

УДК 532.516.5

© 2005 г. В. И. Грабовский

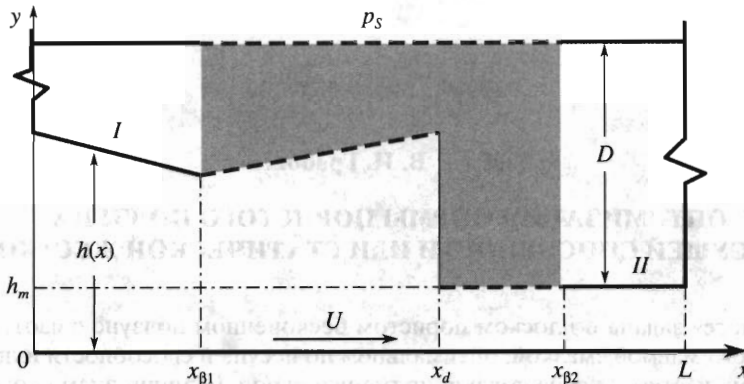
## ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ПОРИСТОГО ПОЛЗУНА ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИЛИ СТАТИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ

Решается задача о плоском пористом бесконечном ползуне с изотермической сжимаемой смазкой, оптимальном по несущей способности или статической жесткости слоя смазки, применительно к подшипникам скольжения. Решение находится в условиях заданного ограничения расхода смазки через пористую вставку. Найденные оптимальные формы ползуна, а также размер и положение вставки зависят от параметров задачи, определяющих свойства смазки и вставки, условия питания и расход смазки через вставку.

Принудительная подача (наддув) смазки в рабочий зазор газодинамического подшипника улучшает условия его работы, в том числе в режимах его пуска и остановки, а также повышает несущую способность и жесткость слоя смазки в рабочем режиме. Среди конструкций пористых подшипников и способов подачи смазки в смазочный слой [1–4] выделяются подшипники с пористыми вставками при распределенной подаче смазки [1, 2], обладающие, например, повышенной виброустойчивостью. Работа подшипников с такими вставками исследовалась многими авторами, решавшими различные прямые задачи. Была выполнена [5] параметрическая оптимизация характеристик пористого радиального подшипника. Оптимальные формы ползунув при непроницаемой их поверхности и по разным параметрам рассматривались в [6–9].

Ниже формулируется и решается задача определения оптимальных форм пористого бесконечного ползуна, обеспечивающих либо максимум несущей способности, либо максимум статической жесткости слоя изотермической сжимаемой смазки в условиях заданного ограничения расхода смазки через пористую вставку. Дополнительная смазка подается из ресивера с повышенным давлением через вставку, где ее движение подчиняется закону Дарси. В зависимости от этих условий вставка может быть разной длины, равной или меньшей длины ползуна. В последнем случае необходимо определять оптимальный размер и положение вставки. Введение ограничения на дополнительный расход вызвано требованием практики уменьшить затраты смазки и энергии на ее подачу, что приводит к уменьшению возможности увеличения несущей способности и жесткости.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается плоский и бесконечный в перпендикулярном к поверхности чертежа направлении (фиг. 1) ползун длины  $L$ , движущийся над плоской поверхностью  $y = 0$  со скоростью  $-U$  в отрицательном направлении оси  $x$  декартовой системы координат  $x, y, z$ . Форма нижней поверхности ползуна описывается функцией  $y = h(x)$ . В системе координат, связанной с ползуном, поверхность  $y = 0$  движется со скоростью  $U$ , а ползун покоится. Изотермическая смазка с плотностью  $\rho$ , пропорциональной давлению  $p$ , имеет постоянную вязкость  $\mu_c$ . Высота зазора между ползуном и указанной поверхностью удовлетворяет неравенству  $h \ll L$  (на фиг. 1 зазор показан в увеличенном масштабе). Задается величина минимально допустимой высоты зазора  $h_m$ , появляющаяся из-за запрета касания движущихся относительно одна другой поверхностей. Вне зазора (перед и за ползуном) давление смазки принимается постоянным и равным  $p_\infty$ . При переменной высоте зазора давление в нем  $p \neq p_\infty$ , и у ползуна появляется несущая способность  $N$ , которая, будучи равной интегралу от давления по всей поверхности ползуна, уравнивает внешнюю нагрузку. Наряду с несущей способностью важными являются статическая жесткость



Фиг. 1

слоя смазки  $G$  и дополнительный расход смазки  $Q_p$  через пористую вставку. Здесь и далее все интегральные характеристики отвечают единице ширины ползуна в направлении оси  $z$ .

Ползун включает в себя однородную по пористости вставку толщины  $D \gg h_m$ , длины  $l_p \leq L$  (на фиг. 1 она заштрихована) и ресивер со смазкой, давление в котором  $p_s > p_\infty$ . Из-за разности давлений в ресивере и зазоре смазка из ресивера нагнетается в зазор. Далее с целью упрощения анализа принимается, что для давления в пористой вставке  $p_p$  справедливо неравенство

$$|\partial p_p / \partial y| \gg |\partial p_p / \partial x|$$

при выполнении которого смазка течет по пористой вставке и на выходе из нее в поперечном направлении  $y$ . В дополнении к этому примем, что течение смазки в пористой среде подчиняется закону Дарси [1, 2]. Тогда плотность потока смазки поперек вставки определится уравнением ( $k_p$  – коэффициент фильтрации)

$$j_p(x) = -k_p \mu_c^{-1} \rho \partial p_p / \partial y$$

Если изотермическая смазка – совершенный газ, то интегрирование этого уравнения поперек пористого слоя даст соотношение

$$j_p(x) = k_p (2RT \mu_c D)^{-1} (p^2 - p_s^2)$$

где  $R$  – газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура, принимаемая постоянной,  $p(x)$  – давление в зазоре  $h(x)$ .

Уравнение баланса расхода смазки вытекает из уравнения неразрывности и для смазки в зазоре имеет вид [1, 2]

$$Q' + j_p = 0, \quad Q = \rho \int_0^h u dy$$

Штрихом обозначена производная по  $x$ ,  $u$  – продольная компонента скорости смазки в зазоре. Расход  $Q$  выражается через  $p$ ,  $p'$  и  $h$  известным образом [1, 2] и приводится

ниже в безразмерном виде. Дополнительный расход смазки, нагнетаемой через пористую вставку, определяется интегралом

$$Q_p = \int_{x_{\beta 1}}^{x_{\beta 2}} j_p dx = Q(x_{\beta 2}) - Q(x_{\beta 1})$$

где  $x_{\beta 1}$  и  $x_{\beta 2}$  продольные координаты вставки.

Введем безразмерные переменные с масштабами:  $L$  – для координаты  $x$ ,  $h_m$  – для  $y$  и  $h$ ,  $U$  – для скорости и  $\gamma \rho_\infty U^2$  – для давления, где  $\gamma = 6\mu_c L (\rho_\infty U h_m^2)^{-1}$ . В безразмерных переменных уравнение для определения давления и коэффициента расхода  $q$  в зазоре и граничные условия принимают вид

$$q' + f_\beta (p^2 - P_s^2) = 0, \quad p' = (h - qp^{-1})h^{-3}, \quad p(0) = p(1) = P_\infty, \quad q = 2Q/(\chi \rho_\infty U h_m) \quad (1.1)$$

с безразмерными комплексами (параметрами подобия)

$$\beta = 6k_p L^2 h_m^{-3} D^{-1}, \quad P_s = p_s (\gamma \rho_\infty U^2)^{-1}, \quad P_\infty = p_\infty (\gamma \rho_\infty U^2)^{-1}, \quad \chi = \gamma M^2 = P_\infty^{-1} \quad (1.2)$$

Ввиду неравенства  $l_p \leq L$  вводится кусочно-постоянная функция  $f_\beta$ , определяемая как

$$f_\beta = \beta \quad \text{при} \quad x_{\beta 1} \leq x \leq x_{\beta 2} \quad \text{и} \quad f_\beta = 0 \quad \text{при} \quad x < x_{\beta 1}, \quad x_{\beta 2} < x \quad (1.3)$$

где  $x_{\beta 1}$ ,  $x_{\beta 2}$  определяют размер и положение вставки (фиг. 1).

Решение задачи (1.1) зависит от параметров подобия  $\beta$ ,  $P_s$  и  $\chi$ , характеризующих пористость вставки, давление питания и сжимаемость смазки. Аналогично введенному ранее коэффициенту расхода  $q$  определим коэффициенты несущей способности  $C_N$ , жесткости  $C_G$  и дополнительного расхода равенствами

$$C_N = \frac{N}{\gamma L \rho_\infty U^2} = \int_0^1 p dx - P_\infty, \quad C_G = \frac{G}{\gamma L \rho_\infty U^2}, \quad q_p = 2Q_p/(\chi \rho_\infty U h_m) \quad (1.4)$$

Статическую жесткость  $G$  смазочного слоя и ее коэффициент  $C_G$  определим следующим образом [4]. Пусть ползун совершил малое квазистационарное перемещение по оси  $y$  на величину  $\varepsilon \ll 1$ . Тогда высота зазора, давление и расход в нем с точностью до  $\varepsilon$  можно представить в виде

$$h = h_0 - \varepsilon, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1, \quad q = q_0 + \varepsilon q_1 \quad (1.5)$$

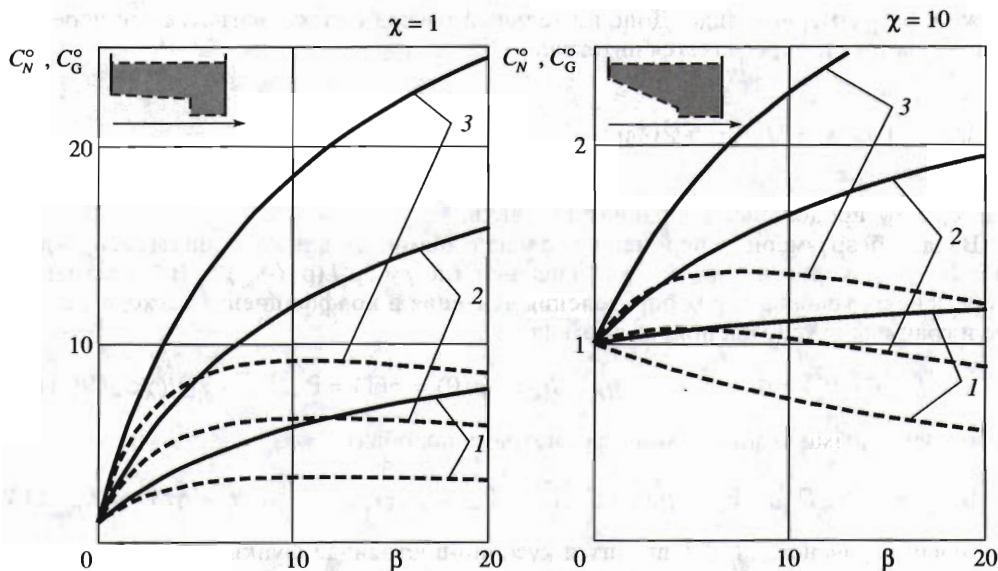
Функции  $h_0(x)$ ,  $p_0(x)$  и  $q_0(x)$  удовлетворяют уравнениям и граничным условиям (1.1) с нулевым индексом при всех переменных.

Введя жесткость равенством [4]  $G = dN/d\varepsilon$ , в соответствии с соотношениями (1.4) и (1.5) получим

$$C_G = \int_0^1 p_1 dx \quad (1.6)$$

Дифференциальное уравнение и граничные условия для возмущения давления  $p_1$ , получающиеся из соотношений (1.1) и (1.5), принимают вид

$$p_1' = (2p_0 + q_0 p_1 p_0^{-1} - q_1 - 3q_0 h_0^{-1}) p_0^{-1} h_0^{-3}, \quad p_1(0) = p_1(1) = 0 \quad (1.7)$$



Фиг. 2

Величина  $q_1$  определяется уравнением

$$q_1' + 2f_{\beta} p_0 p_1 = 0 \quad (1.8)$$

Таким образом, несущая способность определяется по невозмущенному давлению  $p_0$ , а статическая жесткость – по его возмущению  $p_1$ .

Используемая модель отвечает дозвуковым течениям. Несжимаемая смазка соответствует  $M^2 \ll 1$ ,  $\chi \ll 1$ , а сильно сжимаемая –  $M^2 < 1$ ,  $\chi \gg 1$ . Случай  $\beta = 0$  отвечает ползуну без пористой вставки.

Оценим параметры подбора для реальных случаев. Если

$$U = 10^2 \text{ м/с}, \quad T = 300 \text{ К}, \quad L = 0.1 \text{ м}, \quad h_m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}, \quad \mu_c = 1.75 \cdot 10^{-5} \text{ Па с},$$

$$p_{\infty} = 0.98 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad \rho_{\infty} = 1.3 \cdot 10^3 \text{ г м}^{-3}, \quad D = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad k_p = 10^{-14} \text{ м}^2$$

то

$$\gamma \approx 2 \cdot 10^2, \quad \chi \approx 26, \quad M^2 \approx 0.13, \quad \beta \approx 15$$

Приведем результаты решения прямых задач для пористых ползунов с заданным зазором Релея (для которого реализуется наибольшая несущая способность при  $\beta = 0$  [6, 7]). Решение получается численным интегрированием уравнений (1.1), (1.7) и (1.8) при заданной функции  $h_0(x)$  и  $x_{\beta 1} = 0$ ,  $x_{\beta 2} = 1$  (весь ползун пористый –  $l_p = L$ ). На фиг. 2 показаны зависимости  $C_N^0 = C_N(\beta)/C_N(0)$  (сплошные линии) и  $C_G^0 = C_G(\beta)/C_G(0)$  (штриховые) при  $\chi = 1$  ( $C_N(0) = 0.0343$ ,  $C_G(0) = 0.0683$ ) и 10 ( $C_N(0) = 0.0304$ ,  $C_G(0) = 0.0507$ ). Там же изображены соответствующие ползуны. Кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям  $P_s/P_{\infty} = 1.5, 2, 2.5$ . Увеличение  $P_s$  всегда сопровождается увеличением и несущей способности, и жесткости. Функция  $C_N^0(\beta)$  – монотонная, а  $C_G^0(\beta)$  имеет максимум,

величина которого и его координата  $\beta^m$  зависят от значений  $P_s$  и  $\chi$ . Для практики интересны случаи одновременного увеличения параметров  $C_N$  и  $C_G$ . При  $\chi = 1$  область  $[0, \beta^m]$  значительно больше, чем при  $\chi = 10$ . Растет протяженность ее и с ростом параметра  $P_s$ .

Отметим, что увеличение несущей способности и жесткости сопровождается нежелательным ростом дополнительного расхода смазки через пористую вставку. При фиксированных значениях  $\beta$ ,  $P_s$  и при  $l_p = L$  коэффициент  $q_p$  максимален. С ростом параметров  $\beta$  и  $P_s$  эта величина  $q_{p, \max}$  возрастает.

**2. Оптимальные ползуны.** Исследованные выше ползуны не оптимальны по несущей способности при  $\beta > 0$  и не оптимальны по жесткости при всех  $\beta$ . Поставим задачу определения формы ползуна, а также размера и положения пористой вставки, которые при заданных  $\beta$ ,  $P_s$  и  $\chi$  обеспечивают максимум либо несущей способности, либо статической жесткости при условии ограничения величины дополнительного расхода.

*Ползуны, оптимальные по несущей способности.* Требуется найти функцию  $h_0(x)$ , координаты  $x_{\beta 1}$  и  $x_{\beta 2}$ , обеспечивающие максимум функционала  $C_N$  при учете дифференциальных связей (1.1) с нулевым индексом, ограничений высоты зазора  $1 \leq h_0(x)$  и дополнительного расхода  $q_p \leq q_{p, \max}$ .

Для решения поставленной задачи составим функционал Лагранжа

$$J_N = C_N + \int_0^1 F_N dx + \alpha q_p; \quad F_N = \lambda(p_0 h_0 - q_0 - p_0 h_0^3 p_0') + \mu(q_0' + f_\beta(p_0^2 - P_s^2)) \quad (2.1)$$

в котором  $\lambda(x)$  и  $\mu(x)$  – переменные, а  $\alpha$  – постоянный множители Лагранжа. При  $\alpha = 0$  задача переходит в задачу без ограничения величины  $q_p$ , и получается  $l_p = L$  и  $q_p = q_{p, \max}$ .

Для получения необходимых условий оптимальности функционал  $J_N$  варьируется согласно известным правилам [8]. Если зазор оптимален, т.е. реализуется максимум  $C_N$ , то вариации  $\Delta C_N = \Delta J_N \leq 0$  при любых вариациях  $\delta h_0$ , удовлетворяющих ограничению высоты  $h_0(x)$ . Варьирование проводится с учетом непрерывности  $p_0$  и  $q_0$  в сечениях  $x = x_d$  возможных разрывов функции  $h_0$ . Их наличие – характерная особенность оптимальных ползун. В этих сечениях могут претерпевать разрыв и множители Лагранжа. Другими характерными сечениями являются сечения  $x = x_{\beta 1}$  и  $x = x_{\beta 2}$ , где рвется функция  $f_\beta$  и один из множителей Лагранжа. Положение указанных разрывов неизвестно и определяется в процессе решения.

Проделав необходимые выкладки, для вариации  $\Delta C_N = \Delta J_N$  получим

$$\Delta C_N = \sum_{d, \beta 1, \beta 2} \{-[\lambda h_0^3] p_0 \Delta p_0 + [\mu] \Delta q_0 + [\lambda p_0 h_0^3 p_0' - \mu q_0'] \Delta x\} + \alpha(\Delta q_{0, \beta 2} - \Delta q_{0, \beta 1}) + (\mu \Delta q_0)_{x=1} - (\mu \Delta q_0)_{x=0} + \int_0^1 \{P \delta p_0 + B \delta h_0 - (\lambda + \mu') \delta q_0\} dx \quad (2.2)$$

$$P = p_0(\lambda h_0^3)' + \lambda h_0 + 1 + 2\mu f_\beta p_0, \quad B = \lambda(3q_0 h_0^{-1} - 2p_0); \quad [w] = w_- - w_+$$

Суммирование проводится по всем указанным выше сечениям, где рвется функция  $h_0$  или функция  $f_\beta$ . Квадратные скобки обозначают разрыв параметра в соответствующем сечении, а индексы минус и плюс приписываются этому параметру соответственно до и после разрыва. В выражении (2.2)  $\Delta x$ ,  $\Delta p_0$  и  $\Delta q_0$  – приращения координаты  $x$ , давления  $p_0$  и расхода  $q_0$  в сечениях  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = x_d$ ,  $x = x_{\beta 1}$  и  $x = x_{\beta 2}$ . Последний внеинтегральный член отвечает концам ползуна, где  $(\Delta q_0)_{x=1} \neq 0$  и  $(\Delta q_0)_{x=0} \neq 0$ .

Согласно выражению (2.2) формулируется следующая сопряженная задача для множителей Лагранжа  $\lambda$  и  $\mu$  для любых (в том числе неоптимальных) зазоров, которые могут быть образованы кусочно-непрерывной функцией  $h_0(x)$ :

$$(\lambda h_0^3)' + (\lambda h_0 + 1)p_0^{-1} + 2\mu f_\beta = 0, \quad [\lambda h_0^3]_d = 0, \quad [\lambda]_{\beta_1} = 0, \quad [\lambda]_{\beta_2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\mu' + \lambda = 0, \quad \mu(0) = \mu(1) = 0, \quad [\mu]_d = 0, \quad [\mu]_{\beta_1} = \alpha, \quad [\mu]_{\beta_2} = -\alpha \quad (2.4)$$

Одно из граничных условий в (2.4) для множителя  $\mu$  удовлетворяется подбором величины  $\lambda(0)$ . Условия на разрывах в соотношениях (2.3) и (2.4) показывают, что обе функции  $\mu(x)$  и  $\lambda(x)$  могут быть разрывными. Для множителей  $\lambda$  и  $\mu$ , удовлетворяющих уравнениям и условиям (2.3) и (2.4), выражение (2.2) принимает вид

$$\Delta C_N = \sum_{d, \beta_1, \beta_2} \{[\lambda p_0 h_0^3 p_0' - \mu q_0'] \Delta x\} + \int_0^1 B \delta h_0 dx \quad (2.5)$$

в котором все вариации и приращения можно считать независимыми.

Так как приращения  $\Delta x$  могут быть любыми, то при оптимальном положении указанных разрывов функций коэффициенты при  $\Delta x$  должны обращаться в нули. Отсюда при учете условий на разрывах (2.3) и (2.4), дифференциальных уравнений (1.1) (для функций с нулевыми индексами) и непрерывности  $p_0$  и  $q_0$  получим соотношения

$$\lambda_{d-} \{p_0 h_{0-} - q_0 - h_{0-}^3 h_{0+}^{-3} (p_0 h_{0+} - q_0)\} = 0, \quad \mu_{\beta_1+} = 0, \quad \mu_{\beta_2-} = 0 \quad (2.6)$$

определяющие сечения  $x_d$ ,  $x_{\beta_1}$  и  $x_{\beta_2}$  в оптимальном ползуна. Из соотношений (2.6) и (2.3), (2.4) следует, что

$$\lambda_{d-} = \lambda_{d+} = 0, \quad \mu_{\beta_1-} = \alpha, \quad \mu_{\beta_2+} = \alpha$$

Таким образом, множитель  $\lambda$  всюду непрерывен и проходит через нуль в сечении  $x = x_d$ , а множитель  $\mu$  претерпевает разрыв в сечениях  $x_{\beta_1}$  и  $x_{\beta_2}$ .

В той части ползуна, где  $h_0 > 1$ , вариации  $\delta h_0$  произвольны, и соответствующее условие оптимальности принимает вид

$$\lambda(3q_0 h_0^{-1} - 2p_0) = 0 \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7), отвечая участку двустороннего экстремума (I), позволяет определить высоту зазора на нем

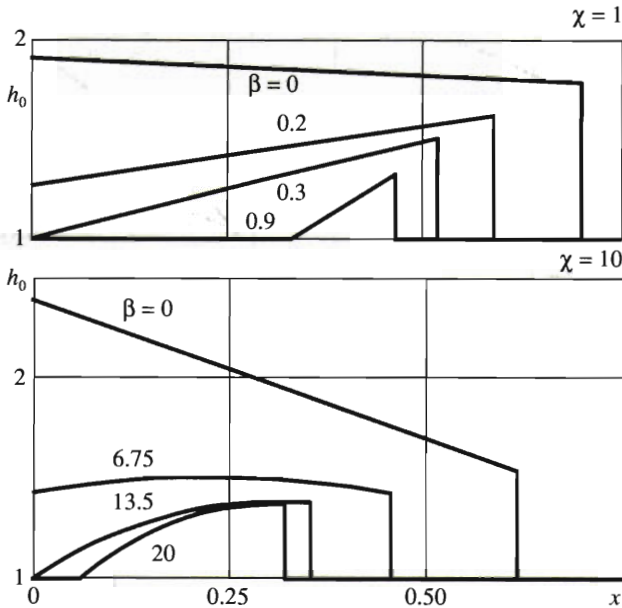
$$h_0 = 3q_0 p_0^{-1} / 2 \quad (2.8)$$

В той части ползуна, где  $h_0 = 1$  (участок краевого экстремума (II)), допустимые вариации  $\delta h_0 > 0$ . Поэтому здесь условие максимума  $C_N$  формулируется, в соответствии с соотношением (2.5), в виде неравенства

$$\lambda(3q_0 h_0^{-1} - 2p_0) < 0 \quad (2.9)$$

Из анализа уравнений смазки и полученных условий оптимальности вытекает структура оптимального решения. Функция  $h_0(x)$  содержит два участка оптимальности: I и II, которые стыкуются разрывным образом в сечении  $x = x_d$ . Концы пористой вставки всегда находятся на разных участках, включая в себя сечение  $x_d$ .

Таким образом, задача сводится к численному расчету множителей  $\lambda$  и  $\mu$  из дифференциальных уравнений (2.3) и (2.4), функций  $p_0$ ,  $q_0$  и  $h_0$  из уравнений (1.1) и (2.8) на каждом из указанных участков. Затем вычисляются максимальный коэффициент  $C_N$



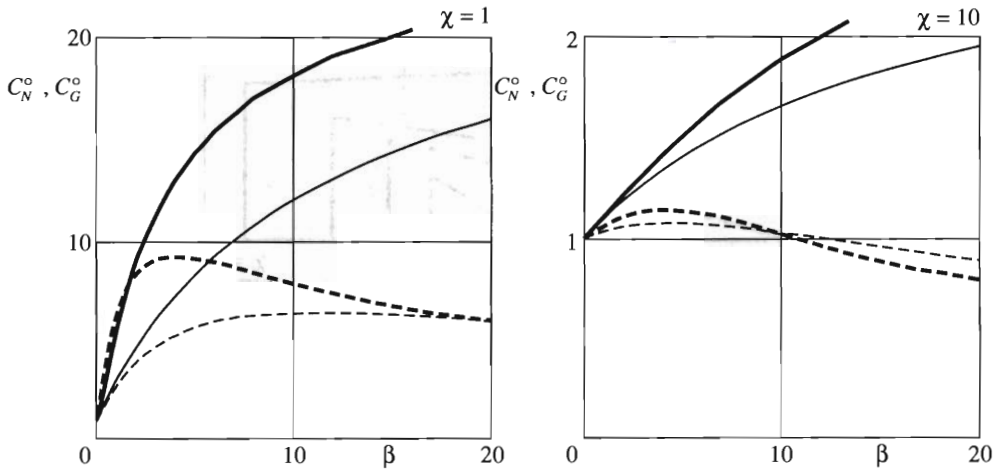
Фиг. 3

и сопутствующие ему функции  $p_1(x)$ ,  $q_1(x)$  (интегрированием уравнений (1.7) и (1.8)) и неоптимальный коэффициент  $C_G$ .

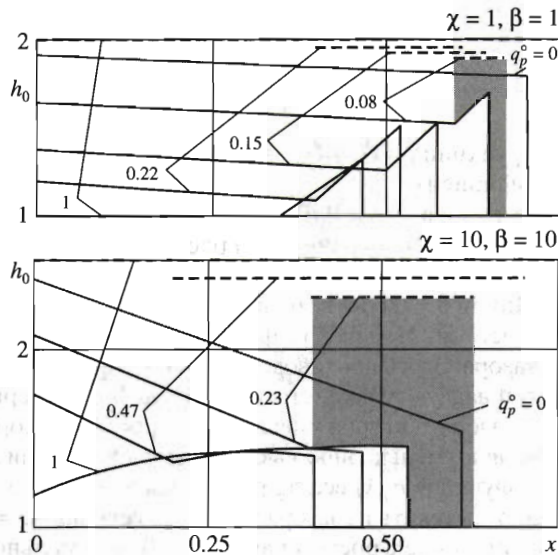
Результаты расчетов при  $P_s/P_\infty = 2$ , разных значениях  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha = 0$ . Этот случай отвечает отсутствию ограничения расхода. Тогда весь ползун пористый ( $x_{\beta 1} = 0$ ,  $x_{\beta 2} = 1$ ) и  $q_p = q_{p, \max}$ . На фиг. 3 показаны оптимальные формы таких ползун при  $\chi = 1$  и  $\chi = 10$ . Линии  $\beta = 0$  соответствуют оптимальным ползунам Релея с непроницаемыми поверхностями. Изменение формы ползуна с ростом  $\beta$  происходит с уменьшением высоты зазора. Здесь противодействуют два фактора – движение ползуна (динамический эффект) и наддув смазки (статический эффект). Первый стремится увеличить переднюю часть зазора, а второй уменьшить. С ростом  $\beta$  второй фактор начинает превалировать, приводя к уменьшению высоты зазора в сечении  $x = 0$  и к образованию выемки в ползуне. Функция  $h_0(x)$  всегда разрывная в сечении  $x = x_d$ . При больших значениях  $\beta$  смазка может вытекать из зазора через оба сечения –  $x = 0$  и  $x = 1$ .

На фиг. 4 показано изменение с ростом параметра  $\beta$  оптимального коэффициента  $C_N^o$  (толстые сплошные линии) и неоптимального коэффициента  $C_G^o$  (толстые штриховые), определенных так же, как на фиг. 2, откуда взяты зависимости (тонкие линии), соответствующие неоптимальным при  $\beta > 0$  ползунам Релея при тех же параметрах. Выигрыш в несущей способности оказывается значительным, например, для  $\beta = 10$  – около 50% при  $\chi = 1$  и 15% при  $\chi = 10$ . При малых значениях  $\beta$  одновременно увеличивается и  $C_G^o$ , т.е. такие формы, оптимальные по несущей способности, обладают и повышенной жесткостью. При больших значениях  $\beta$  это не так.

Результаты расчетов при  $P_s/P_\infty = 2$ , разных значениях  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha \neq 0$ . Разные задаваемые значения  $\alpha$  отвечают разным значениям дополнительного расхода смазки через пористую вставку  $q_p < q_{p, \max}$ . Протяженность вставки становится меньше длины ползуна ( $x_{\beta 2} - x_{\beta 1} < 1$ ). Координаты  $x_{\beta 1}$ ,  $x_{\beta 2}$  и коэффициент расхода  $q_p$  находятся из решения задачи. На фиг. 5 показаны формы оптимальных ползун



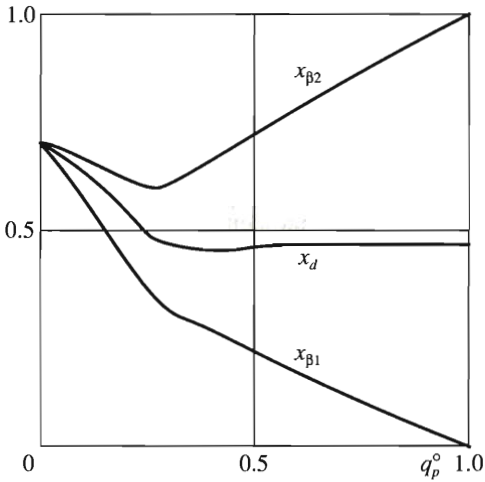
Фиг. 4



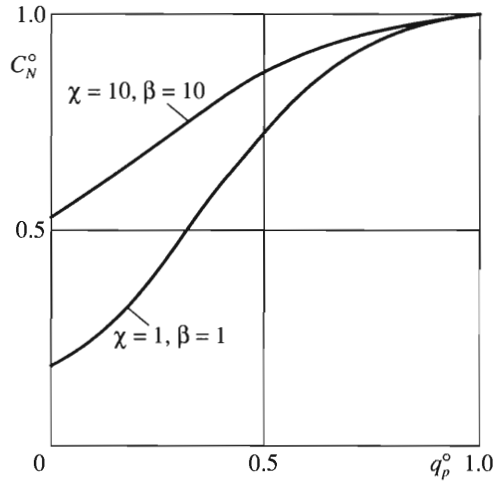
Фиг. 5

при  $\chi = 1, \beta = 1$  ( $q_{p, \max} = 2.587$ ) и  $\chi = 10, \beta = 10$  ( $q_{p, \max} = 0.146$ ) для разных относительных коэффициентов  $q_p^0 = q_p/q_{p, \max}$ . Прямолинейными горизонтальными штриховыми отрезками показаны положения пористых вставок, определяемых координатами  $x_{p1}$  и  $x_{p2}$ . В качестве примера для одного из вариантов каждого значения  $\chi$  штриховкой обозначены соответствующие вставки. Аналогично можно показать вставки и для других значений  $q_p^0$ .

Линии  $q_p^0 = 0$  отвечают, так же как на фиг. 3, непроницаемым ползунам Релея. Характерно, что оптимальное положение вставки – в средней части ползуна вблизи



Фиг. 6



Фиг. 7

сечения  $x_d$ , причем всегда  $x_{\beta 1} < x_d < x_{\beta 2}$ . Это иллюстрируется на фиг. 6, где показаны зависимости координат  $x_{\beta 1}$ ,  $x_{\beta 2}$ ,  $x_d$  от параметра  $q_p^0$  соответственно фиг. 5 для первого случая  $\chi = 1$ .

Очевидно, что уменьшение величины  $q_p$  сопровождается уменьшением несущей способности. На фиг. 7 уровень этого уменьшения иллюстрируется зависимостями  $C_N^0(q_p^0) = C_N(q_p)/C_N(q_{p, \max})$  для оптимальных ползунов из фиг. 5 ( $\chi = 1 - C_{N, \max} = 0.186$ ,  $\chi = 10 - C_{N, \max} = 0.058$ ).

*Ползуны, оптимальные по статической жесткости слоя смазки.* Требуется найти максимум функционала (1.6) с привлечением соотношений (1.1), (1.7) и (1.8) при условиях указанного ранее ограничения высоты зазора и возможного ограничения величины  $q_p$ . Соответствующий функционал Лагранжа имеет вид

$$J_G = C_G + \int_0^1 \{ F_N + \lambda_1(q_0 p_1 p_0^{-1} - 3q_0 h_0^{-1} + 2p_0 - q_1 - h_0^3 p_0 p_1') + \mu_1(q_1' + 2f_\beta p_0 p_1) \} dx + \alpha q_p$$

с дополнительными в сравнении с функционалом  $J_N$  множителями Лагранжа  $\lambda_1(x)$  и  $\mu_1(x)$ . Отметим, что функционал  $J_G$  содержит функцию  $F_N$  из интеграла (2.1). Анализ этого функционала на максимум проводится так же, как и выше.

Теперь сопряженная задача для множителей Лагранжа формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (\lambda h_0^3)' + \lambda h_0 p_0^{-1} + \lambda_1 p_0^{-2} (q_1 + q_0(3p_0 - 2p_1 h_0) p_0^{-1} h_0^{-1}) + 2f_\beta (\mu + \mu_1 p_1 p_0^{-1}) &= 0 \\
 [\lambda h_0^3]_d = 0, \quad [\lambda]_{\beta 1} = 0, \quad [\lambda]_{\beta 2} = 0 &
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

$$(\lambda_1 h_0^3)' + (\lambda_1 h_0 + 1) p_0^{-1} + 2f_\beta \mu_1 = 0; \quad [\lambda_1 h_0^3]_d = 0, \quad [\lambda_1]_{\beta 1} = 0, \quad [\lambda_1]_{\beta 2} = 0 \tag{2.11}$$

$$\mu' + \lambda + \lambda_1(3h_0^{-1} - p_1 p_0^{-1}) = 0; \quad \mu(0) = \mu(1) = 0, \quad [\mu]_d = 0, \quad [\mu]_{\beta 1} = \alpha, \quad [\mu]_{\beta 2} = -\alpha \tag{2.12}$$

$$\mu'_1 + \lambda_1 = 0; \quad \mu_1(0) = \mu_1(1) = 0, \quad [\mu_1]_d = 0, \quad [\mu_1]_{\beta_1} = 0, \quad [\mu_1]_{\beta_2} = 0 \quad (2.13)$$

$$[w] = w_- - w_+$$

Смысл квадратных скобок такой же, как и в выражениях (2.2)–(2.4). Значения  $\lambda(0)$  и  $\lambda_1(0)$ , необходимые для интегрирования уравнений (2.10) и (2.11), заранее неизвестны и подбираются при удовлетворении вторым условиям из соотношений (2.12) и (2.13). Условия в сечениях  $x_{\beta_1}$ ,  $x_d$ ,  $x_{\beta_2}$ , определяющие их оптимальное положение, имеют вид

$$\lambda_{d-} \{ p_0 h_{0-} - q_0 - h_{0-}^3 h_{0+}^{-3} (p_0 h_{0+} - q_0) \}_d +$$

$$+ \lambda_{1d-} \{ q_0 p_1 p_0^{-1} - 3q_0 h_{0-}^{-1} + 2p_0 - q_1 - h_{0-}^3 h_{0+}^{-3} (q_0 p_1 p_0^{-1} - 3p_0 h_{0+}^{-1} + 2p_0 - q_1) \}_d = 0$$

$$\mu_{\beta_1+} = 0, \quad \mu_{\beta_2-} = 0$$

Анализ вариации функционала  $J_G$  и полученных условий оптимальности показывает, что решение задачи имеет такие же особенности, как и для случая максимальной несущей способности. А именно, имеются два участка оптимальности (двустороннего экстремума (I) и краевого экстремума (II)), стыкующиеся с разрывом функции  $h_0(x)$  или без него в зависимости от значений параметров задачи. На участке двустороннего экстремума условие оптимальности, определяющее функцию  $h_0(x)$ , сводится к равенству

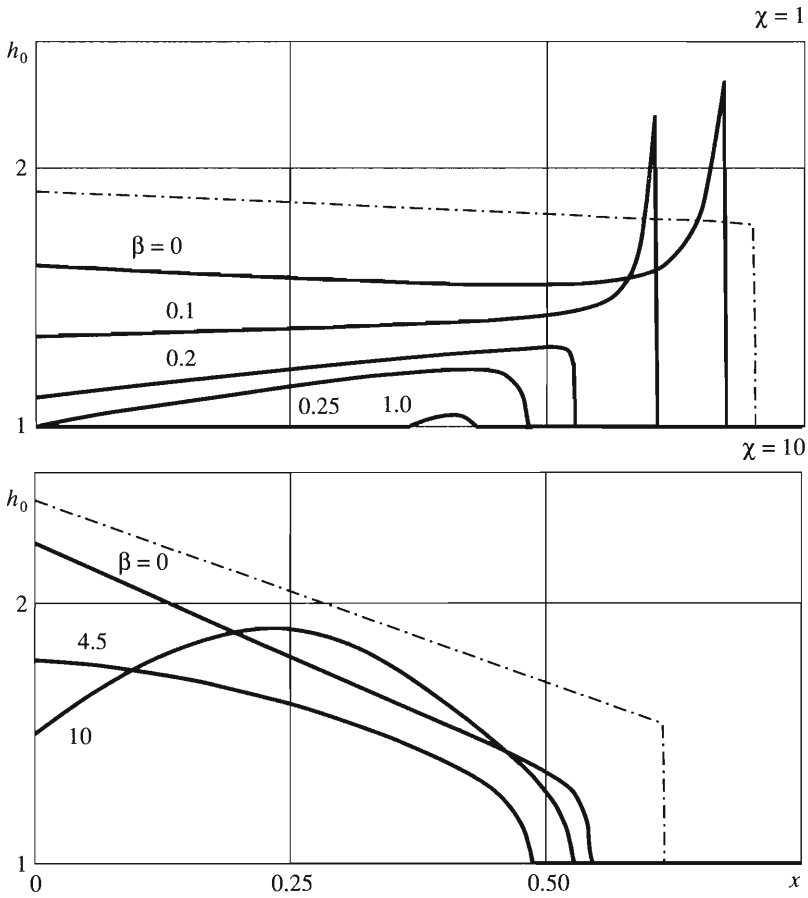
$$\lambda(3q_0 - 2p_0 h_0) h_0 + 3\lambda_1 \{ q_1 h_0 - 2p_0 h_0 + q_0(4 - h_0 p_1 p_0^{-1}) \} = 0 \quad (2.14)$$

На участке краевого экстремума ( $h_0 = 1$ ) условие оптимальности соответствует требованию отрицательности левой части равенства (2.14).

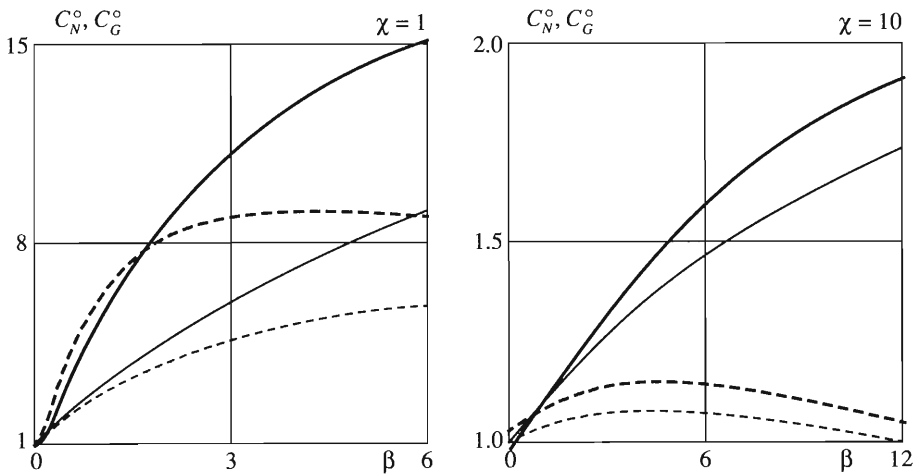
В сечении  $x = x_d$  разрыва высоты оптимального зазора множители  $\mu$ ,  $\mu_1$  непрерывны, а множители  $\lambda$  и  $\lambda_1$  могут рваться. На концах пористой вставки, координаты которых  $x_{\beta_1}$  и  $x_{\beta_2}$  определяются в ходе решения, рвется множитель  $\mu$  при непрерывных множителях  $\mu_1$ ,  $\lambda$  и  $\lambda_1$ . Представленные уравнения и соотношения позволяют находить формы ползунов с наибольшей статической жесткостью при разных значениях параметров. Задача сводится к численному расчету  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu$  и  $\mu_1$  из дифференциальных уравнений и условий (2.10)–(2.13),  $p_0$ ,  $q_0$  и  $h_0$  из уравнений (1.1) и (2.14), а также  $p_1$  и  $q_1$  из уравнений (1.7) и (1.8) на каждом из указанных участков.

Результаты расчетов при  $P_s/P_\infty = 2$ , разных значениях  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha = 0$ . Этот случай отвечает отсутствию ограничения расхода  $q_p$ . Весь ползун пористый ( $x_{\beta_1} = 0$ ,  $x_{\beta_2} = 1$ ) и  $q_p = q_{p, \max}$ . Частный случай  $\beta = 0$  для непроницаемого ползуна с несжимаемой смазкой исследован ранее [9]. Для сжимаемой смазки на фиг. 8 показаны оптимальные ползуны при  $\chi = 1$  и  $\chi = 10$ . Штрих-пунктиром даны соответствующие ползуны Релея из фиг. 3; остальные кривые отвечают оптимальным по жесткости ползунам для разных  $\beta$ . Линия  $\beta = 0$  отвечает непроницаемому ползуну. При малой сжимаемости ( $\chi = 1$ ) характерно наличие выступов при разрыве функции  $h_0$ . С ростом параметра  $\beta$  высота зазора  $h_0(x)$  становится непрерывной и уменьшается.

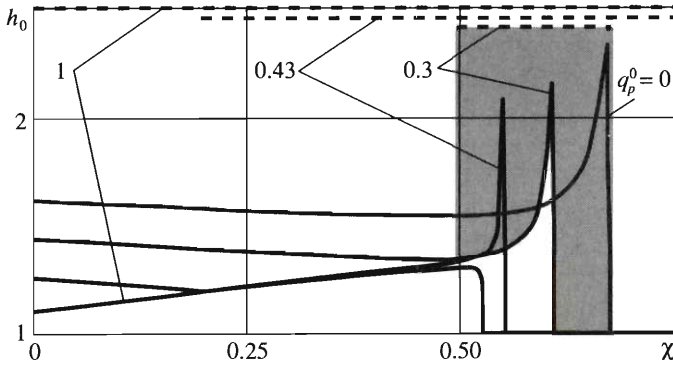
На фиг. 9 показано изменение оптимального коэффициента  $C_G^\circ$  (штриховые линии) и сопутствующего ему неоптимального коэффициента  $C_N^\circ$  (сплошные линии) с ростом параметра  $\beta$ . Тонкими линиями нанесены соответствующие зависимости для неоптимальных ползунов (для формы Релея из фиг. 2) при тех же параметрах. Выигрыш в жесткости оказывается значительным. Например, для параметра  $\beta = 5$  – око-



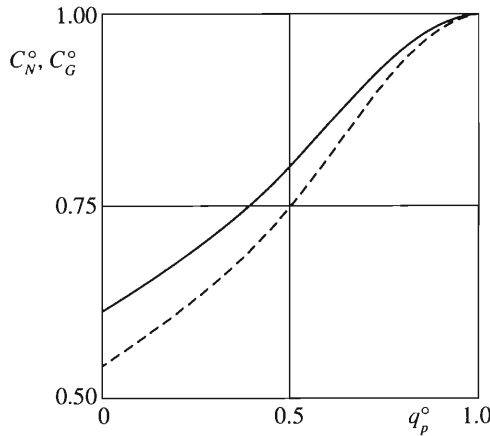
Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

ло 65% при  $\chi = 1$  и 9% при  $\chi = 10$ . Для таких ползунов всегда получается выигрыш и в несущей способности.

Результаты расчетов при  $P_y/P_\infty = 2$ ,  $\chi = 1$ ,  $\beta = 0.2$  и  $\alpha \neq 0$ . Результаты относятся к разным значениям заданного расхода смазки через пористую вставку  $q_p < q_{p, \max}$ . В отличие от случая  $\alpha = 0$  протяженность вставки становится меньше длины ползуна. На фиг. 10 показаны формы оптимальных ползунов для разных значений относительных коэффициентов  $q_p^0 = q_p/q_{p, \max}$  ( $q_{p, \max} = 0.578$ ). Прямолинейными штриховыми отрезками показаны положения пористых вставок, определяемых координатами  $x_{\beta 1}$  и  $x_{\beta 2}$ . Аналогично фиг. 5 одна из вставок ( $q_p^0 = 0.3$ ) обозначена штриховкой.

Линия  $q_p^0 = 0$  отвечает, так же как на фиг. 8 при  $\beta = 0$ , непроницаемому ползуну. Характерно, что оптимальное положение вставки, как и в ползунах, оптимальных по несущей способности, – в средней части ползуна. Зависимости координат  $x_d$ ,  $x_{\beta 1}$  и  $x_{\beta 2}$  от параметра  $q_p^0$  качественно ведут себя, как на фиг. 6.

Уменьшение величины  $q_p$  сопровождается уменьшением жесткости. На фиг. 11 уровень этого уменьшения иллюстрируется зависимостями  $C_G^0$  (штриховые линии) и

$C_N^{\circ}$  (сплошные линии) от  $q_p^{\circ}$  для оптимальных ползунов из фиг. 10 ( $C_{G, \max} = 0.136$ ,  $C_{N, \max} = 0.053$ ).

**3. Заключение.** Сформулирована и решена задача определения оптимальных форм плоского пористого бесконечного ползуна с изотермической сжимаемой смазкой, обеспечивающих либо наибольшую несущую способность, либо наибольшую статическую жесткость смазочного слоя при условии ограничения расхода смазки через пористую поверхность. Показано, что в зависимости от параметров задачи: сжимаемости смазки  $\chi$ , пористости  $\beta$  и давления питания  $P_s$ , высота зазора оптимального ползуна может быть как непрерывной, так и разрывной функцией продольной координаты. С ростом параметров  $\beta$  и  $P_s$  несущая способность увеличивается, а жесткость имеет максимум. В некотором диапазоне изменения параметра  $\beta$  обе характеристики возрастающие.

Полученные оптимальные формы ползуна могут давать выигрыш в несущей способности и жесткости по сравнению, например, с непроницаемым ползуном Релея до 100% при  $\chi = 1$ . С ростом сжимаемости выигрыши заметно уменьшаются. Имеются диапазоны определяющих параметров, когда получаются формы ползуна как с большой несущей способностью, так и с большой жесткостью.

Ограничение величины расхода смазки через пористую вставку достигается уменьшением параметров  $\beta$  и  $P_s$ , а также продольного размера пористой вставки, что сопровождается потерями в несущей способности и статической жесткости. Показано, что оптимальное положение вставки – в средней части ползуна.

Автор благодарит А.Н. Крайко за обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00422) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2124.2003.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Constantinescu V.N.* Lubrificatia cu gaze. Bucuresti: Editura Acad. Rep. Popul. Romine, 1963 = *Константинеску В.Н.* Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
2. *Шейнберг С.А., Жедь В.П., Шишеев М.Д.* Опоры скольжения с газовой смазкой. М.: Машиностроение, 1969. 334 с.
3. *Пинегин С.В., Табачников Ю.Б., Сипенков И.Е.* Статические и динамические характеристики газостатических опор. М.: Наука, 1982. 265 с.
4. *Пеуми Ю.В.* Газовая смазка. М.: Изд-во. МГТУ, 1993. 381 с.
5. *Marinkovic A., Rosoc B., Jankovic M.* Optimum design for porous metal bearing // Intern. J. Appl. Mech. and Eng. 2002. V. 7. № 3. P. 875–885.
6. *Maday C.J.* The one-dimensional optimum hydrodynamic gas slider bearing // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1968. V. 90. № 1. P. 281–284 = Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1968. Т. 90. № 4. С. 294–299.
7. *Грабовский В.И.* Оптимальное профилирование ползуна, обеспечивающее его минимальное сопротивление // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 2. С. 14–25.
8. *Крайко А.Н.* Изопериметрическая задача о профилировании оптимального зазора бесконечного плоского ползуна // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 222–233.
9. *Грабовский В.И.* Об определении зазора плоского ползуна, реализующего максимум жесткости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 14–23.