

УДК 539.3 : 629.7

© 2005 г. Г. Е. Якунина

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДВИЖУЩИХСЯ В СРЕДЕ ТЕЛ ПРИ УЧЕТЕ ТРЕНИЯ

В рамках модели локального взаимодействия тела и среды исследуются особенности построения оптимальных пространственных тел при учете трения. Предполагается, что давление на поверхности тела описывается двучленной формулой, квадратичной по скорости, с постоянным слагаемым, характеризующим прочность среды. Для записи касательных напряжений используются три модели трения: постоянное трение, трение, пропорциональное давлению, и смешанное трение. Проведен сравнительный анализ решений задач оптимизации формы тела по сопротивлению и по глубине проникания, полученных в классе пространственных конфигураций для разных моделей трения. Показано, что при заданной площади основания тела для всех моделей трения оптимальными являются формы, нормаль к которым в каждой точке составляет с направлением движения постоянный оптимальный угол. Этот угол не зависит от площади основания тела и определяется скоростью движения и параметрами модели, зависящими от характеристик среды. Показано влияние параметров моделей на оптимальные формы и для каждой модели получены соотношения, связывающие скорость движения и характеристики среды с оптимальным углом.

Известно, что при движении тела в плотных средах, таких как грунт и металл, силы трения существенно влияют на характеристики движения тела [1–5] и могут вызвать его разрушение [2]. Улучшить характеристики движения тела и снизить риск его разрушения можно, если использовать формы тела, имеющие на начальном этапе движения минимальное сопротивление или обеспечивающие при известной начальной скорости движения максимум глубине проникания.

Поиск оптимальных форм должен проводиться с учетом трения. Однако из-за разнообразия свойств сред, часто зависящих от скорости и условий нагружения, трудно дать точные количественные оценки влияния трения, и поэтому для его учета строятся приближенные модели [1–5]. Для описания сил, действующих на поверхности тела при его высокоскоростном движении в средах, широкое распространение получили модели локального взаимодействия (МЛВ), когда предполагается, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела. Так, при исследовании движения тела в плотных средах наиболее часто используется двучленная МЛВ [4–11], в рамках которой давление на поверхности тела описывается квадратичной по скорости формулой с постоянным слагаемым, характеризующим прочность среды, а для записи касательных напряжений берется одна из двух моделей: модель постоянного трения или модель трения Кулона. Для модели с постоянным трением принимается, что касательные напряжения равны своему предельному максимальному значению, постоянному вдоль всей поверхности тела. Такая модель часто используется для записи касательных напряжений на поверхности тела при его высокоскоростном движении в средах малой и средней прочности типа газа и грунтов [4, 5]. Модель трения Кулона, когда касательные напряжения считаются пропорциональными давлению, чаще используется для описания сил, действующих на тело при его движении в прочных средах, таких как бетон и металл [3, 7, 10, 11].

Использование двучленной МЛВ с постоянными не зависящими от скорости параметрами дает возможность представить сопротивление и глубину проникания тела в виде функционалов [4, 7–14], явно зависящих от формы тела. Это позволяет при поиске оптимальных форм применять методы вариационного исчисления, и было доказано [8, 12–14], что в классе пространст-

венных форм при заданной площади основания тела минимум сопротивления и максимум глубины проникания достигаются телами, нормаль к поверхности которых в каждой точке составляет с направлением движения постоянный оптимальный угол. Этот угол не зависит от площади основания тела и определяется характеристиками среды и скоростью движения тела через постоянные, входящие в закон сопротивления. В общем случае оптимальные углы для тел минимального сопротивления и тел с максимальной глубиной проникания разные, но методика построения этих тел одна [12–14].

Трение влияет на форму оптимальных тел, и было показано [13, 14], что без учета трения в рамках двучленной МЛВ оптимальные пространственные тела строятся из участков поверхностей, нормаль которых перпендикулярна направлению движения. При заданной ненулевой площади основания тела оптимальными в этом случае будут формы с бесконечной площадью боковой поверхности. Такие формы не имеют практического применения, и следовательно, при решении задач оптимизации тела учет трения необходим, но выбор модели трения в приложении к конкретной среде должен быть оправдан.

Обобщением рассмотренных моделей трения на случай движения тела в плотных средах является смешанная модель трения, предложенная [1] для грунтов. В рамках этой модели касательные напряжения рассчитываются по закону трения Кулона, если они не превышают предела текучести материала среды при сдвиге, и равны пределу текучести в противном случае. В результате, при произвольной форме тела на его поверхности могут быть участки, на которых касательные напряжения рассчитываются по разным законам трения.

Решение задачи о теле минимального сопротивления при смешанной модели трения в рамках двучленной МЛВ было найдено [9] в классе тел вращения. В классе пространственных форм анализ особенностей решения этой задачи не проводился. Задача о теле с максимальной глубиной проникания при смешанной модели трения ранее не рассматривалась.

*Замечание.* После отправки этой статьи в печать вышла работа К.А. Коневой и Н. А. Остапенко “Пространственные тела наименьшего сопротивления при движении в плотных средах в условиях смешанной модели трения” // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика. Механика. 2004. № 6. С. 34–39. С использованием известного подхода [12–14] в ней выполнен анализ решения задачи о теле минимального сопротивления в рамках смешанной модели трения. Однако отметим, что результаты расчетов даны в ней для среды, названной “грунтом”, прочностные характеристики которой почти на два порядка ниже, чем у грунтов; следовательно, выводы, сделанные в указанной работе на основе расчетов, не могут использоваться при рассмотрении реальных плотных сред.

Ниже в рамках двучленной МЛВ в классе пространственных конфигураций выполнен сравнительный анализ решений задач о теле минимального сопротивления и теле с максимальной глубиной проникания для трех моделей трения: постоянное трение, трение по Кулону, смешанное трение. Показаны различия в решениях и исследовано влияние параметров моделей на оптимальные формы тела.

**1. Модель взаимодействия тела со средой.** Силу воздействия среды на прямолинейно движущееся в ней твердое недеформируемое тело запишем в виде

$$\mathbf{F} = \iint_S [\sigma_n \mathbf{n} + \sigma_\tau \boldsymbol{\tau}] dS \quad (1.1)$$

где  $\sigma_n$  и  $\sigma_\tau$  – нормальное и касательное напряжения на поверхности тела,  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  – единичные векторы внутренней нормали и касательной к элементу поверхности, а интегрирование ведется по поверхности контакта тела со средой  $S$ .

Считаем, что каждый элемент поверхности  $S$  взаимодействует со средой независимо от других участков тела, и силовое воздействие на него можно описать моделью локального взаимодействия (МЛВ) [4–11]. Для записи напряжений в рамках МЛВ используем двучленные формулы, содержащие динамический и постоянный члены:

$$\sigma_n = A_1 U^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 + B_1, \quad \sigma_\tau = A_2 U^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 + B_2 \quad (1.2)$$

где  $U$  – скорость тела,  $\mathbf{u}$  – единичный вектор скорости, а коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) – параметры модели, определяемые характеристиками среды. При определенных до-

пушениях первым выражением (1.2) описывается давление на поверхности тела при его движении в газе [4] и плотных средах типа грунтов и металлов [5–10]. Слагаемое  $B_1$  в этом случае характеризует сопротивляемость среды деформированию, а коэффициент  $A_1$  имеет порядок плотности среды. Для конкретных сред значения  $A_1$  и  $B_1$  берутся либо из решения модельных задач [5, 6], либо определяются экспериментально [15, 16]. Так, для глинистых сред, согласно решению, полученному для несжимаемой упругопластической среды [6], можно принять

$$A_1 = 3\rho_0/2, \quad B_1 = 4\tau_s(1 + \ln(\mu/\tau_s))/3 \quad (1.3)$$

где  $\rho_0$  – плотность среды,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\tau_s$  – предел текучести материала среды при сдвиге, которые постоянны и не зависят от скорости.

В рамках МЛВ вектор  $\tau$  компланарен векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{n}$ :

$$\tau = [[\mathbf{u} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}] / |\mathbf{u} \times \mathbf{n}| \quad (1.4)$$

Для записи касательных напряжений  $\sigma_\tau$  будем использовать три модели: постоянное трение, трение по Кулону и смешанную модель трения. Модель постоянного трения часто выбирается для записи  $\sigma_\tau$  на поверхности тела при его высокоскоростном движении в средах малой и средней прочности типа газа и грунтов [4, 5], когда предполагается, что касательные напряжения достигли своего максимального значения и равны пределу текучести  $\tau_s$ , постоянному вдоль всей поверхности тела:  $\sigma_\tau = \tau_s$ . Тогда

$$A_2 = 0, \quad B_2 = \tau_s \quad (1.5)$$

Модель Кулона чаще используется для описания сил, действующих на тело при его движении в прочных средах, таких как бетон и металл [3, 7, 10, 11]. В рамках этой модели касательные напряжения считаются пропорциональными давлению:  $\sigma_\tau = \mu_0\sigma_n$ , где  $\mu_0$  – постоянный коэффициент трения, и в этом случае

$$A_2 = \mu_0 A_1, \quad B_2 = \mu_0 B_1 \quad (1.6)$$

Обобщением рассмотренных моделей на случай движения тела в плотных средах является смешанная модель трения [1], согласно которой касательные напряжения рассчитываются по закону трения Кулона, если они не превышают  $\tau_s$ , и равны  $\tau_s$  в противном случае:

$$\sigma_\tau = \begin{cases} \mu_0\sigma_n, & \text{если } \mu_0\sigma_n \leq \tau_s, \\ \tau_s, & \text{если } \mu_0\sigma_n \geq \tau_s, \end{cases} \quad (1.7)$$

В рамках модели (1.7) при произвольной форме тела на его поверхности могут быть участки, на которых касательные напряжения вычисляются по разным законам трения. Однако из анализа условий (1.7), используя выражения (1.2), можно получить, что это возможно, лишь когда скорость движения тела и параметры среды удовлетворяют неравенству

$$0 < b < \lambda; \quad b = C/\mu_0 - 1, \quad C = \tau_s/B_1, \quad \lambda = A_1 U^2/B_1 \quad (1.8)$$

При нарушении неравенства (1.8) на всей поверхности тела для вычисления  $\sigma_\tau$  должна использоваться единая модель трения. Так, если  $b \leq 0$ , то всегда верно второе условие (1.7), и  $\sigma_\tau$  следует вычислять по модели постоянного трения (1.5), а если  $b \geq \lambda$ , то всегда верно первое неравенство (1.7), и для вычисления  $\sigma_\tau$  следует использовать модель Кулона (1.6).

Величина  $C$  определяется лишь характеристиками среды, коэффициент  $\mu_0$  зависит от фрикционных свойств взаимодействующих материалов среды и тела, а значе-

ние  $\lambda$  зависит от свойств среды и скорости движения тела. Оценки значений  $C$  и  $\mu_0$  можно получить из анализа приближений, принятых для них в реальных средах [4–6, 10].

Так, используя для  $B_1$  выражение (1.3) и учитывая, что для большинства сред  $\mu/\tau_s \gg 1$ , получаем, что в диапазоне значений  $\mu/\tau_s$  от 5 до  $10^3$  величина  $C \in [0.09, 0.29]$ . Аналогичные оценки для  $C$  получаются и из других приближений [4, 5, 10]. Для коэффициента  $\mu_0$  наиболее часто используются [10] значения  $\mu_0 \in [0.01, 0.1]$  при движении металлического ударника в металлической преграде и значения  $\mu_0 \in [0.1, 0.2]$  при движении металлического ударника в грунте.

Таким образом, для безразмерных величин  $C$  и  $\mu_0$  можно записать ограничения, которые ниже используются при выводе результатов:

$$0.1 \leq C \leq 0.3, \quad 0.01 \leq \mu_0 \leq 0.2 \quad (1.9)$$

Использование модели (1.2) при любом из рассмотренных выше способов вычисления  $\sigma_\tau$  позволяет представить силу  $\mathbf{F}$  (1.1) и ее компоненты в явной зависимости от формы тела. Это свойство двучленной МЛВ (1.2) при конкретно выбранных законах трения было использовано ранее [4, 7–9, 11–14] при решении многочисленных задач оптимизации формы тела. Однако отметим, что для смешанной модели трения (1.7) решения задачи о теле с максимальной глубиной проникания ранее найдено не было.

Ниже на основании выводов, полученных [8, 12–14] для оптимальных форм в рамках МЛВ обобщенного вида, сравнительный анализ решений задач о теле минимального сопротивления и теле с максимальной глубиной проникания для двучленной модели (1.2) и моделей трения (1.5)–(1.7) дается в классе пространственных конфигураций.

**2. Пространственные формы минимального сопротивления.** Пусть тело движется в направлении, противоположном направлению вектора  $\mathbf{x}$ :  $\mathbf{x} = -\mathbf{u}$ . Считаем, что  $S$  – это вся боковая поверхность тела и на ней

$$\alpha = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \geq 0 \quad (2.1)$$

Используя выражения (1.2) и (1.4) для вычисления силы  $\mathbf{F}$  (1.1) и учитывая, что  $(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}) = \gamma$ ,  $\gamma = (1 - \alpha^2)^{1/2}$ , запишем сопротивление тела в виде

$$D = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}) = B_1 \int_S f(\alpha) \alpha dS; \quad f(\alpha) = 1 + \lambda \alpha^2 + B\gamma(k\lambda \alpha^2 + 1)/\alpha, \quad B = B_2/B_1 \quad (2.2)$$

где  $k = 0$  для модели (1.5) и  $k = 1$  для модели (1.6). При фиксированной скорости значение  $\lambda$  постоянно. Коэффициенты  $B$  и  $k$  также постоянны и не зависят от  $\alpha$ , если напряжения  $\sigma_\tau$  (1.2) вычисляются по модели постоянного трения (1.5):

$$B = C, \quad k = 0 \quad (2.3)$$

или модели трения Кулона (1.6):

$$B = \mu_0, \quad k = 1 \quad (2.4)$$

В этих случаях выражение (2.2) для  $f(\alpha)$  можно записать в виде

$$f(\alpha) = \begin{cases} f_1(\alpha) & \text{для модели постоянного трения} \\ f_2(\alpha) & \text{для модели трения Кулона} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$f_1(\alpha) = 1 + \lambda \alpha^2 + \gamma C / \alpha, \quad f_2(\alpha) = (1 + \lambda \alpha^2)(1 + \gamma \mu_0 / \alpha)$$

При смешанной модели трения (1.7) значения  $B$  и  $k$  зависят от  $\alpha$ , и если

$$\alpha \leq \alpha_k, \quad \alpha_k = (b/\lambda)^{1/2} \tag{2.6}$$

то для  $B$  и  $k$  используются выражения (2.4) и  $f(\alpha) = f_2(\alpha)$ . При  $\alpha > \alpha_k$  для  $B$  и  $k$  берутся выражения (2.3) и  $f(\alpha) = f_1(\alpha)$ . Если  $f(\alpha)$  рассматривать как функцию действительного переменного  $\alpha$  на отрезке  $[0, 1]$ , то функция  $f(\alpha)$  положительна и непрерывна:  $f_1(\alpha_k) = f_2(\alpha_k)$ , и при учете выражений (2.5) представляется в виде

$$f(\alpha) = \inf(f_1(\alpha), f_2(\alpha)) \tag{2.7}$$

Независимо от рассмотренных выше способов вычисления  $\sigma_\tau$  модель (1.2) – это частный случай записи напряжений в рамках МЛВ. В рамках МЛВ обобщенного вида было доказано [12–14], что в классе пространственных конфигураций при безотрывном обтекании тела и заданной площади основания тела  $S_b$  минимум сопротивления достигается телами, в каждой точке поверхности которых выполнено условие

$$\alpha = \alpha^* = \text{const} \tag{2.8}$$

где  $\alpha^*$  – значение  $\alpha$ , при котором функция  $f(\alpha)$  на отрезке  $[0, 1]$  имеет минимум. Это значение не зависит от  $S_b$  и определяется параметрами  $\lambda$ ,  $k$  и  $B$ , входящими в выражение (2.2) для  $f(\alpha)$ .

Было показано [12–14], что при заданных  $S_b$  и ограничениях, налагаемых на длину и поперечные размеры тела, можно построить бесконечное множество тел, удовлетворяющих условию (2.8). Эти тела были названы абсолютно оптимальными (АОТ), так как все они имеют одинаковое сопротивление, меньше которого при заданной площади основания получить нельзя.

Минимум функции  $f(\alpha)$  ищется среди ее локальных и краевых экстремумов. Значения  $\alpha = \alpha_m$  для локальных минимумов удовлетворяют условиям:  $f'(\alpha_m) = 0$  и  $f''(\alpha_m) > 0$ . Используя выражение (2.2) для функции  $f(\alpha)$ , уравнение  $f'(\alpha) = 0$  запишем в виде

$$2\lambda\alpha^3\gamma + kB\lambda\alpha^2(\gamma^2 - \alpha^2) - B = 0 \tag{2.9}$$

Краевой минимум возможен лишь при  $\alpha = 1$ , так как если  $\alpha \rightarrow 0$ , то  $f(\alpha) \rightarrow \infty$ . В результате искомое значение  $\alpha^*$  (2.8) таково, что

$$f(\alpha^*) = \inf(f(\alpha_m), f(1)), \quad f(1) = 1 + \lambda \tag{2.10}$$

Значение  $f(1)$  одинаково для моделей (1.5) и (1.6), и с ним должны сравниваться локальные минимумы функции  $f(\alpha)$ . Если  $f(1) < f(\alpha_m)$ , то  $\alpha^* = 1$ , и АОТ – это торец заданной площади.

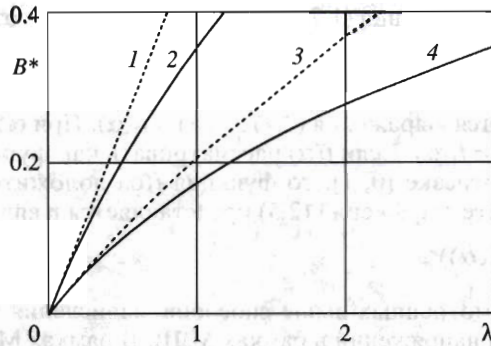
Для моделей трения (1.5) и (1.6) решения уравнения (2.9) определяются параметрами  $B$  и  $\lambda$ . В приближении тонкого тела, когда

$$\alpha^2 \ll 1 \tag{2.11}$$

эти решения для модели (1.5) зависят от значения одного параметра  $E$ ,  $E = B/\lambda$ :

$$\alpha_m = (E/2)^{1/3} \tag{2.12}$$

Для модели (1.6) приближенные решения (2.9) также записываются выражением (2.12), но, как следует из формулы Картано для корней кубических уравнений, это можно сделать лишь при дополнительном условии  $\lambda\mu_0^2/27 \ll 1$ . Оно верно при ограничениях (1.9) и  $\lambda \leq 50$ , и следовательно, в этом случае для обеих моделей трения (1.5) и (1.6) для  $\alpha_m$  в приближении (2.11) можно использовать выражение (2.12).



Фиг. 1

Отметим, что с ростом  $B$  значения  $\alpha_m$  увеличиваются, а с ростом  $\lambda$  уменьшаются. Можно показать, что с увеличением  $\alpha_m$  растут значения  $f(\alpha_m)$ . Рост  $f(\alpha_m)$ , когда  $\alpha^* = \alpha_m$ , ограничен величиной  $f(1)$ , достигаемой при  $B = B^*$  и  $\alpha_m = \alpha_m^* : f(\alpha_m^*) = f(1)$ . Используя уравнение (2.9), можно записать выражения

$$B^* = \lambda / (2\sqrt{1+k\lambda}), \quad \alpha_m^* = 1/\sqrt{1+k\lambda}$$

Зависимость  $B^*$  от  $\lambda$  показана на фиг. 1 кривыми 1 и 2, построенными для моделей (1.5) и (1.6) соответственно. Отметим, что если  $\lambda > 1$ , то  $B^* > 0.3$ , и, следовательно, при ограничениях (1.9)  $B < B^*$ . При  $B < B^*$  значение  $\alpha^* = \alpha_m < \alpha_m^* \leq 1/\sqrt{2}$ . Используя соотношения (2.1) и (2.8), можно увидеть, что в этом случае угол между внешней нормалью к поверхности АОТ и направлением движения всегда больше  $45^\circ$ . Если  $B \geq B^*$ , то  $\alpha^* = 1$ , и этот угол равен  $0^\circ$ .

При  $B \leq 0.3$  и  $\lambda \in [1, 50]$  выражение (2.12) дает хорошее приближение к точным решениям уравнения (2.9), и можно показать, что в этом случае для моделей трения (1.5) и (1.6) сопротивление тела, построенного при  $\alpha = \alpha_m$  (2.12), увеличивается по сравнению с сопротивлением АОТ менее чем на 3%.

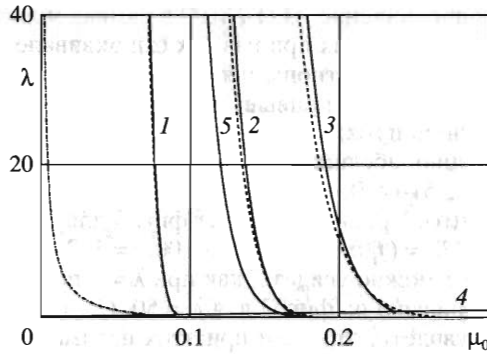
Анализ решений (2.9) проведен выше для моделей трения (1.5) и (1.6). При смешанной модели трения (1.7), согласно соотношениям (2.7) и (2.10), минимум  $f(\alpha)$  ищется среди минимумов функций (2.5) и зависит от  $\mu_0$ ,  $C$  и  $\lambda$ .

Область значений  $\mu_0$  и  $\lambda$ , удовлетворяющих неравенству (1.8), при которых используется модель трения (1.7), при  $C = 0.1$  показана на фиг. 2, и она расположена между штрихпунктирной линией, выходящей из точки с координатами  $(\mu_0, \lambda) = (0.1, 0)$ , и линией  $\mu_0 = 0.1$ . Внутри этой области на фиг. 2 построена кривая 1, связывающая при  $C = 0.1$  параметры  $\mu_0$  и  $\lambda$ , для которых

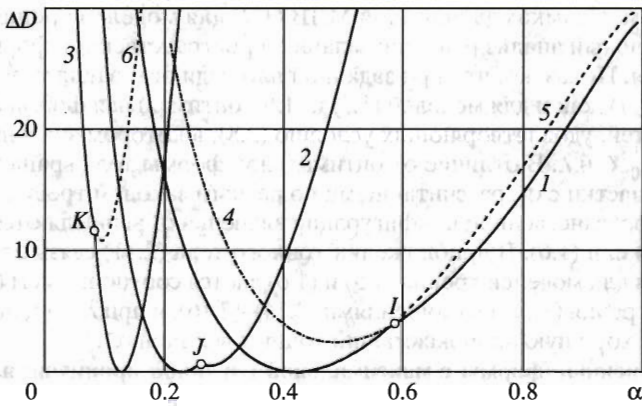
$$\inf(f_1(\alpha)) = \inf(f_2(\alpha)) \quad (2.13)$$

Если точка с координатами  $(\mu_0, \lambda)$  лежит ниже кривой 1, то значение  $\alpha^*$  (2.8), используемое при построении АОТ, рассчитывается по модели трения (1.6), иначе по модели трения (1.5). С ростом  $C$  область значений  $\mu_0$  и  $\lambda$ , для которых  $\alpha^*$  рассчитывается по модели (1.6), расширяется, и на фиг. 2 она лежит слева от кривых 2 и 3, построенных для  $C = 0.2$  и  $C = 0.3$  соответственно.

На фиг. 2 дана также кривая 4, построенная для  $\mu_0$  и  $\lambda$ , при которых  $f(\alpha_m) = f(1)$ . Если точка  $(\mu_0, \lambda)$  лежит выше кривой 4, то  $\alpha^* = \alpha_m$ , иначе  $\alpha^* = 1$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Сплошные линии 1–3 на фиг. 2 построены для значений  $\mu_0$  и  $\lambda$ , при которых выполнено условие (2.13). В приближении (2.11) локальные минимумы функций (2.5) достигаются при  $\alpha = \alpha_m$  (2.12), и в этом случае условие (2.13) верно, если  $\lambda = \lambda_k$ , где

$$\lambda_k = 27((C/\mu_0)^{2/3} - 1)^3 / (2\mu_0^2) \tag{2.14}$$

Значения  $\lambda_k$  в зависимости от  $\mu_0$  представлены на фиг. 2 штриховыми линиями 1, 2 и 3, построенными при  $C = 0.1, 0.2$  и  $0.3$  соответственно. Можно увидеть, что эти кривые хорошо аппроксимируют точные значения  $\mu_0$  и  $\lambda$ , удовлетворяющие условию (2.13) без предположения о тонкости тела.

В результате в приближении (2.11) значения  $\alpha^* = \alpha_m$  находятся из условий

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha_1, & \text{если } \lambda \geq \lambda_k \\ \alpha_2, & \text{если } \lambda \leq \lambda_k \end{cases} \tag{2.15}$$

где

$$\alpha_1 = (C/(2\lambda))^{1/3}, \quad \alpha_2 = (\mu_0/(2\lambda))^{1/3} \tag{2.16}$$

Сопrotивление АОТ меньше сопротивления любого тела, имеющего ту же площадь основания. Для  $C = 0.2$  и  $\mu_0 = 0.15$  на фиг. 3 сплошными линиями 1, 2 и 3 для  $\lambda = 1, 5$  и 50 соответственно даны величины  $\Delta D$ ,  $\Delta D = (D(\alpha)/D(\alpha^*) - 1) \times 100$ , показывающие

на сколько процентов сопротивление АОТ  $D(\alpha^*)$  в рамках модели (1.7) меньше сопротивления конусов  $D(\alpha)$ , построенных при разных  $\alpha$  и эквивалентных АОТ по длине и площади основания. Используя соотношения (2.2), получаем, что  $\Delta D = (\Delta f - 1) \times 100$ , где  $\Delta f = f(\alpha)/f(\alpha^*)$ , и следовательно, кривые 1–3 на фиг. 3 можно использовать для исследования поведения функции  $f(\alpha)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Кривые 1, 2 и 3 имеют точки излома  $I, J$  и  $K$  соответственно, абсциссы которых соответствуют  $\alpha = \alpha_k$ , при которых, согласно соотношениям (2.5)–(2.7), происходит пересечение графиков функций  $f_1$  и  $f_2$  и смена выражения для  $f(\alpha)$ . Кривыми 4 и 5 на фиг. 3 для  $\lambda = 1$  даны значения  $\Delta D_1$  и  $\Delta D_2$  соответственно, где  $\Delta D_i = (f_i(\alpha)/f(\alpha^*) - 1) \times 100, i = 1, 2$ . Из анализа взаимного расположения кривых 1, 4 и 5 можно увидеть, как при  $\lambda = 1$  происходит пересечение графиков функций  $f_1$  и  $f_2$ . Кривая 6 на фиг. 3 для  $\lambda = 50, C = 0.2$  и  $\mu_0 = 0.15$  представляет значения  $\Delta D_2$ , и можно увидеть, что если при этих параметрах использовать модель трения (1.6), то оптимальное тело, полученное в рамках этой модели, при смешанной модели трения (1.7) будет иметь сопротивление на 5% большее, чем сопротивление АОТ.

Таким образом, в рамках двучленной МЛВ (1.2) для моделей трения (1.5)–(1.7) выполнен сравнительный анализ решений задачи о пространственной форме минимального сопротивления. Показано, что при заданной площади основания тела для смешанной модели трения (1.7), как и для моделей (1.5) и (1.6), оптимальная форма строится из участков поверхностей, удовлетворяющих условию (2.8), в котором значение  $\alpha^*$  находится по параметрам  $\mu_0, C$  и  $\lambda$ . В отличие от оптимальной формы тела вращения [9], на которой возможны участки с  $\sigma_\tau$ , рассчитанными по разным законам трения, на поверхности оптимальной пространственной конфигурации значения  $\sigma_\tau$  вычисляются по единому закону трения (1.5) или (1.6). В приближении тонкого тела (2.11) связь  $\alpha^* = \alpha_m$  с характеристиками среды для моделей трения (1.5) и (1.6) дается соотношением (2.12), а для смешанной модели трения (1.7) соотношениями (2.14)–(2.16), и при  $\lambda \in [1, 50]$  и ограничениях (1.9) они дают хорошую аппроксимацию точных величин  $\alpha^*$ .

**3. Пространственные формы с максимальной глубиной проникания.** Используя для сопротивления тела  $D$  выражение (2.2), запишем уравнение движения тела массы  $m$  в виде

$$m dU/dt = -D, \quad D = A_1 U^2 D_1 + B_1 D_2 \quad (3.1)$$

где

$$D_i = \iint_S g_i(\alpha) \alpha dS, \quad i = 1, 2; \quad g_1(\alpha) = \alpha^2 \left( 1 + kB \frac{\gamma}{\alpha} \right), \quad g_2(\alpha) = 1 + B \frac{\gamma}{\alpha} \quad (3.2)$$

Учитывая, что  $dH = U dt$ , где  $H$  – длина траектории тела, а также то, что

$$dU/dt = 1/2 dU^2/dH$$

уравнение (3.1) можно переписать для переменных  $H$  и  $\lambda$  и получить для полной длины траектории движения тела  $H_0$  выражение

$$H_0 = \frac{m}{2A_1} \int_0^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\lambda D_1 + D_2}, \quad \lambda_0 = \frac{A_1 U_0^2}{B_1} \quad (3.3)$$

где  $U_0$  – начальная скорость движения тела.

Если функционалы  $D_1$  и  $D_2$  не зависят от  $\lambda$ , то

$$H_0 = \frac{m}{2A_1 D_1} \ln \left( 1 + \lambda_0 \frac{D_1}{D_2} \right) \quad (3.4)$$

Для плотных сред  $H_0$  – глубина проникания тела. Выражение (3.4) можно использовать, если  $D_1$  и  $D_2$  постоянны и параметры  $k$  и  $B$ , входящие в выражения (3.2), не зависят от  $U$ . Это верно при моделях трения (1.5) или (1.6), когда  $k$  и  $B$  определяются соотношениями (2.3) или (2.4).

Было доказано [8], что в классе пространственных форм при заданных массе  $m$  и площади основания  $S_b$  максимум глубины проникания  $H_0$  (3.4) достигается телами, в каждой точке поверхности которых так же, как и для тел минимального сопротивления, выполнено условие (2.8).

При  $\alpha = \text{const}$

$$H_0 = M_0 h(\alpha), \quad M_0 = \frac{m\lambda_0}{2S_b A_1} = \text{const} \tag{3.5}$$

$$h(\alpha) = \frac{\ln(1+q)}{q(1+B\gamma/\alpha)}, \quad q = \lambda_0 \alpha^2 \frac{\alpha + kB\gamma}{\alpha + B\gamma}$$

Здесь выражение для  $h(\alpha)$  записано в согласии с соотношениями (3.2) и (3.4).

Для форм с максимальной глубиной проникания значение  $\alpha^*$  (2.8) – это аргумент  $\alpha$ , при котором функция  $h(\alpha)$  достигает максимума на отрезке  $[0, 1]$ . Величина  $\alpha^*$  не зависит от  $m$  и  $S_b$  и определяется параметрами  $\lambda_0$ ,  $k$  и  $B$ .

Максимум функции  $h(\alpha)$  ищется среди ее локальных и краевых экстремумов. Значения  $\alpha_m$ , при которых функция  $h(\alpha)$  достигает локального максимума, удовлетворяют условиям:  $h'(\alpha_m) = 0$  и  $h''(\alpha_m) < 0$ . Краевой максимум функции  $h(\alpha)$  возможен лишь при  $\alpha = 1$ , так как если  $\alpha \rightarrow 0$ , то  $h(\alpha) \rightarrow 0$ . Поэтому искомое значение  $\alpha^*$  таково, что

$$h(\alpha^*) = \sup(h(\alpha_m), h(1)), \quad h(1) = \ln(1 + \lambda_0)/\lambda_0 \tag{3.6}$$

Значение  $h(1)$  одинаково для моделей (1.5) и (1.6), и с ним должны сравниваться локальные максимумы функции  $h(\alpha)$ . Если  $h(1) > h(\alpha_m)$ , то  $\alpha^* = 1$ , и тело максимальной глубины проникания – это торец заданной площади.

Уравнение  $h'(\alpha) = 0$  запишем в виде

$$2\lambda_0 \alpha^3 \gamma + kB\lambda_0 \alpha^2 (\gamma^2 - \alpha^2) - QB = 0, \quad Q = q^2 / ((q+1)\ln(q+1) - q) \tag{3.7}$$

В отличие от уравнения (2.9), записанного для экстремумов  $f(\alpha)$ , в уравнении (3.7) присутствует функция  $Q = Q(q)$ . При  $q < 1$  для  $Q$  есть приближение

$$Q = 2/(1 - q/3)$$

и если  $q/3 \ll 1$ , то  $Q = 2$ . Так как  $q \leq \lambda_0 \alpha^2$ , то это верно, когда

$$\alpha^2 \ll 3/\lambda_0 \tag{3.8}$$

При условии (3.8) в приближении тонкого тела (2.11) для **обеих** моделей трения (1.5) и (1.6) решение уравнения (3.7), как и решение уравнения (2.9), определяется значением параметра  $E$  и имеет вид

$$\alpha_m = E^{1/3}, \quad E = B/\lambda_0 \tag{3.9}$$

Для модели (1.6) запись решения в виде (3.9) допустима, если выполнено условие  $\lambda_0 \mu_0^2 / 54 \ll 1$ , которое верно при ограничениях (1.9) и  $\lambda_0 \leq 50$ .

При фиксированном  $\lambda_0$ , если  $B \rightarrow 0$ , то  $\alpha_m \rightarrow 0$ , и можно показать, что  $h(\alpha_m) \rightarrow 1$ . Так как  $h(1) = \ln(1 + \lambda_0)/\lambda_0 < 1$ , то всегда есть  $B^*$ , такое, что при  $B < B^*$  значения  $h(\alpha_m) > h(1)$ , и следовательно, при этих  $B$  величина  $\alpha^* = \alpha_m$ . В то же время, если при фикси-

рованном  $\lambda_0$  увеличивать  $B$ , то  $\alpha_m$  будет расти, а  $h(\alpha_m)$  уменьшаться. Рост  $\alpha_m$  ограничен величиной  $\alpha_m^*$ , достигаемой при  $B = B^*$ :  $h(\alpha_m^*) = h(1)$ . Можно показать, что, как и для тел минимального сопротивления,  $\alpha_m^* \leq 1/\sqrt{2}$ . Следовательно, при  $B < B^*$  значение  $\alpha^* = \alpha_m < 1/\sqrt{2}$ , и угол между внешней нормалью к поверхности оптимального тела и направлением движения всегда больше  $45^\circ$ . При  $B \geq B^*$  значение  $\alpha^* = 1$ , и этот угол равен  $0^\circ$ .

Отметим, что резкая смена типа решения при достижении параметром трения некоторой величины была замечена [7] при численном решении задачи о теле вращения с максимальной глубиной проникания в рамках модели (1.6). Однако этот результат был воспринят [7] как неожиданный и интерпретирован как переход к минимуму функционала глубины. Выше показано, что смена типа решения при  $B \geq B^*$  закономерна, и она означает, что максимум функционала глубины от локального экстремума переходит к краевому.

Зависимость  $B^*$  от  $\lambda_0$  показана на фиг. 1 кривыми 3 и 4, построенными для моделей трения (1.5) и (1.6) соответственно. Можно увидеть, что при  $\lambda_0 > 2$  и ограничениях (1.9) значения  $B^* > B$ , и, следовательно, в этом случае  $\alpha^* = \alpha_m$ .

Решение (3.9) получено в приближении (2.11) при условии (3.8), которое при больших  $\lambda_0$  не всегда строго выполнено для  $\alpha_m$ . Однако можно показать, что для обеих моделей трения при  $\lambda_0 \in [2, 50]$  и ограничениях (1.9) выражение (3.9) дает хорошее приближение к точным значениям  $\alpha_m$ , и глубина проникания тел, построенных при  $\alpha = \alpha_m$  (3.9), меньше максимальной не более чем на 0.5%.

Результаты сравнения глубины проникания тел минимального сопротивления с максимальной глубиной проникания, найденной при тех же параметрах, что и минимальное сопротивление, показали, что при  $\lambda_0 \in [2, 50]$  и ограничениях (1.9) глубина проникания тел, построенных при  $\alpha = \alpha_m$  (2.12), меньше максимальной не более чем на 3%. Этот вывод важен для практического применения полученных результатов, так как из анализа выражений (2.12) и (3.9) можно увидеть, что ошибка в значениях параметра  $B$  даже в два раза допустима, если при построении тел используется соотношение  $\alpha = \alpha_m$  (3.9). Тогда при  $\lambda_0 \in [2, 50]$  и ограничениях (1.9) глубина проникания построенных тел будет мало отличаться от максимальной.

Анализ решений задачи о теле с максимальной глубиной проникания проведен выше для моделей трения (1.5) и (1.6), когда глубина проникания  $H_0$  (3.3) представляется в виде функционала (3.4). При смешанной модели трения (1.7) для  $H_0$  нет записи, подобной (3.4), так как в этом случае параметры  $k$  и  $B$ , входящие в выражения (3.2) для  $D_1$  и  $D_2$ , зависят от  $\lambda$  и  $\alpha$ . При произвольной форме тела значения  $k$  и  $B$  могут быть разными на разных участках тела, а на одном участке они могут меняться при уменьшении  $\lambda$  от  $\lambda_0$  до нуля.

Однако это не исключает возможности поиска максимума величины  $H_0$  (3.3) на основе методов вариационного исчисления. При известных значениях  $m$ ,  $S_b$  и  $\lambda_0$  глубина проникания  $H_0$  (3.3) однозначно определяется формой тела. Следовательно, и в этом случае  $H_0$  можно рассматривать как функционал, зависящий от поверхности тела  $S$ .

Пусть поверхность  $S$  в цилиндрической системе координат  $(x, r, \theta)$  определяется уравнением  $x = \chi(r, \theta)$ , где  $\chi$  — однозначная функция точек основания тела, контур которого описывается уравнением  $r = R(\theta)$ . Тогда  $\alpha dS = dS_b = r dr d\theta$ , и выражения (3.2) можно переписать в виде

$$D_i = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R^2(\theta)} g_i(\alpha) dr^2, \quad i = 1, 2; \quad \int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta = 2S_b \quad (3.10)$$

Отметим, что функции  $\alpha(r, \theta)$  и  $R(\theta)$  определяют поверхность  $S$  и не зависят друг от друга. Задачу построения пространственной формы тела с максимальной глубиной проникания сформулируем в виде: среди кусочно-гладких функций  $\alpha(r, \theta)$  и  $R(\theta)$ , удовлетворяющих условию (2.1) и последнему условию (3.10), найти такие, которые доставляют максимум функционалу  $H_0$  (3.3).

Функцию Лагранжа для функционала (3.3) запишем в виде

$$L = H_0(\alpha, R) + \xi_0 \int_0^{2\pi} R^2(\theta) d\theta \tag{3.11}$$

где  $\xi_0$  – постоянный множитель. Уравнения Эйлера для функций  $\alpha(r, \theta)$  и  $R(\theta)$  экстремальной поверхности находятся из условия  $\delta L = 0$ , которое при учете выражений (3.3) и (3.11) представляется в виде

$$-\frac{m}{2A_1} \int_0^{\lambda_0} \frac{\lambda \delta D_1 + \delta D_2}{(\lambda D_1 + D_2)^2} d\lambda + \xi_0 \int_0^{2\pi} \delta R^2 d\theta = 0 \tag{3.12}$$

Здесь в согласии с соотношениями (3.2) и (3.10)

$$\delta D_i = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R^2(\theta)} (g'_i(\alpha) \delta \alpha) dr^2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (g_i(\alpha_f) \delta R^2) d\theta, \quad i = 1, 2 \tag{3.13}$$

$$\alpha_f = \alpha(R(\theta), \theta); \quad g'_1(\alpha) = 2\alpha + kB \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\gamma}, \quad g'_2(\alpha) = -\frac{B}{\alpha^2 \gamma}$$

Так как величины  $\lambda_0, D_1, D_2$  и  $\xi_0$  – общие для всей поверхности тела, а  $\delta \alpha$  и  $\delta R^2$  независимы, то, используя выражения (3.13), можно увидеть, что равенство (3.12) выполняется, лишь когда функция  $\alpha(r, \theta)$  удовлетворяет условиям

$$\int_0^{\lambda_0} \frac{\lambda g'_1(\alpha) + g'_2(\alpha)}{(\lambda D_1 + D_2)^2} d\lambda = 0 \tag{3.14}$$

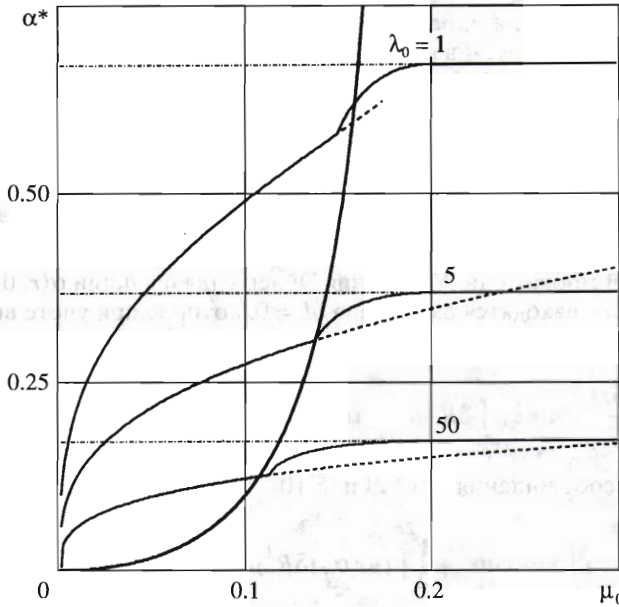
$$\int_0^{\lambda_0} \frac{\lambda g_1(\alpha_f) + g_2(\alpha_f)}{(\lambda D_1 + D_2)^2} d\lambda - \frac{4A_1}{m} \xi_0 = 0 \tag{3.15}$$

Уравнение (3.14) должно выполняться в каждой точке экстремальной поверхности тела, и в нем нет зависимости  $\alpha$  от  $r$  и  $\theta$ . Искомая функция  $\alpha$  определяется параметрами  $\lambda_0, \mu_0$  и  $C$ , общими для всей поверхности тела, и следовательно, на экстремальной поверхности выполнено условие (2.8). Уравнение (3.15) связывает значения  $\alpha$  на контуре основания тела и множитель Лагранжа  $\xi_0$ . Решение уравнения (3.15) не влияет на функцию  $\alpha$ , и это означает, что величина  $\alpha^*$  в условии (2.8) не зависит от заданного значения  $S_b$ .

Значение  $\alpha^*$  таково, что поверхность, построенная при  $\alpha = \alpha^*$ , доставляет максимум функционалу  $H_0$  (3.3). Экстремум функционала ищется при  $\alpha = \text{const}$ , и поэтому  $H_0$  можно рассматривать как функцию действительного переменного  $\alpha$ , определенную на отрезке  $[0, 1]$ :  $H_0 = M_0 h(\alpha)$ , где

$$h(\alpha) = (h_1(\alpha) + h_2(\alpha)) / (\lambda_0 \alpha^2) \tag{3.16}$$

$$h_1(\alpha) = \ln \frac{\lambda_0 \alpha^2 + C\gamma/\alpha + 1}{\lambda_1 \alpha^2 + C\gamma/\alpha + 1}, \quad h_2(\alpha) = \frac{\ln(\lambda_1 \alpha^2 + 1)}{1 + \mu_0 \gamma/\alpha}; \quad \lambda_1 = \lambda_1(\alpha)$$



Фиг. 4

При  $b \leq 0$ , где  $b$  определяется выражением (1.8), независимо от  $\alpha$  значение  $\lambda_1 = 0$ ,  $h_2(\alpha) = 0$ , и это соответствует случаю движения тела в рамках модели (1.5). При смешанной модели трения (1.7) для  $b$  выполнено условие (1.8), и если  $b/\alpha^2 < \lambda_0$ , то  $\lambda_1 = b/\alpha^2$ , иначе  $\lambda_1 = \lambda_0$ . В последнем случае  $h_1(\alpha) = 0$ , и на всем участке пути трение рассчитывается по модели (1.6).

Максимум  $H_0$  ищется среди локальных и краевых экстремумов функции  $h(\alpha)$ . Значения  $\alpha = \alpha_m$ , при которых  $h(\alpha)$  достигает локального максимума, удовлетворяют условиям:  $h'(\alpha_m) = 0$ ,  $h''(\alpha_m) < 0$ , и они находятся из уравнения (3.14). Краевой максимум функции  $h(\alpha)$  возможен лишь при  $\alpha = 1$ . Значение  $h(1) = \ln(1 + \lambda_0)/\lambda_0$ , и с ним должны сравниваться локальные максимумы функции  $h(\alpha)$ . Если  $h(1) > h(\alpha_m)$ , то  $\alpha^* = 1$ , и тело максимальной глубины проникания – это торец заданной площади. Следовательно, как и при поиске максимума функции  $h(\alpha)$  в рамках моделей (1.5) и (1.6), значение  $\alpha^*$  находится из условия (3.6), но при смешанной модели трения  $h(\alpha)$  определяется выражением (3.16). Используя последние два соотношения (3.13), можно показать, что в случаях, когда  $h_1(\alpha) = 0$  или  $h_2(\alpha) = 0$ , что соответствует движению тела в рамках моделей (1.5) или (1.6), уравнение (3.14) приводится к виду (3.7).

Решения уравнения (3.14), найденные при  $C = 0.2$ , в зависимости от  $\mu_0$  показаны на фиг. 4 сплошными линиями при разных значениях  $\lambda_0$ . Решения уравнения (3.7), найденные при тех же  $C$ ,  $\mu_0$  и  $\lambda_0$  для моделей (1.5) и (1.6), даны на фиг. 4 штрихпунктирными и штриховыми линиями соответственно. Можно увидеть, что при малых  $\mu_0$  значения  $\alpha_m$ , полученные из уравнения (3.14), совпадают с решениями уравнения (3.7), найденными для модели трения (1.6), а при  $\mu_0 \geq C$  эти решения совпадают с решениями уравнения (3.7), найденными для модели трения (1.5). При фиксированных  $C$  и  $\lambda_0$  есть область значений  $\mu_0$ , при которых решения уравнения (3.14) отличаются от решений уравнения (3.7). Однако можно увидеть, что в этой области решения уравнения (3.14) можно аппроксимировать значениями  $\alpha_m$ , найденными из уравнения (3.7) для модели трения (1.5). Можно показать, что для этих  $\mu_0$  при  $\lambda_0 \in [2, 50]$  и

ограничениях (1.9) глубина проникания тел с  $\alpha = \alpha_m$ , где  $\alpha_m$  удовлетворяет уравнению (3.7), будет отличаться от максимальной менее чем на 2%.

При смешанной модели трения (1.7) модель Кулона (1.6) для записи  $\sigma_\tau$  используется при выполнении условия (2.6), где  $\alpha_k$  рассчитывается при  $\lambda = \lambda_0$ . В результате, если  $\alpha_m$ , найденные из уравнения (3.14), при  $\lambda = \lambda_0$  удовлетворяют условию (2.6), то на всем участке пути трение на поверхности тела рассчитывается по модели (1.6). В приближении (2.11) значения  $\alpha_m$  определяются выражением (3.9), и в этом случае  $E = \mu_0/\lambda_0$ . Используя выражение (3.9), можно найти предельные величины  $C$ ,  $\lambda_0$  и  $\mu_0$ , при которых  $\alpha_m = \alpha_k$  (2.6). Так, при заданных  $C$  и  $\mu_0$  предельные значения  $\lambda_0 = \lambda_k$  находятся из условия

$$\lambda_k = (C/\mu_0 - 1)^3 / \mu_0^2 \quad (3.17)$$

и для  $C = 0.2$  они представлены на фиг. 2 кривой 5 в зависимости от  $\mu_0$ .

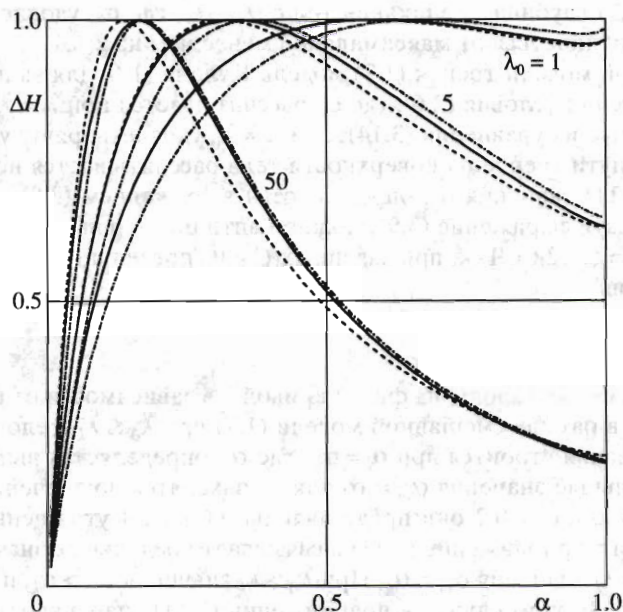
В результате, в рамках смешанной модели (1.7) при  $\lambda_0 \leq \lambda_k$ , тело с максимальной глубиной проникания строится при  $\alpha = \alpha_m$ , где  $\alpha_m$  определяется выражением (3.9) с  $E = \mu_0/\lambda_0$ . Предельные значения  $\alpha_m = \alpha_k$  также находятся по значениям  $C$  и  $\mu_0$ :  $\alpha_m = \mu_0/(C/\mu_0 - 1)$ , и для  $C = 0.2$  они представлены на фиг. 4 утолщенной кривой. Эта кривая построена в приближении (2.11) и связывает предельные значения  $\mu_0$  и  $\alpha_m$  такие, что при  $\lambda_0 = \lambda_k$  значения  $\alpha_m = \alpha_k$ . При  $\lambda_0 > \lambda_k$  значения  $\alpha_m > \alpha_k$ , и модель (1.6) более неприменима. В этом случае в приближении (2.11) значения  $\alpha_m$  аппроксимируются выражением (3.9) с  $E = C/\lambda_0$ . Следовательно, при смешанной модели трения (1.7) для тел с максимальной глубиной проникания, как и для тел минимального сопротивления, для значений  $\alpha^*$  можно использовать приближение (2.15), но в этом случае величина  $\lambda_k$  определяется выражением (3.17), а

$$\alpha_1 = (C/\lambda_0)^{1/3}, \quad \alpha_2 = (\mu_0/\lambda_0)^{1/3} \quad (3.18)$$

Это приближение найдено при условии (2.11) и в рамках смешанной модели хорошо аппроксимирует значения  $\alpha_m$  для локальных экстремумов функции  $h(\alpha)$ . Однако для каждого  $\lambda_0$  есть  $B^*$ , такое, что если  $B > B^*$ , то  $\alpha^* = 1$ . Для моделей трения (1.5) и (1.6) значения  $B^*$  в зависимости от  $\lambda_0$  даны на фиг. 1, и можно увидеть, что при  $\lambda_0 > 2$  и ограничениях (1.9) для этих моделей  $B < B^*$ . Следовательно, при таких  $\lambda_0$ ,  $C$  и  $\mu_0$  для моделей трения (1.5)–(1.7) значение  $\alpha^* = \alpha_m$  и для него можно использовать приближение (3.9), если рассматриваются модели (1.5) или (1.6), и приближение (2.15) со значениями  $\lambda_k$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , взятыми из выражений (3.17) и (3.18), если рассматривается смешанная модель (1.7).

Преимущества оптимальных тел по глубине проникания в сравнении с другими телами, имеющими те же массу и площадь основания, растут с увеличением  $\lambda_0$ . Это можно увидеть из анализа поведения кривых, изображенных на фиг. 5 и представляющих при  $C = 0.2$  и  $\mu_0 = 0.15$  отношение  $\Delta H = H_0(\alpha)/H_0(\alpha^*)$  в зависимости от  $\alpha$  для разных значений  $\lambda_0$ . Значение  $H_0(\alpha)$  в этом случае можно рассматривать как глубину проникания конусов, построенных при разных  $\alpha$  и имеющих с оптимальным телом одинаковую массу и площадь основания. На фиг. 5 сплошные линии представляют  $\Delta H$  для смешанной модели трения, а штрихпунктирные и штриховые линии дают  $\Delta H$  для моделей трения (1.5) и (1.6) соответственно.

Из анализа поведения кривых на фиг. 5 можно увидеть, что при  $\lambda_0 = 1$  и  $\alpha > 0.3$  отличия глубин проникания конусов от максимальной глубины менее 10%. При  $\lambda_0 = 50$  и  $\alpha > 0.3$  эти отличия уже более 20%, и, например, глубина проникания оптимального тела почти в пять раз больше, чем глубина проникания цилиндра, имеющего ту же массу и площадь основания, на переднем торце которого  $\alpha = 1$ .



Фиг. 5

Результат слабой зависимости глубины проникания от формы тела при  $\lambda_0 \sim 1$  согласуется с выводом, полученным [16] из анализа экспериментальных данных по глубине проникания оживальных тел в бетон. Было показано [16], что до скоростей  $U_0 = 460$  м/с глубина проникания тел хорошо аппроксимируется формулами, полученными при условии, что динамическая составляющая в выражении для  $\sigma_n$  (1.2) мала в сравнении с прочностным слагаемым. Отметим, что скорость  $U_0 = 460$  м/с для бетона соответствует  $\lambda_0 \approx 2$ .

На основе анализа большого массива экспериментальных и теоретических данных по глубине проникания тел разной геометрии в такие среды, как грунт, бетон и металл, был сделан вывод [10], что до скоростей проникания  $U_0$ , соответствующих  $\lambda_0 \approx 5$ , глубины проникания тел мало различаются. Было высказано [10] предположение, что при этих скоростях проблема оптимизации формы тела неактуальна, так как в этом случае различия по глубине проникания тел разной геометрии не более 10...15%. С последним выводом можно согласиться лишь при условии, что рассматриваются тела с ограниченным диапазоном относительных толщин. Так как при  $\lambda_0 \leq 5$  функция  $H_0(\alpha)$  не имеет резко выраженного максимума, то в этом случае возможна ситуация, когда глубины проникания тел будут мало различаться. Однако при выходе из заданного диапазона толщин эти различия могут стать больше. Из анализа поведения кривых, построенных на фиг. 5 для  $\lambda_0 = 5$ , можно увидеть, что при  $\alpha > 0.4$  с увеличением относительной толщины конуса его проигрыш оптимальному телу по глубине проникания растет, и для тела с  $\alpha = 1$  он достигает уже 60%.

Таким образом, в рамках двучленной МЛВ (1.2) для моделей трения (1.5)–(1.7) проведено сравнение решений задачи о форме тела с максимальной глубиной проникания. Показано, что при заданных массе и площади основания тела для всех моделей трения оптимальная форма строится при условии (2.8), где  $\alpha^*$  определяется параметрами  $\lambda_0$ ,  $C$  и  $\mu_0$ . Если  $\lambda_0 \geq 2$ , то  $\alpha^* = \alpha_m$ , и значение  $\alpha^*$  аппроксимируется выражением (3.9), если рассматриваются модели (1.5) или (1.6), и выражением (2.15) со

значениями  $\lambda_k$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , взятыми из соотношений (3.17) и (3.18), если рассматривается смешанная модель (1.7). При  $\lambda_0 \in [2, 50]$  и ограничениях (1.9) эти приближения позволяют строить тела, глубина проникания которых отличается от максимальной менее чем на 2%.

В заключение отметим, что значения  $\lambda_0 \in [2, 50]$ , для которых выше получены приближения и оценки, охватывают наиболее интересный с точки зрения практики диапазон начальных скоростей движения тела в разных средах. С ростом скорости  $\lambda_0$  растет и растут преимущества оптимальных тел по снижению сопротивления и достижению большей глубины проникания в сравнении с другими телами. Однако всегда есть значение  $\lambda^*$  такое, что при  $\lambda_0 > \lambda^*$  проникающее тело деформируется. Задачи оптимизации тела решаются при условии, что тело в процессе движения не меняет своей формы, и их решения имеют смысл лишь при  $\lambda_0 \leq \lambda^*$ . Значение  $\lambda^*$  зависит от свойств среды и прочностных характеристик материала ударника. Из анализа экспериментальных данных по прониканию стального ударника в бетон [15] и алюминий [17] можно получить, что в этих средах деформация стального ударника начинается со скоростей  $U_0 = U^*$ ,  $U^* \approx 1500$  м/с, что соответствует  $\lambda^* \approx 20$  для бетона и  $\lambda^* \approx 5$  для алюминия. Для грунта нет подобных [15, 17] экспериментов, но можно предположить, что так как силы трения в грунте выше, чем в металле, то скорость  $U^*$  для грунта должна быть меньше. В грунтах малой и средней прочности значение  $\lambda_0 = 50$  соответствует  $U_0 \approx 700 \dots 1000$  м/с, и эти скорости можно считать предельными для грунта, когда ударник еще не деформируется.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00771) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2124.2003.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С.С. Новый закон трения и механизм крупномасштабных обвалов и оползней // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 4. С. 846–849.
2. Zukas J.A., Nicholas T., Swift H.F. et al. Impact Dynamics. N. Y.: Wiley, 1982 = Зукас Д.А., Николас Т., Свифт Х.Ф. и др. Динамика удара. М.: Мир, 1985. 296 с.
3. Chen E.P. Penetration into dry porous rock: a numerical study on sliding friction simulation // Theor. Appl. Fract. Mech. 1989. V. 11. P. 135–141.
4. Theory of Optimum Aerodynamic Shapes / Ed. A. Miele. N. Y.: Acad. Press, 1965 = Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 508 с.
5. Флитман Л.М. Дозвуковое осесимметричное обтекание тонких заостренных тел вращения упругопластическим потоком // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 153–164.
6. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
7. Jones S.E., Rule W.K. On the optimal nose geometry for a rigid penetrator, including the effects of pressure-dependent friction // Intern. J. Impact Engng. 2000. V. 24. P. 403–415.
8. Якунина Г.Е. О пространственных формах тела с максимальной глубиной проникания в плотные среды // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 6. С. 768–771.
9. Остапенко Н.А. Тела вращения минимального сопротивления при движении в плотных средах // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 2. С. 105–149.
10. Chen X.W., Li Q.M. Deep penetration of a non-deformable projectile with different geometrical characteristics // Intern. J. Impact Engng. 2002. V. 27. P. 619–637.
11. Yakunina G.Ye. Effects of sliding friction on the optimal 3D-nose geometry of rigid rods penetrating media // J. Optimiz. and Engng. 2005. V. 6. № 3. P. 315–338.

12. Якунина Г.Е. Об оптимальных неконических и несимметричных пространственных конфигурациях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 605–614 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Под ред. А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 431–442.
13. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным // М.: Янус-К, 2001. 132 с.
14. Yakunina G.Ye. Three-dimensional bodies of minimum total drag in hypersonic flow // J. Optimiz. Theory and Appl. 2002. V. 115. № 2. P. 241–265.
15. Frew D.J., Forrestal M.J., Hanchak S.J. Penetration experiments with limestone targets and ogival-nose steel projectiles // Trans ASME J. Appl. Mech. 2000. V. 67. P. 841–845.
16. Forrestal M.J., Frew D.J., Hickerson J.P., Rohwer T.A. Penetration of concrete target with deceleration-time measurements // Intern. J. Impact. Engng. 2003. V. 28. P. 479–497.
17. Piekutowsky A.J., Forrestal M.J., Poormon K.L., Warren T.L. Penetration of 6061-T651 aluminum targets by ogival-nose projectiles with striking velocities between 0.5 and 3.0 km/s // Intern. J. Impact Engng. 1999. V. 23. P. 723–734.

Москва

e-mail: galina\_yakunina@mail.ru

Поступила в редакцию

16.XII.2004