

УДК 532.526:534.1

© 2005 г. С. В. Мануйлович

О ВТОРИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ВОЛН БЕНДЖАМИНА

В рамках четырехпалубной асимптотической модели изучена эволюция малых двумерных возмущений пристеночного течения в области, предшествующей зоне ламинарно-турбулентного перехода. Предполагается, что основное течение двумерно и представляет собой пограничный слой, искаженный периодической по времени и продольной координате волной конечной амплитуды. Задача сводится к исследованию решений линеаризованного уравнения Бенджамин – Оно, описывающего вторичные возмущения периодической волны Бенджамин. Полученные явные выражения для структуры возмущений свидетельствуют о нейтральной устойчивости изучаемого основного течения по отношению к двумерным возмущениям. На базе проведенного анализа устойчивости периодической волны построено точное решение задачи о прохождении волны Толлмина – Шлихтинга через область, возмущенную уединенной волной Бенджамин.

1. Введение. Согласно гипотезе Ландау – Хопфа [1], процесс ламинарно-турбулентного перехода в вязких течениях представляет собой последовательность бифуркаций, каждая из которых – следствие потери устойчивости промежуточного состояния течения, соответствующего некоторому периодическому движению жидкости. Именно по такому сценарию развивается переход субгармонического и клевановского типов [2]: сначала стационарное течение в пограничном слое теряет устойчивость по отношению к моде Толлмина – Шлихтинга, затем при достижении пульсациями некоторой пороговой амплитуды происходит новая дестабилизация результирующего периодического движения, и рост вторичных возмущений приводит к быстрому разрушению ламинарного течения.

Детальный анализ описанных процессов чрезвычайно сложен, поэтому для теоретического исследования ламинарно-турбулентного перехода обычно прибегают к прямому численному моделированию – вычислению решения смешанной краевой задачи для полной системы уравнений Навье – Стокса с помощью конечно-разностных методов. При этом полученные результаты нуждаются в трактовке подобно результатам экспериментального исследования.

В этой связи особую роль приобретают асимптотические модели, приближенно описывающие нестационарные движения жидкости в предпереходной области (где число Рейнольдса достаточно велико). Их применение позволяет существенно упростить систему уравнений, сохранив при этом количественно верное описание основных характеристик волнового движения в области перехода (закона дисперсии, нелинейности и т.п.).

Рассмотрим дозвуковое двумерное ламинарное течение вязкого газа в пограничном слое. Введем обозначения для локальных значений размерных параметров течения: δ^0 – характерной толщины пограничного слоя, u^0 – скорости потока на его внешней границе. Число Рейнольдса $R = u^0 \delta^0 / \nu^0$ будем предполагать бесконечно большим (ν^0 – характерная величина кинематического коэффициента вязкости). При первичной потере устойчивости стационарным течением возмущение испытывает параметричес-

кое усиление на участке, соответствующем окрестности нижней ветви нейтральной кривой; при дальнейшей эволюции возмущения точка, соответствующая параметрам волны, удаляется от нижней ветви, перемещаясь в область меньших длин волн и больших чисел R . В этой области характерная длина волны λ° удовлетворяет неравенству

$$1 \ll \lambda^\circ / \delta^\circ \ll R^{1/4}$$

(правая граница рассматриваемого промежутка соответствует окрестности нижней ветви кривой нейтральной устойчивости [3]), а характерный масштаб времени τ° нестационарных возмущений определяется соотношением $\tau^\circ u^\circ / \delta^\circ = (\lambda^\circ / \delta^\circ)^2$.

Было показано [4], что возмущения, характеризуемые такими масштабами времени и длины, имеют четырехслойную структуру. В главном приближении они сопровождаются локальными смещениями профилей скорости и плотности в нормальном к обтекаемой поверхности направлении на величину порядка $\Delta^\circ = \delta^{\circ 2} / \lambda^\circ$.

Используя масштабы τ° , λ° , Δ° , введем безразмерные независимые переменные t (время) и x (продольную координату), а также безразмерную величину A , характеризующую взятую с обратным знаком локальную толщину вытеснения. В случае двумерных возмущений [4] функция $A(t, x)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению Бенджамина – Оно

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A(t, \xi) / \partial \xi^2}{\xi - x} d\xi \quad (1.1)$$

впервые полученному [5] при описании нелинейной эволюции внутренних волн в стратифицированной жидкости бесконечной глубины. Несобственный интеграл в правой части этого уравнения понимается в смысле главного значения.

В случае малых колебаний

$$A = \epsilon \exp(ikx - i\omega t) + \text{с.с.} + O(\epsilon^2)$$

уравнение (1.1) дает дисперсионное соотношение

$$\omega = k|k| \quad (1.2)$$

которое хорошо аппроксимирует зависимость частоты ω волны Толлмина – Шлихтинга от волнового числа k , вычисленную по схеме классической теории устойчивости параллельных течений для значений R , соответствующих началу процесса ламинарно-турбулентного перехода (см. [6]). Более того, точное периодическое решение нелинейного уравнения (1.1) (волна Бенджамина [5]) отлично описывает наблюдаемую в эксперименте форму пульсаций, вносимых в поток волной Толлмина – Шлихтинга конечной амплитуды на предпереходном участке пограничного слоя [7]. Указанные обстоятельства оправдывают применение четырехпалубной асимптотической схемы [4, 8] к описанию нелинейных процессов в зоне ламинарно-турбулентного перехода.

В данной работе изучается структура малых двумерных возмущений, распространяющихся на фоне волн конечной амплитуды [5]. Результаты исследования кратко изложены ранее [9].

2. Вторичные возмущения периодической волны. Рассмотрим сначала задачу о двумерных возмущениях периодической волны Бенджамина. Решение уравнения (1.1) будем искать в виде разложения

$$A = A_0 + \epsilon A_1 + O(\epsilon^2)$$

Уравнение (1.1) инвариантно относительно замены $x - ct \rightarrow x$, $A - c \rightarrow A$. В связи с этим будем исследовать возмущенное течение в системе отсчета, движущейся со скоростью основной волны. В этом случае функция $A_0(x)$ удовлетворяет стационарному аналогу уравнения (1.1)

$$A_0 \frac{dA_0}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 A_0 / d\xi^2}{\xi - x} d\xi$$

Было построено 2π -периодическое решение этого уравнения [5]

$$A_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{inx}; \quad b_0 = \frac{3q^2 - 1}{1 - q^2}, \quad b_n = -2q^{|n|} \quad (n \neq 0), \quad 0 \leq q < 1 \quad (2.1)$$

Суммирование ряда (2.1) дает другую форму решения

$$A_0 = \frac{1 + q^2}{1 - q^2} - 2 \frac{1 - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos x} \quad (2.2)$$

Функция $A_1(t, x)$ удовлетворяет линеаризованному уравнению (1.1)

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + A_0 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{dA_0}{dx} A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 A_1 / \partial \xi^2}{\xi - x} d\xi \quad (2.3)$$

однородному по t , с коэффициентами, 2π -периодическими по x . В связи с этим будем искать вторичные возмущения волны (2.2) в классе функций

$$A_1 = \Phi_\alpha(x) \exp(i\alpha x - i\omega_\alpha t) + \text{c.c.}, \quad \Phi_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx} \quad (2.4)$$

где $\alpha \in [0, 1)$ – действительный параметр, ω_α и Φ_α – комплексные частота и собственная функция, подлежащие определению.

Подстановка выражений (2.1), (2.4) в уравнение (2.3) приводит к линейной алгебраической системе для коэффициентов Фурье возмущения

$$-\omega_\alpha a_n + (\alpha + n) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} b_{n-l} a_l = (\alpha + n) |\alpha + n| a_n$$

Придадим системе стандартный вид задачи на собственные значения

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_{nl} a_l = \omega_\alpha a_n; \quad A_{nl} = (\alpha + n) \left[\left[|\alpha + n| + \frac{1 + q^2}{1 - q^2} \right] \delta_{nl} - 2q^{|n-l|} \right] \quad (2.5)$$

Здесь A_{nl} – бесконечномерная матрица ($-\infty < n, l < +\infty$), δ_{nl} – символ Кронеккера.

На начальном этапе исследования решение задачи (2.5) строилось с помощью численных методов. Для этого бесконечномерная задача аппроксимировалась “усеченной” конечномерной задачей замены бесконечных пределов суммирования конечными ($-N < n, l < N$, $N \sim 100$); решение последней рассчитывалось с использованием стандартной подпрограммы библиотеки IMSL. Анализ результатов расчета позволил установить общий вид линейно независимых решений задачи (2.5) (верхним индексом $m \in (-\infty, +\infty)$ обозначен номер решения)

$$a_n^{(m)} = c_n^{(m)} \frac{\alpha + n}{\alpha + m} q^{|n-m|} \quad (2.6)$$

и выявил разделение множества решений задачи (2.5) на два класса.

Первый класс содержит два решения (будем присваивать им номера $m = 0, -1$). Все коэффициенты Фурье этих решений отличны от нуля, а соответствующие распределения величин вспомогательных коэффициентов $c_n^{(0)}, c_n^{(-1)}$ имеют вид “ступени”

$$c_n^{(0)} = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ c^{(0)}, & n < 0 \end{cases}; \quad c_n^{(-1)} = \begin{cases} c^{(-1)}, & n > -1 \\ 1, & n \leq -1 \end{cases}$$

Второй класс состоит из бесконечного множества решений, обладающих следующим свойством: коэффициенты Фурье у решений с номерами $m \geq 1$ равны нулю при $n < m - 1$, а у решений с номерами $m \leq -2$ равны нулю коэффициенты при $n > m + 1$. Представление коэффициентов Фурье в виде (2.6) предельно упрощает задачу нахождения точных решений этого класса: численное решение показывает, что все не равные нулю вспомогательные коэффициенты $c_n^{(m)}$, за исключением одного, равны между собой

$$m \geq 1: c_n^{(m)} = \begin{cases} 1, & n \geq m \\ c^{(m)}, & n = m - 1 \\ 0, & n < m - 1 \end{cases}; \quad m \leq -2: c_n^{(m)} = \begin{cases} 0, & n > m + 1 \\ c^{(m)}, & n = m + 1 \\ 1, & n \leq m \end{cases}$$

Подстановка равенств (2.6) в уравнения (2.5) позволяет получить явные зависимости величин $c^{(m)}, \omega_\alpha^{(m)}$ от параметров q, α

$$c^{(m)} = \frac{1 + (\alpha - 1 + m)(1 - q^2)}{(\alpha - 1 + m)(1 - q^2)^2}, \quad \omega_\alpha^{(m)} = (\alpha - 1 + m)^2 + \frac{1 + q^2}{1 - q^2}(\alpha - 1 + m), \quad m \geq 1$$

$$c^{(0)} = \frac{1}{1 - \alpha(1 - q^2)}, \quad \omega_\alpha^{(0)} = \alpha^2 - \alpha$$

$$c^{(-1)} = \frac{1}{1 + (\alpha - 1)(1 - q^2)}, \quad \omega_\alpha^{(-1)} = -(\alpha - 1)^2 - (\alpha - 1)$$

$$c^{(m)} = \frac{1 - (\alpha + 1 + m)(1 - q^2)}{(\alpha + 1 + m)(1 - q^2)^2}, \quad \omega_\alpha^{(m)} = -(\alpha + 1 + m)^2 + \frac{1 + q^2}{1 - q^2}(\alpha + 1 + m), \quad m \leq -2$$

Таким образом, рассматриваемое основное периодическое движение нейтрально устойчиво по отношению к двумерным вторичным возмущениям, поскольку все собственные частоты удовлетворяют равенству $\text{Im } \omega_\alpha^{(m)} = 0$. Суммирование соответствующих рядов Фурье дает точные выражения для собственных функций $\Phi_\alpha^{(m)}$, которые ради краткости не приводятся.

Отметим, что построенные решения обладают свойством симметрии (черта сверху означает комплексное сопряжение):

$$\Phi_\alpha^{(m)} \exp(i\alpha x - i\omega_\alpha^{(m)} t) = \overline{\Phi_{1-\alpha}^{(-m-1)} \exp[i(1-\alpha)x - i\omega_{1-\alpha}^{(-m-1)} t]}$$

Это свойство – скрытое следствие того факта, что каждому комплексному решению A_1 уравнения (2.3) соответствует решение $\overline{A_1}$: решение с номером $m < 0$ по сути являет-

ся комплексным сопряжением решения с номером $m' = -m - 1 \geq 0$, записанным в форме (2.4) (с параметром $\alpha' = 1 - \alpha$, удовлетворяющим неравенству $0 \leq \alpha' < 1$).

В рамках асимптотической модели рассматриваемая область течения не ограничена в продольном направлении ($-\infty < x < +\infty$), поэтому дискретность спектра носит искусственный характер и порождена упомянутым ограничением, налагаемым на параметр α . В самом деле, замена $\alpha \rightarrow \alpha + 1$ в решении с номером $m \geq 1$ переводит его в решение с номером $m + 1$, причем

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} (\Phi_{\alpha}^{(m)} e^{i\alpha x}) = \Phi_0^{(m+1)}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \omega_{\alpha}^{(m)} = \omega_0^{(m+1)}$$

Отсюда следует, что моды с номерами $m \geq 1$ описывают одно и то же вторичное возмущение с непрерывно изменяющимся волновым числом $k = \alpha + m > 1$, частотой $\omega^{(+)}$ и собственной функцией $\Phi^{(+)}$

$$A_1 = \Phi^{(+)}(x) \exp(ikx - i\omega^{(+)}t) + \text{с.с.} \quad (2.7)$$

$$\Phi^{(+)} = \frac{k - (k-1)qe^{ix}}{k(1 - qe^{ix})^2} - \frac{k - (k-1)q^2}{k(1 - q^2)^2} qe^{-ix}, \quad \omega^{(+)} = (k-1)^2 + \frac{1+q^2}{1-q^2}(k-1)$$

Соответственно мода с номером $m = 0$ представляет собой вторичное возмущение с волновым числом $k = \alpha < 1$

$$A_1 = \Phi^{(-)}(x) \exp(ikx - i\omega^{(-)}t) + \text{с.с.}$$

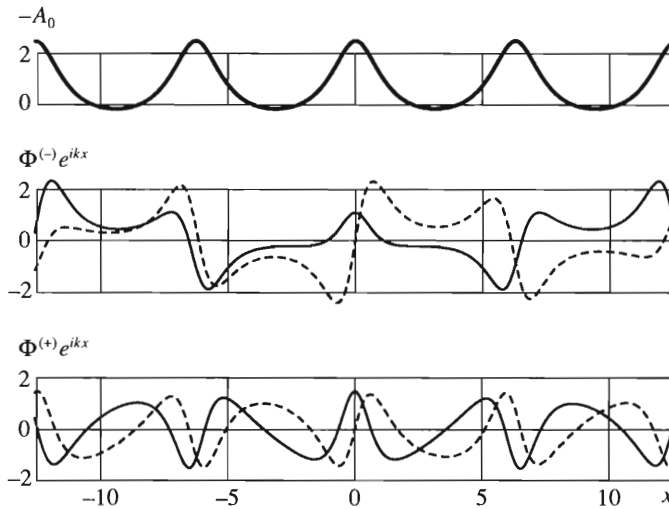
$$\Phi^{(-)} = \frac{k - (k-1)qe^{ix}}{k(1 - qe^{ix})^2} - \frac{k - 1 - kqe^{-ix}}{k(k-1 - kq^2)(1 - qe^{-ix})^2} qe^{-ix}, \quad \omega^{(-)} = k^2 - k$$

При $q \rightarrow 0$ возмущения обоих типов приобретают синусоидальную форму, их дисперсионные соотношения в неподвижной системе отсчета стремятся к виду (1.2). При $k \rightarrow 1$ и фиксированном q скорости распространения возмущений стремятся к одному пределу, равному скорости основной волны; тем не менее соответствующие формы колебаний не переходят одна в другую:

$$\lim_{k \rightarrow 1-0} (\Phi^{(-)} e^{ikx}) = \frac{i}{2q} \frac{dA_0}{dx}, \quad \lim_{k \rightarrow 1+0} (\Phi^{(+)} e^{ikx}) = \frac{1}{4} \left(\frac{i}{q} \frac{dA_0}{dx} - \frac{\partial A_0}{\partial q} \right)$$

Примеры расчетов формы вторичных возмущений разной характерной длины волны проиллюстрированы на фиг. 1. В верхней части показано продольное распределение толщины вытеснения, производимое в пограничном слое основной волной при $q = 0.3$; распределения комплексных амплитуд вторичных возмущений такой волны для двух значений волнового числа $k = 0.6, 1.4$ показаны в средней и нижней частях соответственно. Действительная часть комплексной амплитуды (сплошная линия) описывает форму возмущения в начальный момент времени, а мнимая часть (штриховая линия) — спустя четверть периода колебаний.

3. Взаимодействие волны малой амплитуды с солитоном. С помощью полученных результатов построим класс точных решений линеаризованного уравнения (2.3), описывающих двумерные вторичные возмущения уединенной волны Бенджамина. Для этого укажем простое свойство уравнения Бенджамина — Оно: если функция $A(t, x)$ — решение уравнения (1.1), то ему удовлетворяет и функция $aA(a^2t, ax)$ при произвольном



Фиг. 1

$a > 0$. Таким образом, наряду с построенными в разд. 2 решениями у уравнения (1.1) существует решение

$$A = \frac{1}{k} A_0 \left(\frac{x}{k} \right) - \frac{4\epsilon}{\kappa(\kappa + 2)k} A_1 \left(\frac{t}{k^2}, \frac{x}{k} \right) + O(\epsilon^2) \quad (3.1)$$

где функции $A_0(x)$ и $A_1(t, x)$ заданы соотношениями (2.2), (2.7), а амплитудный параметр определен равенством $q = 1 - (\kappa k)^{-1}$, $\kappa > 0$.

Совершим в разложении (3.1) предельный переход $k \rightarrow \infty$ и перейдем в систему отсчета, покоящуюся относительно обтекаемой поверхности. В результате равенство (3.1) перейдет в двучленное разложение

$$A = A'_0 + \epsilon A'_1 + O(\epsilon^2)$$

представляющее собой новое решение уравнения (1.1), выписанное в линейном приближении. В этом разложении первое слагаемое соответствует солитонному решению Бенджамина [5]; оно описывает двумерную уединенную волну конечной амплитуды, распространяющуюся со скоростью к против потока

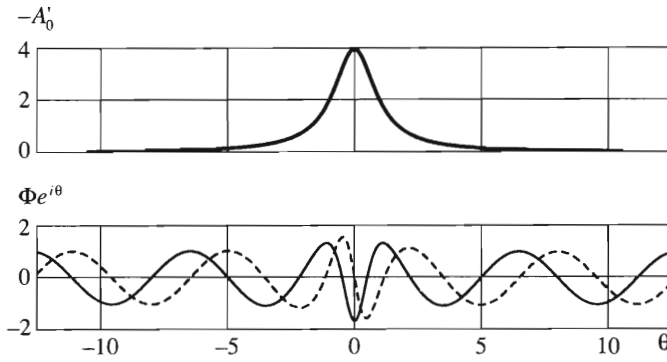
$$A'_0 = -\frac{4\kappa}{1 + \kappa^2 \theta^2}, \quad \theta = x + \kappa t \quad (3.2)$$

Функция второго приближения удовлетворяет линейному уравнению (2.3) (коэффициенты вычислены с использованием равенства (3.2)); она соответствует вторичному возмущению частоты $\omega = 1$

$$A'_1 = \Phi(\theta) \exp(ix - it) + \text{c.c.}, \quad \Phi = \left(\kappa\theta + i \frac{3\kappa + 2}{\kappa + 2} \right) \frac{\kappa\theta - i}{(\kappa\theta + i)^2} \quad (3.3)$$

Собственная функция $\Phi(\theta)$ удовлетворяет условию $\Phi \rightarrow 1$ при $\theta \rightarrow \pm\infty$, поэтому вверх и вниз по потоку от основной волны возмущение имеет вид волны Толлмина – Шлихтинга одинаковой амплитуды

$$A'_1 \sim \exp(ix - it) + \text{c.c.}, \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (3.4)$$



Фиг. 2

Таким образом, возмущение (3.3) описывает процесс прохождения прямой волны Толлмина – Шлихтинга малой амплитуды с частотой $\omega = 1$ через область пограничного слоя, возмущенную двумерной уединенной волной конечной амплитуды. Решение, соответствующее случаю $\omega \neq 1$, может быть получено из формул (3.2)–(3.4) подстановкой

$$t \rightarrow \omega t, \quad x \rightarrow \sqrt{\omega} x, \quad A_0' \rightarrow A_0' / \sqrt{\omega}, \quad \kappa \rightarrow \kappa / \sqrt{\omega}$$

Соотношение (3.4) показывает, что в рамках рассматриваемой модели волна Толлмина – Шлихтинга при прохождении через область солитона не испытывает результирующего изменения амплитуды и фазы.

Описанный процесс проиллюстрирован на фиг. 2 для случая $\kappa = 1$, $\omega = 1$; в верхней части показана форма солитона, в нижней – действительная и мнимая компоненты комплексной амплитуды вторичного возмущения (3.3) (соответственно сплошная и штриховая линии). Как показывает анализ, амплитуда вторичного возмущения – четная функция фазовой переменной θ и при любых κ и ω она монотонно возрастает на промежутке $-\infty < \theta < 0$, достигая наибольшего значения в центре солитона:

$$|\Phi(0)| = \frac{3\kappa + 2\sqrt{\omega}}{\kappa + 2\sqrt{\omega}}$$

В случае коротковолнового возмущения ($\sqrt{\omega} \gg \kappa$) волна практически не испытывает усиления. Максимальный коэффициент усиления равен 3 и имеет место в случае, когда длина волны Толлмина – Шлихтинга велика по сравнению с характерным продольным размером солитона ($\sqrt{\omega} \ll \kappa$).

В заключение заметим, что все полученные результаты могут быть отнесены и к двумерным длинноволновым движениям стратифицированной жидкости большой глубины, поскольку они управляются тем же уравнением (1.1). Для описания вторичной неустойчивости по-видимому необходимо изучить эволюцию возмущений, синусоидально модулированных в поперечном направлении, поскольку, как известно [2], наиболее быстро растущие моды в области перехода имеют существенно трехмерный характер. Для исследования таких возмущений в рамках рассматриваемой асимптотической модели необходимо использовать систему уравнений [8], которая в случае трехмерных возмущений требует численного интегрирования по вертикальной переменной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00632) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1984.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 151 с.
3. Lin C.C. On the stability of two-dimensional parallel flows. Pt. 3. Stability in viscous fluid // *Quart. Appl. Math.* 1946. V. 3. № 4. P. 277–301.
4. Жук В.И., Рыжов О.С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // *Докл. АН СССР*. 1982. Т. 263. № 1. С. 56–59.
5. Benjamin T.B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29. Pt. 3. P. 559–592.
6. Мануйлович С.В. Волны неустойчивости пространственного типа в пограничном слое при больших числах Рейнольдса // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1987. Т. 18. № 5. С. 35–40.
7. Kachanov Y.S., Ryzhov O.S., Smith F.T. Formation of solitons in transitional boundary layers: theory and experiment // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 251. P. 273–297.
8. Жук В.И., Рыжов О.С. О трехмерных невязких возмущениях, индуцирующих собственный градиент давления в пограничном слое // *Докл. АН СССР* 1989. Т. 301. № 1. С. 52–56.
9. Manuilovich S.V. Interaction between Tollmien-Schlichting wave and strong longitudinal irregularity of boundary-layer flow // *Book of Abstr. 4th EUROMECH Fluid Mech. Conf. Eindhoven, Netherlands*, 2000. P. 254.

Москва
e-mail: manu@recp.aerocentr.msk.ru

Поступила в редакцию
22.X.2004