

УДК 532.526.4

© 2005 г. И. И. Вигдорович

## УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОФИЛИ СКОРОСТИ И РЕЙНОЛЬДСОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ СО ВДУВОМ И ОТСОСОМ

Рассматривается течение несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое на пластине с распределенным вдувом или отсосом. Получены условия замыкания в виде универсальных зависимостей касательного напряжения и других компонент тензора Рейнольдса от градиента осредненной продольной скорости, которые могут быть найдены только на основе данных, известных для течения на непроницаемой пластине. В результате асимптотического решения задачи при больших числах Рейнольдса установлены законы подобия для профилей скорости и турбулентных напряжений, позволяющие вычислить эти величины по данным, известным для непроницаемой пластины.

Хорошо известный анализ течения в турбулентном пограничном слое на непроницаемой пластине, впервые выполненный [1–3] методами теории размерности (см. также [4]), очевидно, существенно ограничен по числу определяющих параметров задачи и при ненулевой поперечной скорости на стенке не дает каких-либо содержательных выводов. В этом случае, однако, может быть установлена универсальная функциональная связь между турбулентным касательным напряжением и градиентом осредненной скорости [5, 6], использование которой вместе с уравнениями движения позволяет решить задачу.

Таким путем были получены [5] правила подобия для скорости и температуры в пристеночной области пограничного слоя, обобщающие логарифмический закон на случай вдува и отсоса на стенке, и рассчитаны параметры асимптотического пограничного слоя с отсосом [6].

Дальнейшее развитие этого метода [5, 6] в настоящей работе позволило аналитически решить задачу для пограничного слоя на пластине при умеренных вдуве или отсосе и получить универсальные представления профилей скорости и компонент тензора Рейнольдса, справедливые всюду вне вязкого подслоя.

Некоторые из приведенных результатов на основе менее общей постановки были получены ранее [7].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в турбулентном пограничном слое на плоской гладкой пластине, обтекаемой равномерным потоком с постоянной по длине пластины скоростью  $U_e$  на внешней границе слоя и постоянной скоростью вдува или отсоса  $v_w$ , направленной по нормали к поверхности. Предположим, что турбулентное течение развивается непосредственно от передней кромки пластины. Уровень турбулентных пульсаций в набегающем потоке будем считать пренебрежимо малым и не оказывающим влияния на течение в пограничном слое.

Градиент осредненной продольной скорости и турбулентное касательное напряжение являются функциями декартовых координат  $x$ ,  $y$  и определяющих параметров задачи:

$$\frac{du}{dy} = F_1(x, y, v, v_w, U_e), \quad \langle u'v' \rangle = F_2(x, y, v, v_w, U_e) \quad (1.1)$$

Здесь  $v$  – коэффициент кинематической вязкости; начало декартовой системы координат – на передней кромке пластины.

Величины, стоящие в левых частях равенств (1.1), в силу эллиптического характера задачи могут зависеть также от дополнительных условий, поставленных ниже по потоку, например, в области, где в случае вдува происходит отрыв пограничного слоя. Далее будет рассматриваться только присоединенный пограничный слой, влияние на который дополнительных параметров пренебрежимо мало.

Введем в рассмотрение толщину пограничного слоя

$$\Delta = F_3(x, v, v_w, U_e) \tag{1.2}$$

как некоторую величину, характеризующую поперечный масштаб течения.

Выразив теперь  $x$  и  $U_e$  из первого уравнения (1.1) и уравнения (1.2) и подставив во второе уравнение (1.1), получим

$$\langle u'v' \rangle = F_4\left(y, v, v_w, \Delta, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Применяя к этому соотношению П-теорему, будем иметь

$$\langle u'v' \rangle = -\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S(R_l, \beta, \eta); \quad R_l = \frac{y^2 \partial u}{v \partial y}, \quad \beta = \frac{v_w}{yR_l} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1}, \quad \eta = \frac{y}{\Delta} \tag{1.3}$$

Локальное число Рейнольдса  $R_l$  равно отношению характерных значений турбулентной и молекулярной вязкости. Как и функции  $F_1, \dots, F_4$ , функция  $S$  универсальна для рассматриваемого класса течений, зависящих от трех параметров  $v, v_w, U_e$ . Предположим, что она непрерывна при  $0 \leq R_l \leq \infty, -\infty \leq \beta \leq \infty, 0 \leq \eta < \infty$ , дифференцируема внутри этой области и удовлетворяет условию  $S(\infty, 0, 0) \neq 0$ . Как было показано [5], последнее неравенство есть условие существования логарифмического профиля скорости в пограничном слое на непроницаемой пластине.

Соотношение (1.3) представляет собой выражение касательного напряжения через градиент осредненной скорости. Поскольку влияние скорости вдува или отсоса на эту зависимость по мере удаления от стенки должно убывать, параметр  $\beta$  выбран так, что в знаменателе стоит локальное число Рейнольдса  $R_l$ .

Для нормальных турбулентных напряжений аналогичным образом получим

$$\langle u'^2 \rangle = \left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S_1(R_l, \beta, \eta), \quad \langle v'^2 \rangle = \left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S_2(R_l, \beta, \eta), \quad \langle w'^2 \rangle = \left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 S_3(R_l, \beta, \eta) \tag{1.4}$$

Здесь  $S_1, S_2, S_3$  – некоторые универсальные функции. Однако условие непрерывности можно поставить только для функции  $S_2$ , описывающей поведение компоненты тензора Рейнольдса, связанной с поперечными пульсациями скорости. Согласно теоретическим представлениям [8, 9], которые подтверждаются данными измерений, эта компонента ведет себя у стенки аналогично касательному напряжению. Таким образом, величина

$$S_2(\infty, 0, 0) = (\kappa/\sigma_2)^2 \tag{1.5}$$

существует и не равна нулю. Здесь  $\kappa = 0.41$  – постоянная Кармана, по экспериментальным данным постоянная  $\sigma_2 = 0.95$  [4].

Поведение компонент  $\langle u'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle$ , связанных с пульсациями скорости в направлениях, параллельных стенке, имеет более сложный характер, согласно которому

$$S_1(\infty, 0, \eta) = -A_1 \kappa^2 \ln \eta + O(1), \quad S_3(\infty, 0, \eta) = -A_3 \kappa^2 \ln \eta + O(1), \quad \eta \rightarrow 0 \tag{1.6}$$

где  $A_1, A_3$  – универсальные постоянные. По экспериментальным и расчетным данным [10, 11]  $A_1 = 1.1, A_3 = 0.36$ .

Условия для функций  $S, S_1, S_2, S_3$  сформулированы на основе следующих физических предположений [8, 9]: вязкость существенна лишь в тонкой пристеночной области (вязком подслое), а внешний масштаб (толщина пограничного слоя) не влияет на поведение вблизи стенки компонент  $\langle u'v' \rangle$  и  $\langle v'^2 \rangle$ , но в силу существенной анизотропии пристенных вихрей сохраняет свое влияние на компоненты  $\langle u'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle$ .

В рассматриваемой задаче функция тока осредненного течения  $\psi(x, y)$  удовлетворяет уравнению пограничного слоя с нулевым градиентом давления

$$\begin{aligned} \Psi_y \Psi_{xy} - \Psi_x \Psi_{yy} &= (v \Psi_{yy} - \langle u'v' \rangle)_y \\ x > 0, \quad y = 0: \quad \Psi_y &= 0, \quad \Psi_x = -v_w; \quad y \rightarrow \infty: \quad \Psi_y \rightarrow U_e, \quad \langle u'v' \rangle \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Перейдем в задаче (1.7) к новым переменным по формулам [12]

$$\psi = U_e \Delta \Psi(\xi, \eta), \quad \Lambda(\xi) = \frac{dR_\Delta}{dR_x}, \quad \xi = \ln R_\Delta, \quad \eta = \frac{y}{\Delta}, \quad R_x = \frac{U_e x}{v}, \quad R_\Delta = \frac{U_e \Delta}{v} \quad (1.8)$$

В качестве независимых переменных  $\xi$  и  $\eta$  выбраны логарифм числа Рейнольдса, образованного по толщине пограничного слоя, и относительное расстояние до стенки. Кроме безразмерной функции тока  $\Psi(\xi, \eta)$  введена вторая неизвестная функция  $\Lambda(\xi)$ , имеющая физический смысл скорости продольного изменения поперечного масштаба  $\Delta$ . Для функций  $\Psi(\xi, \eta)$  и  $\Lambda(\xi)$  с учетом соотношения (1.3) получим

$$\Lambda[\Psi_\eta \Psi_{\xi\eta} - \Psi_{\eta\eta}(\Psi + \Psi_\xi)] = [(\eta \Psi_{\eta\eta})^2 S(R_l, \beta, \eta) + e^{-\xi} \Psi_{\eta\eta}]_\eta \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} R_l &= e^\xi \eta^2 \Psi_{\eta\eta}, \quad \beta = B(\eta R_l \Psi_{\eta\eta})^{-1}, \quad B = \frac{v_w}{U_e} \\ \xi > -\infty, \quad \eta = 0: \quad \Psi_\eta &= 0, \quad \Lambda(\Psi + \Psi_\xi) = -B \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad \Psi_\eta \rightarrow 1, \quad \eta \Psi_{\eta\eta} \sqrt{S(R_l, \beta, \eta)} \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

Соотношения (1.10) задают условия на пластине, (1.11) – на внешней границе пограничного слоя. С учетом порядка дифференциального уравнения на внешней границе поставлено два условия – для скорости и касательного напряжения.

Будем искать асимптотическое представление решения задачи (1.9)–(1.11) при  $\xi \rightarrow \infty$ . Введем малый параметр  $\varepsilon$  и новую независимую переменную  $\zeta = \varepsilon \xi$ ,  $1/\zeta = O(1)$ . Таким образом, малый параметр в настоящей задаче – величина, обратная логарифму числа Рейнольдса, образованного по характерному поперечному масштабу течения.

Скорость вдува или отсоса на стенке зададим в виде

$$B = \varepsilon^2 b, \quad b = O(1) \quad (1.12)$$

т.е. будем предполагать квадратичный по параметру  $\varepsilon$  порядок малости величины поперечной скорости на стенке.

Асимптотические разложения решения по малому параметру  $\varepsilon$  будут иметь различный вид для различных характерных областей течения. В направлении, перпендикулярном стенке, возникают две такие области: внешняя область, где молекулярной вязкостью в уравнении пограничного слоя можно пренебречь, а характерный масштаб – толщина пограничного слоя, и пристеночная область, характерный масштаб которой определяется из условия равенства по порядку величин турбулентных и вязких напряжений.

**2. Пристеночная область пограничного слоя.** Введем переменные (переменные стенки)

$$y_+ = \frac{yU_e\varphi}{\nu}, \quad u_+ = \frac{\Psi_y}{U_e\varphi}, \quad v_+ = \frac{v_w}{U_e\varphi}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{c_f}{2}} \quad (2.1)$$

где  $c_f$  – коэффициент трения на пластине. Проинтегрируем уравнение (1.9) поперек слоя и перейдем к независимым переменным  $\xi$  и  $y_+$ . Для функции  $u_+(\xi, y_+)$  получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left(y_+ \frac{\partial u_+}{\partial y_+}\right)^2 S\left(R_l, \beta, \frac{y_+}{\varphi} e^{-\xi}\right) + \frac{\partial u_+}{\partial y_+} - 1 - v_+ u_+ = \\ & = \frac{\Lambda e^{-\xi}}{\varphi} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} \int_0^{y_+} u_+^2 dy_+ + \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{y_+} u_+^2 dy_+ - u_+ \int_0^{y_+} \frac{\partial u_+}{\partial \xi} dy_+ \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$R_l = y_+^2 \frac{\partial u_+}{\partial y_+}, \quad \beta = \frac{v_+}{y_+ R_l} \left(\frac{\partial u_+}{\partial y_+}\right)^{-1}$$

Предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $1/\zeta = O(1)$ ,  $y_+ = O(1)$  дает для первого члена разложения  $U_+(y_+)$  функции  $u_+(\xi, y_+)$  обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\left(y_+ \frac{\partial U_+}{\partial y_+}\right)^2 S(R_l, \beta, 0) + \frac{dU_+}{dy_+} = 1 + v_+ U_+, \quad U_+(0) = 0 \quad (2.3)$$

$$R_l = y_+^2 \frac{dU_+}{dy_+}, \quad \beta = \frac{v_+}{y_+ R_l} \left(\frac{\partial U_+}{\partial y_+}\right)^{-1}$$

Асимптотика решения уравнения (2.3) во внешней части пристеночной области, т.е. вне вязкого подслоя, имеет вид [5]

$$\frac{2}{y_+} (\sqrt{1 + v_+ U_+} - 1) = \frac{1}{\kappa} [\ln y_+ + C(v_+)] + O(y_+^{-\alpha}), \quad y_+ \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0 \quad (2.4)$$

Роль постоянной Кармана  $\kappa$  играет величина  $\sqrt{S(\infty, 0, 0)}$ ,  $C(v_+)$  – некоторая функция, причем  $C(v_+) = C_0 + O(v_+)$  при  $v_+ \rightarrow 0$ , где  $C_0$  – вторая постоянная в логарифмическом законе для профиля скорости у непроницаемой стенки [5]. По экспериментальным данным  $C_0 = 2.05$ .

Качественное поведение решения рассматриваемой задачи зависит от соотношения между касательным напряжением на стенке и во внешней области пограничного слоя. Можно выделить три характерных режима течения: умеренные вдув и отсос, когда касательное напряжение имеет один порядок величины во внешней и пристеночной областях; сильный околоскритический вдув, при котором напряжение трения на стенке много меньше, чем во внешней области; сильный отсос, при котором трение на стенке, наоборот, много больше, чем во внешней области пограничного слоя. Далее рассматривается первый режим течения. В этом случае все эмпирические постоянные и функции, входящие в решение, могут быть определены из экспериментальных данных для непроницаемой пластины. Ранее исследовались сильный вдув [13] и сильный отсос [14, 15].

**3. Внешняя область пограничного слоя.** Функция  $\Lambda(\xi)$ , задающая скорость продольного изменения толщины пограничного слоя – малая величина. Поэтому в первом приближении левую часть уравнения (1.9) можно положить равной нулю, откуда с учетом условий на внешней границе следует, что продольная скорость постоянна поперек слоя. Возмущение этой постоянной величины в следующем приближении имеет порядок  $\Lambda(\xi)$ .

Таким образом, во внешней области пограничного слоя, где  $1/\eta = O(1)$ , решение задачи (1.9), (1.10) будем искать в виде

$$\Lambda(\xi) = \varepsilon \lambda_1(\zeta) + \varepsilon^2 \ln \varepsilon \lambda_2(\zeta) + O(\varepsilon^2) \quad (3.1)$$

$$\Psi(\xi, \eta) = \Psi_w(\xi) + \eta + \Lambda(\xi) f(\zeta, \eta) + O(\varepsilon^2) \quad (3.2)$$

Положим  $f(\zeta, 0) = 0$ , тогда  $\Psi_w(\xi)$  – значение функции тока на стенке. Из второго условия на стенке (1.10) в силу соотношений (1.12), (3.1) следует, что

$$\Psi_w(\xi) + \frac{d\Psi_w(\xi)}{d\xi} = O(\varepsilon) \quad (3.3)$$

Подстановка разложений (3.1), (3.2) при учете соотношения (3.3) в уравнение (1.9) и предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $1/\zeta = O(1)$ ,  $1/\eta = O(1)$  дают для определения функции  $f(\zeta, \eta)$  краевую задачу (далее введено обозначение  $T(\eta) = \sqrt{S(\infty, 0, \eta)}$ )

$$[(\eta f_{\eta\eta} T)^2]_{\eta} + \eta f_{\eta\eta} = 0; \quad f(\zeta, 0) = f_{\eta}(\zeta, \infty) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta f_{\eta\eta} T \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

которая позволяет заключить, что функция  $f(\zeta, \eta)$  может быть выбрана не зависящей от переменной  $\zeta$ . Кроме того, при заданном порядке величины поперечной скорости на стенке решение краевой задачи (3.4) имеет универсальный характер, поскольку не зависит от условий на обтекаемой поверхности. Иными словами, функция  $f(\eta)$  – одна и та же для случаев вдува, отсоса или непроницаемой пластины.

Интегрирование уравнения (3.4) дает

$$\eta f''' T = D - \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{2T}$$

где  $D$  – постоянная. Отсюда с учетом граничного условия для касательного напряжения будем иметь

$$\eta f''' T = \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta}{2T}$$

и несобственный интеграл в правой части сходится. Таким образом, решение краевой задачи (3.4) имеет вид

$$f'(\eta) = - \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_1}{2\eta_1 T(\eta_1)} \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{d\eta_2}{T(\eta_2)} \quad (3.5)$$

Поскольку  $T(0) = \kappa$ , из (3.5) получим асимптотику решения на стенке

$$f'(\eta) = \frac{F_1}{\kappa} (\ln \eta + A_0 - \ln F_1) + O(\eta^\alpha), \quad \eta \rightarrow 0, \quad F_1 \equiv \sqrt{-f(\infty)} = \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{2T}, \quad \alpha > 0 \quad (3.6)$$

где  $A_0$  – некоторая постоянная.

Заметим, что преобразование (1.8) допускает определенный произвол в выборе толщины пограничного слоя так, что эта величина может не совпадать с поперечным масштабом, входящим в формулировку условия замыкания (1.3). Введем новый поперечный масштаб  $\Delta_\circ = \Delta/\sigma$ , где  $\sigma(\zeta_\circ, \epsilon)$  при соблюдении условия монотонного роста толщины слоя – произвольная функция. Обозначим все величины, определенные при толщине слоя  $\Delta_\circ$ , нижним индексом  $\circ$ . Из (3.5) следуют равенства

$$\eta_\circ = \sigma\eta, \quad f_\circ(\eta_\circ) = \sigma^2 f(\eta) \tag{3.7}$$

согласно которым постоянная  $A_0$  в асимптотическом представлении (3.6) не зависит от способа определения толщины пограничного слоя.

**4. Сращивание решений для внешней и пристеночной областей пограничного слоя.** Решения задач для внешней и пристеночной областей содержат две неизвестные функции:  $\Lambda(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$ , которые могут быть найдены в результате асимптотического сращивания [16]. В соответствии с представлениями (3.1), (3.2) и (1.3) во внешней области пограничного слоя для турбулентного касательного напряжения имеет место оценка

$$\langle u'v' \rangle / U_e^2 \sim \Lambda^2(\xi) = O(\epsilon^2)$$

Рассматривая случай умеренных вдува и отсоса, когда касательное напряжение имеет один порядок величины на стенке во внешней области, коэффициент трения на пластине будем искать в виде

$$\varphi(\xi) = \epsilon t_1(\zeta) + \epsilon^2 \ln \epsilon t_2(\zeta) + \epsilon^2 t_3(\zeta) + \epsilon^3 \ln^2 \epsilon t_4(\zeta) + \epsilon^3 \ln \epsilon t_5(\zeta) + O(\epsilon^3) \tag{4.1}$$

При сращивании будем опираться на соотношение (2.4), справедливое в пристеночной области вне вязкого подслоя, и асимптотическое представление для продольной скорости

$$\Psi_\eta = 1 + \frac{F_1}{K} [\epsilon \lambda_1(\zeta) + \epsilon^2 \ln \epsilon \lambda_2(\zeta)] [\ln \eta + A_0 - \ln F_1 + O(\eta^\alpha)] + O(\epsilon^2) \tag{4.2}$$

полученное из решения для внешней области пограничного слоя при  $\eta \rightarrow 0$  на основе представлений (3.1), (3.2) и асимптотики (3.6). Оба соотношения справедливы в промежуточной зоне, объединяющей две характерные области.

Связь между переменными стенки  $y_+$ ,  $U_+$  и внешними переменными  $\eta$ ,  $\Psi_\eta$ , согласно равенствам (2.1), имеет вид

$$y_+ = \varphi(\xi) e^{\zeta/\epsilon} \eta, \quad U_+ = \frac{\Psi_\eta}{\varphi(\xi)} + O(\epsilon e^{-\zeta/\epsilon}), \quad v_+ = \frac{\epsilon^2 b}{\varphi(\xi)} \tag{4.3}$$

Оценка порядка остаточного члена во второй формуле (4.3) следует из оценки правой части уравнения (2.2) при учете разложений (3.1) и (4.1).

Перейдем в (2.4) от переменных стенки к внешним переменным по формулам (4.3) и при  $1/\zeta = O(1)$ ,  $1/\eta = O(1)$  разложим обе части равенства по малому параметру  $\epsilon$  до членов порядка  $\epsilon \ln \epsilon$  включительно. Продольную скорость выразим с помощью представления (4.2). Вместо коэффициента трения подставим ряд (4.1), причем предположим, что

$$t_1(\zeta) \neq 0, \quad t_1^2(\zeta) + b \neq 0 \tag{4.4}$$

Поскольку в этом случае  $v_+ = O(\epsilon)$ , для входящей в асимптотику (2.4) функции  $C(v_+)$  достаточно использовать оценку  $C(v_+) = C_0 + O(\epsilon)$ . Приравняем подобные члены,

стоящие в правой и левой частях полученного таким образом равенства. В результате для искоемых семи функций  $\lambda_1(\zeta)$ ,  $\lambda_2(\zeta)$ ,  $t_1(\zeta)$ , ...,  $t_5(\zeta)$  будем иметь семь алгебраических уравнений, решение которых есть

$$\begin{aligned} \lambda_1(\zeta) &= \frac{\kappa P(\zeta)}{F_1 \zeta}, \quad \lambda_2(\zeta) = -\frac{\kappa Q(\zeta)}{F_1 \zeta^2}, \quad t_1(\zeta) = \frac{\kappa Q(\zeta)}{\zeta}, \quad t_2(\zeta) = -\frac{\kappa P(\zeta)}{\zeta^2} \\ t_3(\zeta) &= -\frac{\kappa P(\zeta)R(\zeta)}{\zeta^2}, \quad t_4(\zeta) = \frac{\kappa}{\zeta^3}, \quad t_5(\zeta) = \frac{\kappa}{\zeta^3} \left[ \frac{P^2(\zeta)}{Q(\zeta)} + 2R(\zeta) \right] \\ P(\zeta) &= 1 + b \left( \frac{\zeta}{2\kappa} \right)^2, \quad Q(\zeta) = 1 - b \left( \frac{\zeta}{2\kappa} \right)^2, \quad R(\zeta) = \ln \frac{\kappa F_1 Q(\zeta)}{\zeta} - A_0 + C_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Согласно решению (4.5) второе неравенство (4.4) эквивалентно неравенству  $\lambda_1(\zeta) \neq 0$ ; и неравенства (4.4) выражают условия необращения в нуль в главных членах разложения трения на стенке при вдуве и функции  $\Lambda(\xi)$  при отсосе.

Связь между переменной  $\zeta$  и продольной координатой  $x$  определим из соотношений (1.8), (3.1)

$$R_x = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{de^{\xi}}{\Lambda(\xi)} = \frac{e^{\xi/\varepsilon}}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\lambda_1(\zeta)} - \varepsilon \ln \varepsilon \frac{\lambda_2(\zeta)}{\lambda_1^2(\zeta)} + O(\varepsilon) \right) \quad (4.6)$$

Разложения (3.1), (3.2), (4.1), (4.6) при учете выражений для коэффициентов рядов (4.5) дают искомое асимптотическое представление решения при больших значениях  $\ln R_\Delta$ , которое, однако, имеет тот существенный недостаток, что при реальных числах Рейнольдса, определяющих величину малого параметра  $\varepsilon$ , члены асимптотических разложений (3.1), (4.1), (4.6) убывают недостаточно быстро.

Используем отмеченную выше свободу выбора толщины пограничного слоя для преобразования рядов к более удобному виду. Для этого запишем разложения (3.1), (4.1) в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \Lambda(\xi) &= \frac{\varepsilon \kappa P(\zeta)}{F_1 \zeta} - \frac{\varepsilon^2 \kappa Q(\zeta)}{F_1 \zeta^2} [\ln \varepsilon + R(\zeta)] + O(\varepsilon^2) \\ \varphi(\xi) &= \frac{\varepsilon \kappa Q(\zeta)}{\zeta} - \frac{\varepsilon^2 \kappa P(\zeta)}{\zeta^2} [\ln \varepsilon + R(\zeta)] + \frac{\varepsilon^3 \kappa}{\zeta^3} \left[ \ln \varepsilon + R(\zeta) + \frac{P^2(\zeta)}{2Q(\zeta)} \right]^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Разложения (4.7) совпадают с разложениями (3.1), (4.1), в которые подставлены значения коэффициентов (4.5) с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon^3$  соответственно.

Введем новый поперечный масштаб  $\Delta_0 = \Delta/\sigma(\zeta_0, \varepsilon)$ . Независимые переменные и искомые функции, отвечающие двум различным масштабам, связаны между собой равенствами

$$\zeta = \zeta_0 + \varepsilon \ln \sigma, \quad \varphi(\xi) = \varphi_0(\xi_0), \quad \Lambda(\xi) = \Lambda_0(\xi_0) \left( \sigma + \varepsilon \frac{d\sigma}{d\xi_0} \right) \quad (4.8)$$

Последнее равенство получено согласно определению функции  $\Lambda(\xi)$  (1.8).

Учитывая, что значение определенной равенством (3.6) величины  $F_1$  при переходе к новому масштабу изменится по формуле (3.7), запишем разложения (4.7) для новой переменной и положим  $\ln \sigma = -\ln \varepsilon - R(\zeta_0)$ . В новых разложениях тогда останутся только главные члены, и согласно равенствам (4.8) будем иметь

$$\zeta = \zeta_0 - \varepsilon [\ln \varepsilon + R(\zeta_0)] \quad (4.9)$$

$$\Lambda(\xi) = \frac{\varepsilon \kappa P(\zeta_0)}{F_1 \zeta_0} \left[ 1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\zeta_0}\right) \right], \quad \varphi(\xi) = \frac{\varepsilon \kappa Q(\zeta_0)}{\zeta_0} \left[ 1 + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\zeta_0^2}\right) \right] \quad (4.10)$$

Таким образом, почти тождественная замена переменных (4.9) приводит асимптотические разложения (4.7) к простому одночленному виду (4.10), в чем можно также убедиться непосредственной подстановкой.

При учете соотношений (4.9), (4.10) интеграл (4.6) преобразуется следующим образом:

$$R_x = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{de^{\xi}}{\Lambda(\xi)} = \frac{\zeta_0^2}{\varepsilon^2 \kappa^2 P(\zeta_0) Q(\zeta_0)} \exp \left[ \frac{\zeta_0}{\varepsilon} + A_0 - C_0 + O\left(\frac{\varepsilon}{\zeta_0}\right) \right] \quad (4.11)$$

Асимптотическое решение задачи получено в приближении пограничного слоя, когда функция тока удовлетворяет уравнению (1.7). Все результаты, однако, останутся в силе, если в качестве исходной при построении разложений (3.1), (3.2), (4.1) использовать систему полных уравнений Рейнольдса. Члены уравнений Рейнольдса, которые не учитываются теорией пограничного слоя, сказываются в разложениях (3.1), (3.2) только на величинах порядка  $\varepsilon^2$ . Построенное решение, таким образом, есть асимптотическое решение уравнений Рейнольдса, имеющее при  $\xi \rightarrow \infty$  ту же точность, что и уравнения пограничного слоя.

**5. Универсальный закон дефекта скорости.** Разрешив второе уравнение (4.10) относительно  $\varepsilon/\zeta_0$ , получим

$$2\kappa\varepsilon/\zeta_0 = (\Lambda_* + \varphi)[1 + O(\varepsilon_*)], \quad \Lambda_* = \sqrt{c_f/2 + B}, \quad \varepsilon_* = \sqrt{c_f + B} \quad (5.1)$$

Здесь учтено, что в силу неравенств  $\varepsilon_* \leq \Lambda_* + \varphi \leq \sqrt{2} \varepsilon_*$  вместо  $O(\Lambda_* + \varphi)$  можно писать  $O(\varepsilon_*)$ .

Подстановка выражения (5.1) в первое соотношение (4.10) дает

$$\Lambda = \frac{\Lambda_*}{F_1} [1 + O(\varepsilon_*)] \quad (5.2)$$

Для случая непроницаемой пластины подобное выражение было получено [17] (см. также [4]) из соображений размерности.

Окончательный вид формул для распределения продольной скорости во внешней области пограничного слоя, а также чисел Рейнольдса, образованных по толщине слоя и расстоянию от передней кромки пластины, получим из соотношений (3.2), (4.9), (4.11) с учетом соотношений (5.1), (5.2)

$$\frac{U_e - u}{U_e \Lambda_*} = -\frac{f'(\eta)}{F_1} + O(\varepsilon_*) \quad (5.3)$$

$$R_{\Delta} = \frac{E}{F_1 \varphi}, \quad R_x = \frac{E}{\varphi \Lambda_*}, \quad E = \exp \left[ \frac{2\kappa}{B} (\Lambda_* - \varphi) + A_0 - C_0 + O(\varepsilon_*) \right] \quad (5.4)$$

Равенство (5.3), полученное ранее [7], представляет собой универсальный закон дефекта скорости, обобщающий на случаи вдува и отсоса известное соотношение для непроницаемой пластины.

Универсальную функцию  $f'(\eta)$  можно задать по эмпирической формуле Коулса для профиля скорости на непроницаемой пластине [18]

$$\frac{f'(\eta)}{F_1} = \frac{1}{\kappa} [\ln \eta - 0.55(1 + \cos(\pi\eta))], \quad 0 < \eta \leq 1 \quad (5.5)$$

Здесь величина  $\Delta$  выбрана как расстояние от стенки, на котором продольная составляющая осредненной скорости на 0.5% отличается от  $U_e$ . В этом случае  $F_1 = 1.55/\kappa$ ,  $A_0 = 0.23$ .

Проинтегрировав обе части равенства (5.3) по  $\eta$  от 0 до  $\infty$ , будем иметь

$$\delta^*/\Lambda_* = F_1 \Delta [1 + O(\epsilon_*)] \quad (5.6)$$

где  $\delta^*$  – толщина вытеснения пограничного слоя. Для представления результатов удобно использовать поперечный масштаб, определенный равенством

$$\Delta^* = \delta^*/\Lambda_* \quad (5.7)$$

Выражение (5.7) является обобщением на случай проницаемой пластины толщины пограничного слоя, введенной Клаузером [19]. По данным Клаузера  $A_0 = 0.246$ , что весьма близко к приведенному выше значению, вычисленному на основе формулы Коулса (5.5).

Для проверки теоретических результатов выбраны эксперименты [20–25], условия проведения которых в достаточной мере соответствуют постановке теоретической задачи. В частности, уровень турбулентных пульсаций на внешней границе слоя в опытах [20–25] можно считать малым.

На всех фигурах используются обозначения

$$D = \frac{U_e - u}{U_e \Lambda_*}, \quad D_1 = \frac{2(U_e - u)}{U_e (\Lambda_* + \sqrt{c_f/2 + Bu/U_e})}$$

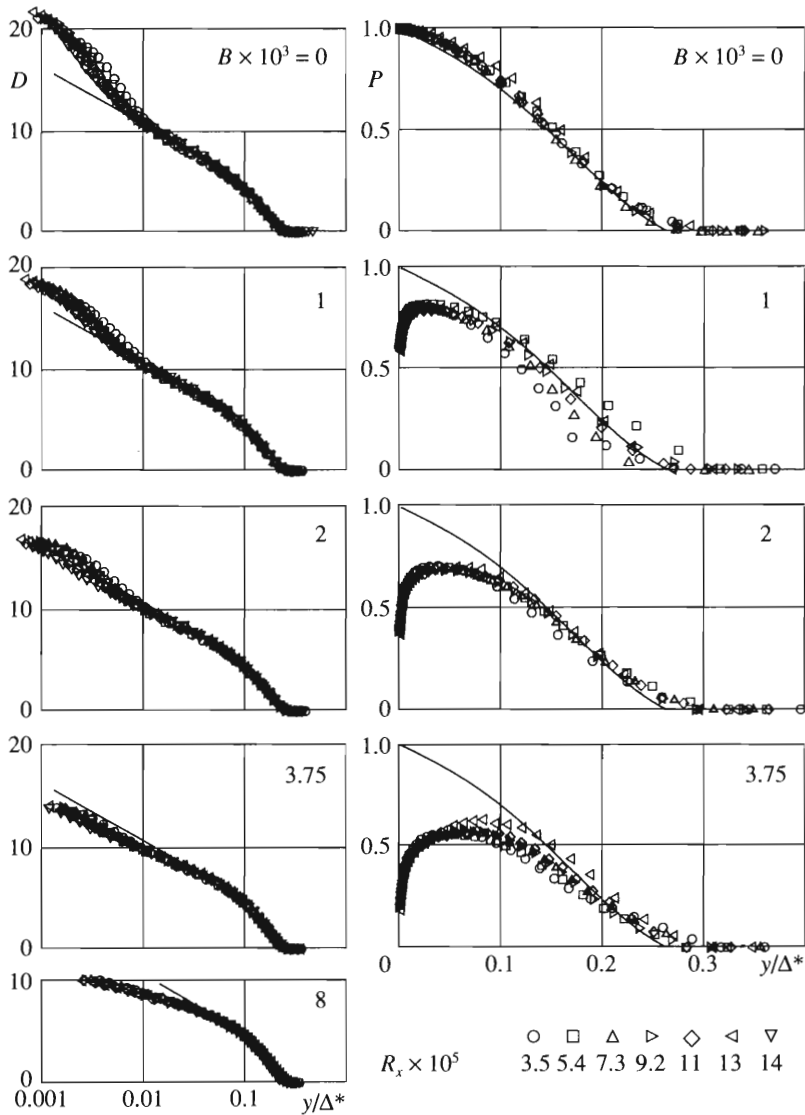
$$P = \frac{v \partial u / \partial y - \langle u' v' \rangle}{U_e^2 \Lambda_*^2}, \quad P_1 = \frac{\langle u'^2 \rangle}{U_e^2 \Lambda_*^2}, \quad P_2 = \frac{\langle v'^2 \rangle}{U_e^2 \Lambda_*^2}$$

В левой части фиг. 1 в переменных подобия (5.3) построены экспериментальные профили скорости в пограничном слое на пластине со вдувом для разных значений параметра  $B$  и чисел  $R_x$  [20]. Сплошные кривые отвечают формуле Коулса (5.5). Экспериментальные данные подтверждают справедливость универсального закона дефекта скорости – во внешней области все точки лежат на одной кривой, соответствующей профилю скорости на непроницаемой пластине (левая часть фиг. 1). В то же время интервал, в котором выполняется предложенное соотношение подобия, существенно зависит от параметра вдува. Для непроницаемой пластины ( $B = 0$ ) универсальная кривая описывает распределение скорости по всей толщине пограничного слоя, кроме вязкого подслоя непосредственно у стенки. По мере роста скорости вдува область применимости закона (5.3) сокращается, и при максимальном в серии экспериментов [20] значении  $B = 0.008$  составляет приблизительно 80% толщины пограничного слоя.

Закон подобия (5.3) должен выполняться при больших числах Рейнольдса. Для данных на фиг. 1 минимальное число  $R_x = 3.5 \cdot 10^5$ . Имеются профили скорости, измеренные [20] при меньших числах  $R_x$  ( $R_x = 3.2 \cdot 10^4, 1.6 \cdot 10^5$ ); эти данные установленному закону дефекта скорости не подчиняются.

Закон дефекта скорости (5.3) позволяет сформулировать правила подобия для распределения компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Из соотношения (1.3) и уравнения (3.5) для касательного напряжения получим

$$\frac{v \partial u / \partial y - \langle u' v' \rangle}{U_e^2 \Lambda_*^2} = 1 + \frac{\eta f'(\eta) - f(\eta)}{f(\infty)} + O(\epsilon_*) \quad (5.8)$$



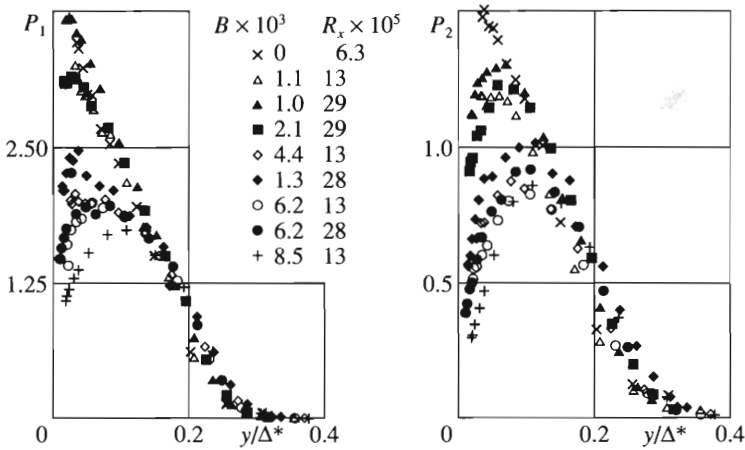
Фиг. 1

Для нормальных турбулентных напряжений из соотношений (1.4) во внешней области будем иметь

$$\frac{\langle u'^2 \rangle}{U_e^2 \Lambda_*^2} = \left[ \frac{\eta f'''(\eta)}{F_1} \right]^2 S_1(\infty, 0, \eta) + O(\epsilon_*) \tag{5.9}$$

Соотношения для компонент  $\langle v'^2 \rangle$  и  $\langle w'^2 \rangle$  полностью аналогичны формуле (5.9). В правой части равенства (5.9) стоит функция, задающая распределение компоненты тензора Рейнольдса в пограничном слое на непроницаемой пластине.

В правой части фиг. 1 данные измерений касательного напряжения [20], построенные в переменных подобия (5.8), сопоставлены с расчетной кривой, соответствующей



Фиг. 2

шей правой части формулы (5.8), в которой функция  $f'(\eta)$  задана выражением (5.5). Для непроницаемой пластины расчетная кривая и экспериментальные профили касательного напряжения весьма близки ( $B = 0$ , правая часть фиг. 1). Это подтверждает справедливость полученного в настоящей работе приближенного уравнения (3.5), поскольку формула Коулса хорошо описывает экспериментальный профиль скорости ( $B = 0$ , левая часть фиг. 1). При вдуве использование переменных (5.8) позволяет совместить распределения касательного напряжения, полученные для одного значения параметра вдува, но при разных числах Рейнольдса. (Аномальное поведение трех профилей, отвечающих  $B = 0.001$  и  $3.5 \cdot 10^5 \leq R_x \leq 7.3 \cdot 10^5$ , и одного, соответствующего  $B = 0.00375$  и  $R_x = 1.3 \cdot 10^6$ , очевидно, вызвано неточностью измерений.) Однако опытные данные совпадают с расчетной кривой только в части пограничного слоя, в области, примыкающей к его внешней границе; протяженность этой области заметно сокращается по мере роста скорости вдува.

На фиг. 2 в переменных подобия (5.9) построены экспериментальные профили компонент тензора Рейнольдса, связанных с продольными (левая часть фиг. 2) и поперечными (правая часть) пульсациями скорости [21] (см. также [22]), при разных значениях  $B$  и  $R_x$ . Видно, что экспериментальные данные, полученные в весьма широком диапазоне параметра вдува при разных числах Рейнольдса, подчиняются правилу подобия (5.9) в области, составляющей приблизительно 3/4 толщины пограничного слоя.

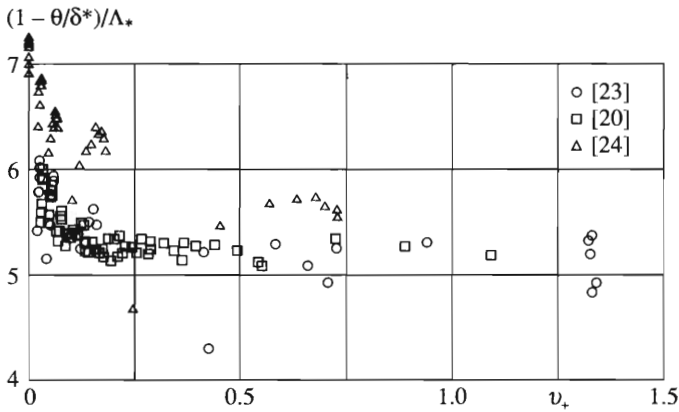
Закон дефекта скорости (5.3) можно записать в виде

$$\frac{U_e - u}{U_e \Delta \Lambda_*} = -\frac{f'(\eta)}{F_1} + \varepsilon f_1(\zeta, \eta, \varepsilon), \quad f_1(\zeta, \eta, \varepsilon) = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Отсюда для интегральных параметров пограничного слоя получим

$$\frac{\delta^*}{F_1 \Delta \Lambda_*} = 1 + \varepsilon I(\zeta, \varepsilon), \quad \frac{\theta}{F_1 \Delta \Lambda_*} = 1 - G \Lambda_* + \varepsilon I(\zeta, \varepsilon) + O(\varepsilon^2) \quad (5.10)$$

$$I(\zeta, \varepsilon) = \int_0^\infty \frac{f_1(\zeta, \eta, \varepsilon)}{F_1} d\eta, \quad G = \int_0^\infty \frac{f_1'^2 d\eta}{F_1^3} \quad (5.11)$$



Фиг. 3

Здесь  $\theta$  – толщина потери импульса. Второй интеграл (5.11) согласно равенствам (3.7) не зависит от способа определения толщины пограничного слоя. Величина  $G$  известна как формпараметр Клаузера [19], ее численное значение по данным измерений в пограничном слое на непроницаемой пластине лежит в диапазоне от 6.4 до 7.1; вычисления, основанные на формуле Коулса (5.5), дают  $G = 6.61$ .

Из соотношений (5.10) следует правило подобия для формпараметра пограничного слоя

$$(1 - \theta/\delta^*)/\Lambda_* = G + O(\epsilon_*) \tag{5.12}$$

которое обобщает на случай вдува и отсоса представление, известное для непроницаемой пластины [19].

На фиг. 3 по экспериментальным данным [20, 23, 24] построены значения формпараметра пограничного слоя на пластине со вдувом, преобразованные согласно формуле (5.12). Данные измерений в целом соответствуют правилу подобия (5.12), хотя значение постоянной, вокруг которой в основном концентрируются экспериментальные точки, на 20% ниже величины, характерной для пограничного слоя без вдува.

**6. Составные разложения для профилей скорости и реинольдсовых напряжений.**

Закон дефекта скорости (5.3) справедлив во внешней и не выполняется в пристеночной области, где распределение скорости описывается функцией  $U_+(y_*)$ . Вне вязкого подслоя эта функция подчиняется закону подобия (2.4). Составное разложение, построенное на основе соотношений (2.4), (5.3), позволит получить представление профиля скорости во всем пограничном слое, кроме вязкого подслоя.

Перепишем закон подобия (2.4) во внешних переменных с учетом выражения для толщины пограничного слоя (5.4)

$$\sqrt{1 - qD} = 1 + \frac{q}{2}\Phi + O(q^2), \quad \Phi(\eta) = \frac{1}{\kappa}(\ln \eta + A_0 - \ln F_1), \quad q = \frac{B}{\Lambda_*} \tag{6.1}$$

На основании соотношений (1.12) и (4.1) в рассматриваемом случае умеренных вдува и отсоса  $q = O(\epsilon)$ . Разрешив уравнения (6.1) в предположении  $q\Phi = O(1)$ , получим

$$D = -\Phi - \frac{q}{4}\Phi^2 + O(q) \tag{6.2}$$

Равенства (6.2) и (5.3) теперь рассматриваются всюду вне вязкого подслоя. Составное разложение для дефекта скорости  $D$  образуем в виде суммы разложений для двух областей за вычетом их общей части [16]

$$D = -\frac{f'}{F_1} - \frac{q}{4}\Phi^2 + O(\varepsilon_*) \quad (6.3)$$

Заменим теперь  $\Phi(\eta)$  на функцию  $f'(\eta)/F_1$ , которая, согласно (3.6), имеет ту же асимптотику на стенке. Это не изменит порядка точности представления (6.3), но позволит удовлетворить физическому условию обращения в нуль дефекта скорости на внешней границе слоя. Таким образом, окончательно будем иметь

$$\frac{U_e - u}{U_e \Lambda_*} = -\frac{f'(\eta)}{F_1} - \frac{q f'^2(\eta)}{4 F_1^2} + O(\varepsilon_*) \quad (6.4)$$

Здесь оценка  $O(\varepsilon_*)$  равномерно пригодна всюду вне вязкого подслоя.

Подстановка выражений (6.4) в соотношения (1.3), (1.4) дает составные разложения для рейнولدсовых напряжений, представляющие эти величины только через функции, известные для течения на непроницаемой пластине,

$$\frac{\sqrt{v \partial u / \partial y} - \langle u' v' \rangle}{U_e \Lambda_*} = \left[ 1 + \frac{\eta f''(\eta) - f(\eta)}{f(\infty)} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{q f'(\eta)}{2 F_1} \right] + O(\varepsilon_*) \quad (6.5)$$

$$\frac{\sqrt{\langle v'^2 \rangle}}{U_e \Lambda_*} = \frac{\eta f''(\eta)}{F_1} \left[ 1 + \frac{q f'(\eta)}{2 F_1} \right] \sqrt{S_1(\infty, 0, \eta)} + O(\varepsilon_*) \quad (6.6)$$

Формулы для компонент  $\langle u'^2 \rangle$  и  $\langle w'^2 \rangle$  полностью аналогичны записи (6.6). Выражения (6.5), (6.6) описывают профили касательного напряжения и среднеквадратичной поперечной пульсации скорости всюду вне вязкого подслоя. Область применимости законов подобия для продольных пульсаций уже и у стенки ограничена областью, где справедливы асимптотические представления (1.6).

Используя формулы (1.5), (1.6) и асимптотическое представление (3.6), для компонент рейнولدсовых напряжений получим следующие разложения вблизи стенки:

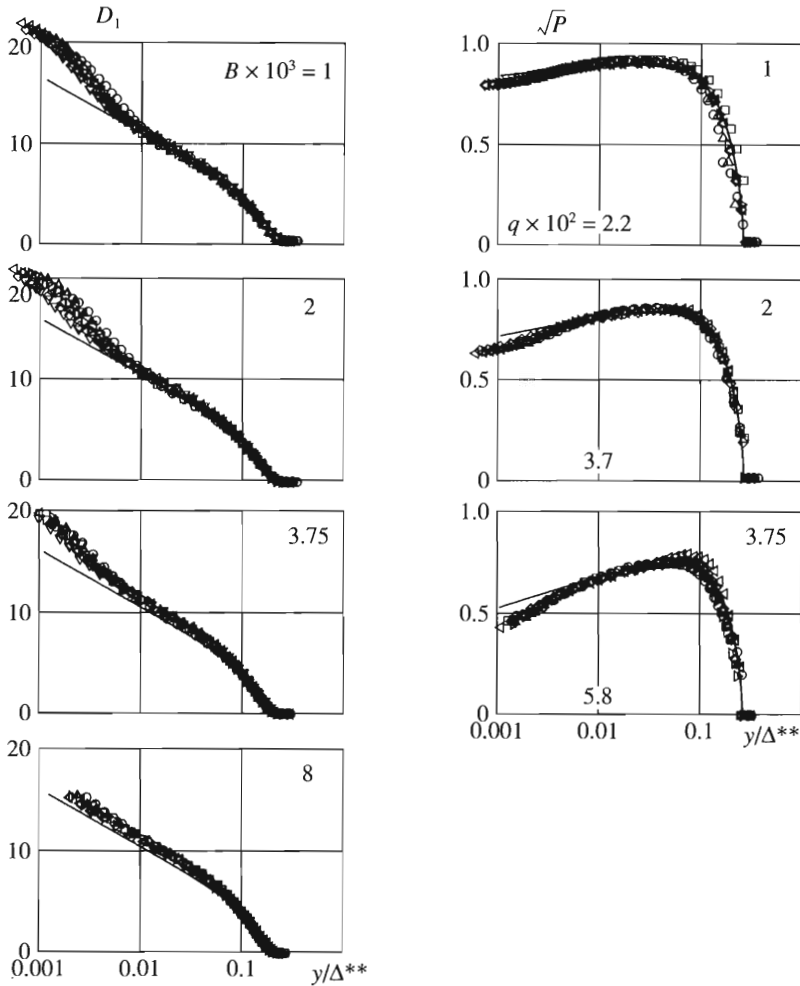
$$\sqrt{v \frac{\partial u}{\partial y}} - \langle u' v' \rangle = \frac{v_w}{2\kappa} \ln \eta + O(1), \quad (\langle u'^2 \rangle)^{1/3} = \frac{v_w}{|v_w|} \left( \frac{A_1 v_w^2}{4\kappa^2} \right)^{1/3} \ln \eta + O(1) \quad (6.7)$$

$$\sqrt{\langle v'^2 \rangle} = \frac{v_w}{2\kappa\sigma_2} \ln \eta + O(1), \quad (\langle w'^2 \rangle)^{1/3} = \frac{v_w}{|v_w|} \left( \frac{A_3 v_w^2}{4\kappa^2} \right)^{1/3} \ln \eta + O(1), \quad \eta \rightarrow 0$$

Все входящие в разложения (6.7) постоянные известны из экспериментальных данных для непроницаемой пластины. Видно, что вблизи стенки существует область, в которой корень из касательного напряжения и среднеквадратичная поперечная пульсация скорости ведут себя как логарифм расстояния до стенки, а среднеквадратичные продольные пульсации – как логарифм в степени  $3/2$ .

Другую форму составного разложения для профиля скорости получим, разрешив уравнение (6.4) относительно  $f'(\eta)$ ,

$$\frac{2(U_e - u)}{U_e(\Lambda_* + \sqrt{c_f/2 + Bu/U_e})} = -\frac{f'(\eta)}{F_1} + O(\varepsilon_*) \quad (6.8)$$



Фиг. 4

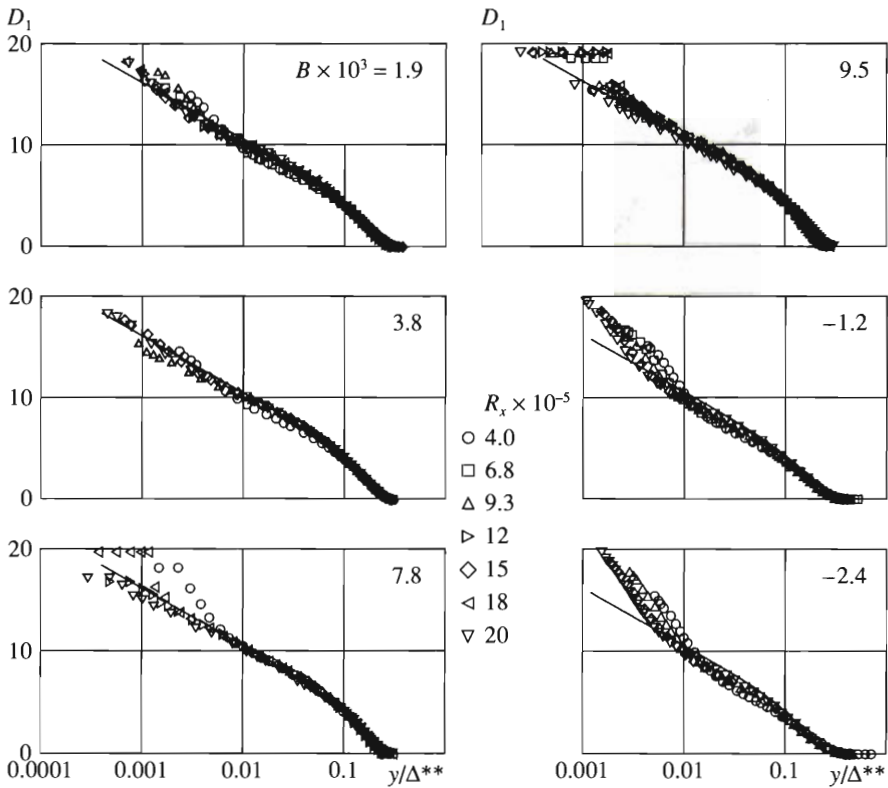
Интегрирование равенства (6.4) от стенки до внешней границы слоя дает соотношение, аналогичное (5.6),

$$\Delta^{**} \equiv \frac{\delta^*}{\Lambda_* - GB/4} = F_1 \Delta [1 + O(\epsilon_*)]$$

где  $G$  – формпараметр Клаузера (5.11). Таким образом, закону подобия (6.8) соответствует уточненный по сравнению с (5.7) поперечный масштаб  $\Delta^{**}$ .

Соотношение (6.8) впервые было предложено [26] как полуэмпирическая зависимость.

Асимптотические представления (6.8), (6.5) для профилей скорости и касательного напряжения по построению справедливы всюду вне вязкого подслоя. Это подтверждает фиг. 4, на которой в переменных (6.8), (6.5) построены те же экспериментальные данные по распределению скорости (левая часть фиг. 4) и касательного напряжения (правая часть), что на фиг. 1. На фиг. 5 для разных значений параметра  $B$  и чисел  $R_x$  представлены профили скорости [25], полученные не только при вдуве, но и отсосе.



Фиг. 5

Теперь, как видно из левой части фиг. 4 и фиг. 5, экспериментальные значения скорости следуют универсальной кривой почти по всей толщине пограничного слоя вне зависимости от величины параметра вдува и отсоса. От универсального распределения отклоняются только точки, принадлежащие вязкому подслою.

Аналогичным образом двучленная формула (6.5), как видно из правой части фиг. 4, хорошо описывает профили касательного напряжения вне вязкого подслоя для всех значений параметра вдува; расчетные кривые построены для указанных на фиг. 4 значений  $q$ . При постоянном  $B$  параметр  $q$  мало меняется по длине пластины, поэтому в каждом случае взято его значение, среднее для данного диапазона чисел Рейнольдса. Видно, что в соответствии с формулой (6.5) экспериментальные профили касательного напряжения имеют выраженный логарифмический участок вблизи стенки.

Автор признателен Г.А. Тирскому за поддержку и интерес, проявленный к работе.

Работа выполнена в рамках Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1635.2003.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Изаксон А.А.* О формуле распределения скоростей вблизи стенки // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. Вып. 7. С. 919–924.
2. *Millikan С.В.* A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes // Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech. N.Y.: Wiley. 1939. P. 386–392.

3. *Mises R. von*. Some remarks on the laws of turbulent motion in tubes // Th. von Kármán Anniversary Volume. Pasadena: Calif. Inst. Techn. Press, 1941. P. 317–327.
4. *Кадер Б.А., Яглом А.М.* Законы подобия для пристенных турбулентных течений // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 81–155.
5. *Вигдорovich И.И.* Законы подобия для распределения скорости и температуры в пристеночной области турбулентного пограничного слоя со вдувом и отсосом // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 3. С. 340–345.
6. *Вигдорovich И.И.* О связи гидродинамических параметров двух различных турбулентных пристенных течений // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 1. С. 47–51.
7. *Вигдорovich И.И.* Универсальный закон дефекта скорости для турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом и отсосом // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 4. С. 443–448.
8. *Townsend A.A.* The Structure of Turbulent Shear Flow. 2-nd ed. Cambridge: Univ. Press, 1976. 430 p.
9. *Perry A.E, Henbest S., Chong M.S.* A theoretical and experimental study of wall turbulence // J. Fluid Mech. 1986. V. 165. P. 163–199.
10. *Fernholz H.H., Finley P.J.* The incompressible zero-pressure-gradient turbulent boundary layer: An assessment of the data // Prog. Aerospace Sci. 1996. V. 32. P. 245–311.
11. *Spalart P.R.* Direct simulation of a turbulent boundary layer up to  $Re_\theta = 1410$  // J. Fluid Mech. 1988. V. 187. P. 61–98.
12. *Вигдорovich И.И.* Асимптотическое исследование при больших числах Рейнольдса турбулентного пограничного слоя на плоской пластине // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 106–117.
13. *Вигдорovich И.И.* Универсальный закон трения для турбулентного пограничного слоя на пластине со вдувом // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 1. С. 39–43.
14. *Вигдорovich И.И.* Универсальный закон трения для турбулентного пограничного слоя на пластине с отсосом // Докл. РАН. 1997. Т. 356. № 1. С. 42–46.
15. *Вигдорovich И.И.* Турбулентный пограничный слой на пластине с интенсивным отсосом // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 61–76.
16. *Van Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1964 = *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
18. *Coles D.* The law of the wake in the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1956. V. 1. Pt 2. P. 191–226.
19. *Clouser F.H.* The turbulent boundary layer // Adv. Appl. Mech. V. 4. N.Y.: Acad. Press., 1956. P. 1–51 = *Клаузер Ф.* Турбулентный пограничный слой // Проблемы механики / Под ред. *Х. Драйдена* и *Т. Кармана*. 1959. Вып. 2. С. 297–340.
20. *Andersen P.S., Kays W.M., Moffat R.J.* The turbulent boundary layer on a porous plate: An experimental study of the fluid mechanics for adverse free-stream pressure gradient. Rep. HMT-15. Stanford Univ., 1972. 194 p.
21. *Alp E.* Measurements on a transpired turbulent boundary layer and a mixing length model employing near-wall characteristic time scales. PhD Thesis. Canada: Univ. Waterloo, 1978. 198 p.
22. *Alp E., Strong A.B.* Measurements of characteristic time scales of the turbulent boundary layer with mass transfer // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1981. V. 24. № 3. P. 521–531.
23. *Simpson R.L., Moffat R.J., Kays W.M.* The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental skin friction with variable injection and suction // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1969. V. 12. № 7. P. 771–789.
24. *Depooter K., Brundrett E., Strong A.B.* The calibration of Preston tubes in transpired turbulent boundary layers // Trans. ASME. J. Fluids Eng. 1978. V. 100. № 1. P. 10–16.
25. *Simpson R.L., Moffat R.J., Kays W.M.* The turbulent boundary layer on a porous plate: an experimental study of the fluid dynamics with injection and suction. Rep. HMT-2. Stanford Univ., 1967. 173 p.
26. *Stevenson T.N.* Turbulent boundary layers with transpiration // AIAA J. 1964. V. 2. № 8. P. 1500–1502.