - t)], \quad \lambda^2 + \mu^2 = v > 0$$

$$p(x, t) = \alpha \operatorname{th}[\alpha(\beta + t)] + (\lambda \cos x + \mu \sin x) / \operatorname{ch}[\alpha(\beta + t)], \quad \lambda^2 + \mu^2 = v < 0$$

Здесь α, β, λ – произвольные постоянные.

Аналогично можно подставить в уравнение (1.2) соотношение (2.11) и получить решение, зависящее от трех произвольных постоянных.

Если в уравнении (1.4) перейти к переменным

$$x - \varphi(p) = \xi, \quad p = \eta \quad (2.13)$$

то $\xi = \operatorname{const}$ будет характеристикой, если $t_\eta = 0$.

В данном случае на характеристике необходимо выполнение условия

$$\varphi_p^2 / t_\xi + \varphi_p / \gamma - p \varphi_{pp} = 0 \quad (2.14)$$

Положим $\varphi_p = q$, тогда для q будем иметь уравнение, решив которое, получим

$$q = \varphi_p = \frac{\sigma p^{1/\gamma}}{\gamma(1 - \varpi p^{1/\gamma})}, \quad \sigma = \operatorname{const}, \quad \varpi = \frac{\sigma}{t_\xi}$$

Будем считать, что $\gamma = k/l$, где l, k – целые числа, $k > l + 1$. Тогда, проинтегрировав выражение для q , получим решение уравнения (2.14)

$$\varphi(p) = -\frac{l}{k} a p - \frac{l}{k-l} \frac{a}{b^l} p^{(k-l)/k} + c X(\theta)$$

$$a = t_\xi = \operatorname{const}, \quad b = \varpi^{1/l} = \operatorname{const}, \quad c = a b^{ml} = \operatorname{const}, \quad \theta = b p^{1/k}$$

$$m = \frac{l(k-l)}{k-l-1} - 1, \quad X(\theta) = \ln(1 - \theta) + \sum_{i=1}^{(l-1)/2} \cos 2\tau_i \ln(1 + 2\theta \cos \tau_i + \theta^2) + \quad (2.15)$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{(l-1)/2} \sin 2\tau_i \operatorname{arctg} \frac{\theta + \cos \tau_i}{\sin \tau_i}, \quad \tau_i = \pi \frac{2i-1}{l}$$

При фиксированном времени решение уравнения (1.5) должно совпадать с выражением (2.15), поэтому будем искать решение уравнения (1.5) в виде

$$x(p, t) = -\frac{l}{k} a(t) p - \frac{l}{k-l} \frac{a(t)}{b(t)^l} p^{(k-l)/k} + c(t) X(b(t) p^{1/k}) + d(t) \quad (2.16)$$

После подстановки выражения (2.16) в уравнение (1.5), получим

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{c} = 0, \quad \dot{d} = 1/a$$

Отсюда следует

$$a(t) = a = \operatorname{const}, \quad c(t) = c = \operatorname{const}, \quad d(t) = t/a + \alpha$$

Но $c(t) = a(t)b(t)^{ml}$ (см. соотношение (2.15)); следовательно, $c = ab(t)^{ml}$, и тогда $b(t) = c/a = \operatorname{const}$. Получили решение уравнения (1.5), зависящее от трех произвольных постоянных a, b, α .

Выпишем также особое решение уравнения (2.14)

$$\varphi_p = -t_\xi/\gamma \Rightarrow \varphi = \alpha p - t/(\gamma\alpha) + \beta, \quad \alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const}$$

Пока предполагалось, что характеристика $\xi = \text{const}$ имеет вид (2.1) или (2.13). В характеристических переменных решение уравнения (1.4) зависит от одной переменной ($t = t(\xi)$, $t_\eta = 0$). В общем случае можем полагать, что $\xi = \psi(x, p, t)$, тогда после подстановки в уравнение (1.4) неявно заданной функции $t = f(\psi(x, p, t))$ получим ($\psi, f_\psi \neq 1$)

$$-\psi_p^2/f_\xi + \psi_p^2\psi_t + \psi_p\psi_x^2/\gamma - p(\psi_{pp}\psi_x^2 - 2\psi_p\psi_{xp}\psi_x + \psi_p^2\psi_{xx}) = 0 \tag{2.17}$$

Очевидно, в этом случае $\psi(x, p, t) = a(t)$, где $a(t)$ – функция, обратная функции $t = f(\psi)$, и $1/f_\xi = \dot{a}(t)$.

Пусть

$$a(t) = \psi(x, p, t) = -p + \varphi(x, t)$$

Тогда после подстановки производных функции $\psi(x, p, t)$ в уравнение (2.17) получим уравнение (здесь $\psi_p = -1$)

$$-\dot{a}(t) + \varphi_t - \varphi_x^2/\gamma - (\varphi - a(t))\varphi_{xx} = 0 \tag{2.18}$$

Если $t = \text{const}$, то (2.18) – характеристическое уравнение; в нем в отличие от характеристических уравнений (2.3) и (2.14) присутствует член φ_p , который на характеристике при $t = \text{const}$ может быть не равен нулю. Известно точное решение [3], где этот член при $t = \text{const}$ зависит от x . Таким образом, (2.18) – наиболее общий случай характеристического уравнения.

Уравнение (2.18) является ОДУ второго порядка и имеет решение, зависящее от двух произвольных постоянных: $\varphi = \varphi(x, b, c)$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$. Так как решение уравнения (1.2) на характеристике должно совпадать с решением уравнения (2.18), если φ зависит от x , то решение уравнения (1.2) будет иметь вид $p = \varphi(x, b(t), c(t)) - a(t)$ и, подставив его в уравнение (1.2), получим ОДУ первого порядка для функций $b(t)$, $c(t)$, $a(t)$. Следовательно, точное решение уравнения (1.2) будет иметь произвол не более трех произвольных постоянных.

Например [3],

$$p(x, t) = -(x - \alpha)^2/s + \mu/s^{2/\delta}, \quad \delta = 2(\gamma + 2)/\gamma, \quad s = \delta t + \beta \tag{2.19}$$

Здесь α, β, μ – произвольные постоянные. Можно проверить, что выражение (2.19) удовлетворяет уравнениям (1.2) и (2.18).

Из всего изложенного выше следует, что любое точное решение уравнения (1.2) имеет произвол не более трех постоянных.

3. Приближенное решение начально-краевой задачи. Покажем далее, как выражения для функции $p(x, t)$ с константным произволом могут быть использованы для решения начально-краевой задачи (1.2), (1.3).

Имея точное решение, зависящее от трех произвольных постоянных, можно построить решение, зависящее от двух произвольных функций, если задать две постоянные как некоторые функции от третьей постоянной. На примере решения (2.19) покажем, что эти функции можно выбрать так, что начальные и краевые условия будут выполняться точно.

Согласно условиям (1.3), $p(0, t) = F(t)$. Зафиксируем в выражении (2.19) $t = v$ и потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$F(v) = -\alpha^2 r^{-1} + \mu r^{-2/\delta}, \quad r = \delta v + \beta \tag{3.1}$$

Потребовав также, чтобы для производной по t от функции (2.19) выполнялось равенство $p_t(0, v) = \dot{F}(v)$, получим

$$\dot{F}(v) = \delta\alpha^2 r^{-2} - 2\mu r^{-(2/\delta+1)} \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1), (3.2) найдем значения α^2 и μ , если $r \neq 0$:

$$\alpha^2 = \gamma(\dot{F}r^2 + 2Fr)/4, \quad \mu = \gamma r^{2/\delta}(\dot{F}r + \delta F)/4 \quad (3.3)$$

Выполнение условий (3.3) означает, что кривая $p(0, t) = F(t)$ – огибающая кривых, образованных сечениями $x = 0$ на поверхности $p = p(x, t)$ из решения (2.19).

Потребовав, чтобы для α и μ в выражениях (3.3) выполнялись условия $\alpha_v = 0$ и $\mu_v = 0$, получим

$$L(v, \beta) = \dot{F}r^2 + 2(\delta + 1)\dot{F}r + 2\delta F = 0; \quad F = F(v), \quad r = r(v) \quad (3.4)$$

что эквивалентно требованию $p_{tt}(0, v) = \dot{F}(v)$.

Из равенства (3.4) найдем $v = v(\beta)$ (если $L_v \neq 0$) и подставим в выражения (3.3). Получим искомые функции $\alpha = \alpha(\beta)$, $\mu = \mu(\beta)$, подстановка которых в выражение (2.19) дает однопараметрическое семейство поверхностей

$$p(x, t) = -(x - \alpha(\beta))^2 s^{-1} + \mu(\beta)s^{-2/\delta} \quad (3.5)$$

Потребуем, чтобы производная p_β была равна нулю:

$$p_\beta = 2(x - \alpha)\alpha_\beta s^{-1} + (x - \alpha)^2 s^{-2} + \mu_\beta s^{-2/\delta} - 2\mu s^{-2/\delta-1}/\delta = 0 \quad (3.6)$$

Выразив из этого равенства $\beta = \beta(x, t)$ и подставив в выражение (3.5), получим поверхность – огибающую однопараметрического семейства поверхностей (3.5).

Хотя функции (3.5) – точные решения уравнения (1.2), функция

$$P(x, t) = p(x, t, \beta(x, t))$$

будет удовлетворять уравнению (1.2) лишь приближенно, так как

$$P_t = p_t + p_\beta \beta_t = p_t, \quad P_x = p_x + p_\beta \beta_x = p_x$$

$$P_{xx} = p_{xx} + p_{x\beta} \beta_x + (p_\beta \beta_x)_x = p_{xx} + p_{x\beta} \beta_x \neq p_{xx}$$

($p_{x\beta} \neq 0$ при $\beta = \beta(x, t)$ из равенства (3.6)).

Максимальная погрешность при подстановке приближенного решения в уравнение (1.2) будет равна $pp_{x\beta} \beta_x$ где $p = p(x', t', \beta)$, $\beta = \beta(x', t')$, а x' и t' – решения системы уравнений

$$(pp_{x\beta} \beta_x)_x = 0 \quad (pp_{x\beta} \beta_x)_t = 0 \quad (3.7)$$

На фронте волны, где $P(x, t) = 0$, а $p_{x\beta}(x, t, \beta(x, t))\beta_x(x, t) \neq \infty$, уравнение (1.2) удовлетворяется точно, а при $P(x, t) \neq 0$ погрешность может быть значительной.

Чтобы получить более точное решение начально-краевой задачи, будем считать, что $v = t$ в выражениях (3.1), (3.3) и

$$p(x, t) = -(x - \alpha(t))^2 r(t)^{-1} + \lambda(t), \quad \lambda(t) = \mu(t)r(t)^{-2/\delta} \quad (3.8)$$

где $r(t)$ – неизвестная функция, которая при $t = v$ может быть определена из соотношения (3.4) в виде

$$r(v) = \{-(\delta + 1)\dot{F} \pm [((\delta + 1)\dot{F})^2 - 2\delta F\ddot{F}]^{1/2}\}/\ddot{F}, \quad F = F(v) \quad (3.9)$$

если $\ddot{F} \neq 0$ и выражение в квадратных скобках в (3.9) неотрицательно.

\dot{F}	F	r		
		$\gamma > 0$	$-2 < \gamma < 0$	$\gamma < -2$
> 0	> 0	$0 < r, r < r^* < 0$	$r = 0$	$r^* < r < 0$
> 0	< 0	$r < 0, 0 < r^* < r$	$r = 0$	$0 < r < r^*$
< 0	> 0	$0 < r < r_*$	$r < r^* < 0, 0 < r_* < r$	$r < 0, 0 < r_* < r$
< 0	< 0	$r_* < r < 0$	$r < r_* < 0, 0 < r^* < r$	$0 < r, r < r_* < 0$

Будем искать линии уровня функции $p(x, t)$. Из соотношения (3.8) найдем функцию $x = x(t)$, такую, что $p(x(t), t) = F(v)$. Получим

$$x(t) = \alpha(t) \pm [(\lambda(t) - F(v))r(t)]^{1/2} \tag{3.10}$$

Далее, подставим выражение (3.8) в уравнение (1.2), а затем подставим в полученное соотношение выражение (3.10). Получим ОДУ для определения функции $r = r(t)$ на линии уровня $p(x(t), t) = F(v)$ вида

$$\dot{r} = \frac{r(g^{1/2} - \chi)(\ddot{F}r + 2\dot{F}) + \delta(\delta - 2)\chi(F - F(v))}{(\delta - 2)\chi(F - F(v)) - 2(g^{1/2} - \chi)(\dot{F}r + F)} \tag{3.11}$$

$$g = (\lambda - F(v)), \quad \chi = r^{-1/2}\alpha$$

Начальное значение $r = r(v)$ определим из равенства (3.9). В уравнении (3.11) там, где у функций и производных не указан аргумент, подразумевается аргумент t .

Найдя решение уравнения (3.11) для $t > v$, подставим полученное значение $r(t)$ в равенство (3.1) и определим значение $x = x(t)$, такое, что $p(x(t), t) = F(v)$. При $v = 0$ это значение будет соответствовать фронту возмущения, отделяющему область покоя от движущейся среды.

Необходимые и достаточные условия существования действительного фронта возмущения (3.10) приведены в таблице, где

$$r_* = -2F/\dot{F}, \quad r^* = -\delta F/\dot{F} \quad (F = F(t))$$

Чтобы выполнялось условие $x(0) = 0$, должна выполняться также зависимость $\text{sign} \alpha = -\text{sign}(gr)^{1/2}$.

Таким образом, на любой линии уровня уравнение (1.2) будет удовлетворяться точно.

Замечание. Если значение $r(v)$, удовлетворяющее соотношению (3.9), таково, что

$$\beta(v) = r(v) - 2\delta v = \text{const}$$

то при заданном краевом режиме выражение (3.5) – точное решение уравнения (1.2), так как $\alpha = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$.

Примеры. 1°. Пусть $\gamma = -1$, $F(t) = -tg(t/2)$. Подставив соответствующие заданному краевому режиму функции в соотношение (3.9), получаем $\beta(v) \neq \text{const}$, поэтому для построения фронта возмущения $x = x(t)$ решаем уравнение (3.11) и полученные значения функции $r(t)$ подставляем в равенство (3.10). Для рассматриваемого краевого режима известно точное решение [5]

$$p(x, t) = \text{ctgt} - \cos x / \sin t$$

Фронт возмущения в этом случае, если $0 < t < \pi$, $x > 0$, имеет вид $x = t$. Приближенный фронт возмущения отличается от точного менее чем на 3% при $t \leq 0.85$ и менее чем на 1% при $t \leq 0.5$.

2°. Пусть при $\gamma = -2$ краевой режим $F(t) = (1 - e^{2t})/2$. Подставив соответствующие значения в равенство (3.9), выбрав перед корнем знак минус, чтобы выполнялось условие $r \neq 0$, получим $\beta(v) = -1 = \text{const}$.

Как отмечено в замечании, при данном краевом режиме ($\beta = \text{const}$) можно получить точное решение начально-краевой задачи, положив $v = t$. Из выражений (3.3) находим

$$\alpha^2 = 1/2, \quad \mu\beta^{-2/\delta} = -e^{2t}/2$$

Подставив найденные значения в соотношение (3.5), получаем точное решение при заданном краевом режиме

$$p(x, t) = (x + 1/\sqrt{2})^2 - e^{2t}/2$$

3°. Рассмотрим решения задачи (1.2), (1.3), когда $F(t) = at$, $a = \text{const}$. Если значения γ и a имеют одинаковые знаки, то при $\beta = \infty$ получаем точное решение этой задачи

$$p(x, t) = F(t) \mp x(\gamma F)^{1/2} \tag{3.12}$$

Если γ и a разных знаков, то функция (3.12) – комплекснозначная. В этом случае для получения решения воспользуемся соотношениями (3.3), (3.4). Положим, например, $\gamma = -1$, $a = c^2$. Тогда

$$\beta = 0, \quad \alpha = 0, \quad \mu = c^2/2$$

Точное решение при заданном краевом режиме имеет вид

$$p(x, t) = x^2/(2t) + c^2t$$

Автор благодарит С.С. Титова за замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-0037).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 544 с.
2. Сидоров А.Ф. Математика. Механика. Избр. тр. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
3. Титов С.С. Решение двумерного уравнения фильтрации Лейбензона в виде многочлена по пространственным переменным // Динамика многофазных сред. Новосибирск.: ИТПМ СО АН СССР, 1981. С. 291–293.
4. Титов С.С., Устинов В.А. Исследование многочленных решений двумерного уравнения фильтрации Лейбензона с целым показателем адиабаты // Приближенные методы решения краевых задач механики сплошной среды. Свердловск.: УНЦ АН СССР, 1985. С. 64–70.
5. Галактионов В.А., Посащков С.А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 4. С. 497–506.
6. Пухначев В.В. Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 2. С. 23–31.
7. Рудых Г.А., Семенов Э.И. Новые точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. № 5. С. 1130–1139.
8. Courant R. Partial differential equations. N. Y.; L.: Interscience, 1962 = Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.