УДК 532.5

© 2005 г. С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, А. И. Шафаревич

УСЛОВИЯ КОШИ–РИМАНА И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Сингулярные решения с алгебраической особенностью типа "квадратного корня" двумерных уравнений теории мелкой воды, изучавшиеся ранее [1–4], распространяются вдоль траекторий внешнего поля скоростей, на которых это поле удовлетворяет условиям Коши – Римана. Другими словами, дифференциал фазового потока на такой траектории пропорционален ортогональному оператору. Оказывается, в линейном приближении это обстоятельство тесно связано с эффектом "расплывания" решений гидродинамических уравнений (ср. с [5, 6]); именно, локализованное асимптотическое решение задачи Коши для линеаризованных уравнений теории мелкой воды сохраняет свою форму (т.е. не расплывается) тогда и только тогда, когда на траектории внешнего потока, вдоль которого распространяется возмущение, выполнены условия Коши – Римана.

1. Построение локализованных решений линеаризованных уравнений теории мелкой воды. Пусть $V(x, t)$ – гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^2$, гладко зависящего от времени t, а $\eta_0(x, t)$ – гладкая скалярная функция; уравнения теории мелкой воды в приближении β-плоскости, линеаризованные на поле скоростей V и геопотенциале η_0, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (V, \nabla)u + (u, \nabla)V + \Omega T u + \nabla\eta = 0, \quad \Omega = \Omega_0 + \beta x_2, \quad T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (V, \nabla)\eta + (u, \nabla)\eta_0 + \eta(\nabla, V) + \eta_0(\nabla, u) = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь Ω – частота Кориолиса на β-плоскости.

Рассмотрим для этой системы уравнений задачу Коши с начальным условием, локализованным в малой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^2$

$$t = 0: u = u^0\left(\frac{x - x_0}{h}\right), \quad \eta = \eta^0\left(\frac{x - x_0}{h}\right), \quad h \to 0 \qquad (1.2)$$

Здесь $u^0(y)$, $\eta^0(y)$ – гладкие функции, достаточно быстро убывающие при $|y| \to \infty$ (для определенности будем считать их шварцевскими), h – малый параметр, характеризующий "локализацию" начальных данных.

Решение задачи (1.1), (1.2) будем искать в виде

$$u(x, t, h) = \upsilon\left(\frac{S(x, t)}{h}, x, t\right) + h\upsilon_1\left(\frac{S(x, t)}{h}, x, t\right) + \ldots$$
$$\eta(x, t, h) = \rho\left(\frac{S(x, t)}{h}, x, t\right) + h\rho_1\left(\frac{S(x, t)}{h}, x, t\right) + \ldots \qquad (1.3)$$

где $S(x, t) = (S_1, S_2)$ – гладкая двумерная вектор-функция, векторные поля $v(y, x, t)$ $v_1(y, x, t)$ и скалярные функции $\rho(y, t)$, $\rho_1(y, t)$ гладко зависят от своих аргументов и убывают при $|y| \to \infty$. Функции S_1, S_2 описывают локализацию асимптотического решения: оно сосредоточено в малой окрестности множества $S = 0$. Потребуем, чтобы это множество при каждом t состояло из одной точки, т.е. будем считать, что вектор-функции S обращается в нуль в одной точке $R(t) \in \mathbb{R}^2$, причем S_1, S_2 задают в окрестности этой точки криволинейные координаты (последнее означает, что векторы ∇S_1, ∇S_2 линейно независимы).

Подставим функции (1.3) в уравнения (1.1) и будем последовательно обращать в нуль коэффициенты при всех степенях малого параметра h. Приравнивая к нулю коэффициент при h^{-1}, получим уравнения

$$(\omega, \nabla_y)v + \frac{\partial S^*}{\partial x}\nabla_y\rho = 0, \quad (\omega, \nabla_y)\rho + \eta_0\left(\frac{\partial S^*}{\partial x}\nabla_y, v\right) = 0; \quad \omega = \frac{\partial S}{\partial t} + (V, \nabla)S \tag{1.4}$$

Здесь ∇_y – градиент по "быстрым" переменным $y = S/h$, $\partial S/\partial x$ – (2×2)-матрица производных вектор-функции S, звездочка означает транспонирование. Сделав в системе (1.4) преобразование Фурье по переменным y, получим

$$(k, \omega)(p, \tilde{v}) + p\tilde{\rho} = 0, \quad (k, \omega)\tilde{\rho} + \eta_0(p, \tilde{v}) = 0 \tag{1.5}$$

$$k = \begin{Vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Vmatrix}, \quad p = \frac{\partial S^*}{\partial x}k = k_1\nabla S_1 + k_2\nabla S_2$$

Здесь k – двойственные переменные к y, тильда означает преобразование Фурье по y.

Лемма 1. Система (1.5) относительно $\tilde{v}$, $\tilde{\rho}$ имеет нетривиальное решение, если $\omega = 0$. Это решение имеет вид

$$\tilde{\rho} = 0, \quad \tilde{v} = n\theta$$

где $n = (-p_2, p_1)$ – вектор, ортогональный p, θ – произвольная скалярная функция.

Доказательство. Умножая первое (векторное) уравнение системы (1.5) на векторы p и n, получим систему из трех уравнений

$$(k, \omega)(p, \tilde{v}) + p^2\tilde{\rho} = 0, \quad (k, \omega)\tilde{\rho} + \eta_0(p, \tilde{v}) = 0, \quad (k, \omega)(\tilde{v}, n) = 0 \tag{1.6}$$

Первые два уравнения образуют линейную однородную систему относительно $\tilde{\rho}\,(p, \tilde{v})$. Эта система имеет нетривиальное решение, только если $(k, \omega)^2 = p^2\eta_0$; последнее равенство не может быть выполнено при сформулированных предположениях относительно вектор-функции S. Действительно, в силу линейной независимости векторов ∇S_1, ∇S_2, вектор p отличен от нуля при $k \neq 0$, т.е. квадратичная форма от k, равная p^2, положительно определена. С другой стороны, квадратичная форма $(k, \omega)^2$ всегда имеет ядро – оно состоит из векторов, ортогональных ω. Таким образом, первые два уравнения системы (1.6) имеют только тривиальные решения. Ненулевое решение последнего (третьего) уравнения существует, если $(k, \omega) = 0$; последнее равенство выполняется при всех k, если и только если $\omega = 0$. В этом случае проекция вектора $\tilde{v}$ на направление n произвольна.

Следствие 1. Решение задачи Коши (1.1), (1.2) имеет вид (1.3), только если начальные данные удовлетворяют соотношениям

$$\eta^0 = 0, \quad (k, \tilde{u}^0) = 0 \tag{1.7}$$

Последнее условие означает, что начальное поле u^0 бездивергентно, т.е. относится к так называемой гидродинамической моде (см. также замечание ниже).

В дальнейшем будем полагать, что начальные данные удовлетворяют условиям (1.7); отметим, что в этом случае

$$\tilde{u}^0 = n_0\theta_0, \quad n_0 = \left\| \begin{matrix} -k_2 \\ k_1 \end{matrix} \right\|$$

$\theta_0(k)$ – скалярная функция.

Следствие 2. Вектор-функция $S(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (V, \nabla)S = 0 \tag{1.8}$$

Сравнивая вид асимптотического решения (1.3) с начальным условием (1.2), получим начальное условие

$$t = 0: S = x - x_0 \tag{1.9}$$

Решение задачи Коши (1.8), (1.9) имеет вид

$$S(x, t) = g_t^{-1}x - x_0$$

где g_t – фазовый поток поля V. Другими словами, $S(x, t) + x_0$ – начальная точка траектории этого поля, пришедшей за время t в точку x.

Замечание. Характеристики уравнений теории мелкой воды делятся на два типа: гидродинамические и акустические. Уравнение гидродинамических характеристик имеет вид (1.8); сами характеристики – траектории поля V. Акустические характеристики описываются уравнением эйконала

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t} + (V, \nabla s)\right)^2 = \eta_0^2(\nabla s)^2$$

Лемма 1 означает, что локализованные решения вида (1.3) распространяются только вдоль гидродинамических характеристик, т.е. акустических мод такого типа не бывает.

Типичное поведение акустических мод с локализованными начальными условиями для произвольных гиперболических уравнений описано ранее [7]. Как правило, такие решения за сколь угодно малое время превращаются в функции, локализованные вблизи множества коразмерности 1 (в рассматриваемом случае – вблизи кривой на плоскости). Таким образом, условия (1.7), выделяя гидродинамическую моду, обеспечивают тем самым локализацию решения вблизи движущейся точки.

Рассмотрим теперь слагаемые порядка h^0, возникающие при подстановке функций (1.3) в уравнения (1.1). Приравнивая к нулю такие слагаемые в первом (векторном) уравнении, получим после преобразования Фурье по переменным y

$$\dot{\tilde{v}} + \frac{\partial V}{\partial x}v + \Omega T\tilde{v} + ip\tilde{\rho}_1 = 0 \tag{1.10}$$

где точкой обозначена производная вдоль траекторий векторного поля V. Ясно, что начальное условие для функции $\tilde{v}$ имеет вид

$$t = 0: \tilde{v} = \tilde{u}^0 = n_0\theta_0(k)$$

Лемма 2. Функция $\tilde{v}$ имеет вид

$$\tilde{v} = n(k)\frac{k^2}{p^2}\theta_0(k)\exp\left(-\int_0^t(\nabla, V)(z, t_1)dt_1\right)\Bigg|_{z = g_t^{-1}x}$$

Доказательство. Лемма 1 утверждает, в частности, что $\tilde{v} = n\theta$; подставим такой вид решения в уравнение (1.10). Умножая получившееся равенство на вектор n, находим

$$n^2\dot{\theta} + (n, \dot{n})\theta + \left(n, \frac{\partial V}{\partial x}n\right)\theta = 0 \tag{1.11}$$

Дифференцируя уравнение (1.8), получим

$$\dot{p} = -\frac{\partial V^*}{\partial x}p$$

Умножая это уравнение на матрицу T поворота на $\pi/2$ и учитывая справедливое для любой (2×2)-матрицы A равенство

$$-TA^*T^{-1} = A - \operatorname{tr}A$$

находим

$$\dot{n} = -T\frac{\partial V^*}{\partial x}T^{-1}n = \frac{\partial V}{\partial x}n - (\nabla, V)n$$

Выражая отсюда $V_x n$, подставляя это выражение в уравнение (1.11) и учитывая, что $n^2 = p^2$, получим

$$\left(\frac{d}{dt} + (\nabla, V)\right)(p^2\theta) = 0$$

откуда немедленно вытекает нужная формула (здесь d/dt – производная вдоль траектории V).

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема. Решение задачи Коши (1.1), (1.2) имеет вид

$$\begin{gathered} u(x, t, h) = \frac{E(t)}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} n(p)\frac{k^2}{p^2}\theta_0(k)\exp\left(i\frac{(k, S)}{h}\right)dk\Big|_{S = g_t^{-1}x - x_0} + w \\ E(t) = \exp\left(-\int\limits_0^t(\nabla, V)dt_1\right) \end{gathered} \tag{1.12}$$

где $|w| \to 0$ при $h \to 0$.

Доказательство состоит в вычислении нескольких поправок к описанной выше старшей части асимптотики и последующей оценке остатка. Для получения такой оценки можно, например, использовать представление разрешающего оператора задачи Коши для уравнений (1.1) в виде асимптотического ряда по гладкости (ср. с [8]).

2. Расплывание локализованного решения и условия Коши – Римана. Заметим, что подынтегральная функция в соотношении (1.12), вообще говоря, негладкая в точке $k = 0$: отношение k^2/p^2 в этой точке разрывно. В результате функция $v(y, x, t)$ убывает при $|y| \to \infty$ как $O(|y|)^2)$, т.е. начальное условие "расплывается". Однако при дополнительных условиях, налагаемых на поле V, это расплывание может исчезнуть.

Утверждение. Старшая часть при $h \to 0$ подынтегральной функции в соотношении (1.12) гладкая тогда и только тогда, когда на траектории $x = g_t x_0$ поля V, выпущенной из точки x_0, выполнены условия Коши – Римана

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial V_2}{\partial x_1}.$$

В этом случае старшая часть асимптотического решения задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$U = \sqrt{E(t)}R(t)u^0\left(\frac{g_t^{-1}x - x_0}{h}\right) \tag{2.1}$$

где

$$R(t) = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi(t) & \sin\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{matrix} \right\|, \quad \varphi(t) = \int_0^t \frac{\partial V_1}{\partial x_2} dt = \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{rot} V dt$$

т.е. решение в точности повторяет форму начального возмущения.

Доказательство. Отметим прежде всего, что, поскольку $v(y, x, t) = O(|y|^{-2})$, "медленную" переменную x в этой функции можно modo(1) заменить на ее значение $g_t x_0$ на траектории, выпущенной из точки x_0; это следует из того, что

$$|x - g_t x_0| = |g_t(S + x_0) - g_t x_0| = O(|S|) = O(h|y|) \text{ при } S \to 0$$

Далее ясно, что подынтегральная функция в соотношении (1.12) гладкая, если и только если $p^2 = k^2\lambda$, где уравнения λ не зависит от k. Поскольку вектор p удовлетворяет уравнениям

$$\dot{p} = -\frac{\partial V^*}{\partial x} p, \quad p(0) = k$$

такое условие означает, что оператор Коши этой системы скалярным множителем отличается от ортогонального, т.е. матрица $(\partial V/\partial x)^*$, а значит, и $\partial V/\partial x$, отличаются от кососимметричной на скалярное слагаемое. Таким образом, в этом случае имеем

$$\partial V/\partial x = \mu I + \nu T$$

где I единичная (2×2)-матрица, откуда

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \mu, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \nu$$

т.е. на траектории $x = g_t x_0$ выполнены условия Коши – Римана. Пусть эти равенства действительно имеют место. Тогда

$$p^2 = \exp\left(-2\int_0^t \mu dt\right) k^2 = E(t)k^2, \quad n(p) = \sqrt{E}(t)R(t)n(k)$$

откуда сразу следует выражение (2.1).

Пример. Эволюция пакета с экспоненциальным профилем. Рассмотрим в качестве простейшего примера начальное поле скоростей вида

$$u^0(y) = \mathcal{D}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad \mathcal{D} = \left\| \begin{matrix} -\partial/\partial y_2 \\ \partial/\partial y_1 \end{matrix} \right\|$$

Если на траектории внешнего потока выполнено условие Коши – Римана, то старшая часть асимптотики решения задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$U = \sqrt{E(t)}R(t)\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y = (g_t^{-1}x - x_0)/h}$$

Если же это условие не выполнено, то

$$U = \frac{iE^2}{2\pi}A(t)\mathcal{D}\int_0^{2\pi} \frac{k^2}{p^2}(\varphi)\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4h^2}\right)D_{-2}\left(\frac{-i\lambda}{h}\right)d\varphi$$

$$\lambda(x, t, \varphi) = (e(\varphi), x - g_t x_0), \quad e(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$D_{-2}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)\int_0^\infty \exp\left(-tr - \frac{r^2}{2}\right) r dr$$

Здесь φ – полярный угол на плоскости переменных k, D_{-2} – функция параболического цилиндра порядка –2, A – оператор Коши системы

$$\dot{z} = \frac{\partial V}{\partial x} z$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00850).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маслов В.П.* Три алгебры, соответствующие негладким решениям квазилинейных гиперболических уравнений // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35. № 2. С. 252–253.
2. *Dobrokhotov S.Yu.* Hugoniot – Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equations // Rus. J. Math. Physics. 1999. Pt. 1. V. 6. № 2. P. 137–173; Pt. 2. V. 6. № 3. P. 282–313.
3. *Доброхотов С.Ю., Брунелло Тироцци.* О свойстве гамильтоновости оборванной цепочки Гюгонио – Маслова для траекторий мезомасштабных вихрей // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 6. С. 741–746.
4. *Доброхотов С.Ю., Семенов Е.В., Брунелло Тироцци.* Цепочки Гюгонио – Маслова для уединенных вихревых решений квазилинейных гиперболических систем и траектории тайфунов // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 2003. Т. 2. С. 5–44.
5. *Доброхотов С.Ю., Шафаревич А.И.* Параметрикс и асимптотика локализованных решений уравнений Навье – Стокса в R^3, линеаризованных на гладком течении // Мат. заметки. 1992. Т. 51. № 1. С. 72–82.
6. *Доброхотов С.Ю., Шафаревич А.И.* О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 4. С. 38–42.
7. *Доброхотов С.Ю., Жевандров П.Н., Маслов В.П., Шафаревич А.И.* Асимптотические быстроубывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами // Мат. заметки. 1991. Т. 49. № 4. С. 31–46.
8. *Маслов В.П.* Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987. 408. 1987.

Москва
e-mail: shafar@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
30.VIII.2004