

УДК 533.69:532.5

© 2005 г. А. М. Елизаров, Д. А. Фокин

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В рамках моделей течения идеальной несжимаемой жидкости и газа Чаплыгина дозвукового адиабатического движения совершенного газа построены точные решения основной вариационной обратной краевой задачи аэрогидродинамики – задачи построения профиля максимальной подъемной силы при ограничении максимума скорости на его контуре. Термин “вариационные обратные краевые задачи” используется для обозначения такого класса двумерных краевых задач с неизвестными границами, в которых искомыми являются как решение уравнения в частных производных, так и сама область его определения, причем последняя обладает некоторым экстремальным свойством, а на ее границе задается одно краевое условие. Экстремальное свойство этой области выражается в виде требования максимизации (минимизации) заданного функционала (обычно при дополнительных ограничениях). Проведен анализ существования и единственности решений, указаны допустимые области изменения параметров, приведены примеры точных решений, проанализированы тенденции изменения оптимизированных аэродинамических форм при изменении величин теоретического угла атаки и максимального значения скорости на контуре профиля. В качестве экстремальных получены так называемые “полочные” распределения скорости (с участком постоянства скорости).

Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики (ОКЗА) реализуют один из подходов к оптимизации аэродинамических форм и в двумерном случае заключаются в построении профилей, обладающих оптимизированными характеристиками (максимальным коэффициентом подъемной силы или аэродинамическим качеством, минимальным коэффициентом сопротивления и др.). Такие задачи позволяют находить оптимальные формы крыловых профилей и решеток турбомашин в идеальной несжимаемой жидкости, в дозвуковом потоке газа и в вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. По своей постановке названные задачи относятся, с одной стороны, к задачам оптимального проектирования (например [1]), с другой – к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами [2], а применение методов теории обратных краевых задач позволяет свести их к задачам классического вариационного исчисления. При этом наличие или отсутствие дополнительных ограничений может существенно изменять картину разрешимости задач.

При решении вариационных задач вслед за известными подходами [3–6] использована идея конструирования такого оператора, действующего на управляющие функции из заданного множества и управляющие параметры из заданного интервала, что каждому набору из управляющей функции и управляющих параметров соответствует искомый объект с нужными свойствами (в данном случае крыловой профиль, ограниченный замкнутым кусочно-гладким контуром).

Следствием результатов применения методов теории ОКЗА к решению задач аэродинамической оптимизации [4–6] является тот факт, что среди профилей с одной острой кромкой, имеющих заданную длину периметра контура, наибольшей подъемной силой в равномерном на бесконечности потоке идеальной несжимаемой жидкости обладает круг. Будучи далеким от требований инженерной практики, такое решение получается аналитически, при минимальных ограничениях, диктуемых математической моделью течения, и, следовательно, дает точную

оценку сверху для подъемной силы. При ограничениях, имеющих физический смысл (условии безотрывности обтекания с учетом вязкости потока в приближении пограничного слоя, учете сжимаемости среды и других), даже при наличии строгой выпуклости минимизируемых функционалов доказать единственность экстремалей не удастся. Ситуация еще более усложняется, когда в качестве оптимизируемой характеристики выбираются коэффициент профильного сопротивления или аэродинамическое качество (даже при записи их в явном виде). В результате оптимизированные решения существенно отличаются от круга, а получить их удается только численно. Однако при некоторых упрощающих предположениях (в частности, при простейшем наборе эмпирических постоянных в критериях безотрывности обтекания) снова удастся получить строго выпуклые функционалы и построить их экстремали (см. [6–11]).

Задачи, исследованные ранее [6–11], относятся к классу вариационных ОКЗА, а построенные решения в той или иной степени учитывают условия гидродинамической целесообразности – условия физической реализуемости решения (соответствия принятой математической модели течения, однолиственность области течения, отсутствие отрыва пограничного слоя, ограничение максимального значения скорости на контуре и другие) и условия разрешимости (конструктивной реализуемости). При этом не было обнаружено точных решений этих задач, отличных от круга.

Одно из естественных условий гидродинамической целесообразности – ограничение максимального значения скорости на контуре. Были описаны ситуации [12], когда при учете названного ограничения существует единственное решение вариационной ОКЗА, отличное от круга. Ниже построены эти решения и проанализированы тенденции изменения оптимизированных аэродинамических форм при изменении исходных параметров, имеющих физический смысл.

1. Постановка основной вариационной задачи. Среди множества возможных постановок вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики выделим одну, решение задачи в которой непосредственно отвечает на один из общих вопросов аэрогидродинамики – какую максимальную подъемную силу можно получить на профиле крыла и какова форма такого профиля. Дадим такую постановку задачи для безграничного потока идеальной несжимаемой жидкости.

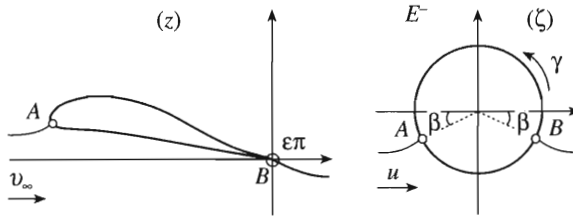
Физическая постановка задачи. В плоскости $z = x + iy$ рассмотрим установившееся безотрывное обтекание непроницаемого изолированного крылового профиля с контуром, гладким, за исключением заостренной задней кромки B ($z = 0$) (фиг. 1). Внешний угол в кромке фиксирован и равен $\varepsilon\pi$ ($1 \leq \varepsilon \leq 2$, при $\varepsilon = 1$ имеем всюду гладкий контур), периметр контура профиля $l = 2$. Поток на бесконечности однородный, направлен горизонтально, его скорость $v_\infty = 1$, а плотность $\rho = 1$. Точка схода потока – точка $z = 0$ (при $\varepsilon > 1$ в соответствии с гипотезой Жуковского – Чаплыгина это будет острая кромка B). В качестве масштаба длин выберем полупериметр контура (для реальных профилей он мало отличается от длины их хорды). Требуется определить форму профиля, обеспечивающего максимальное значение коэффициента C_y , подъемной силы, при условии, что максимальное значение скорости на контуре не превосходит заданной величины v_{\max} ($v_{\max} > 1$).

Математическая модель и класс оптимизируемых контуров. Запишем основные соотношения, определяющие математическую модель поставленной задачи и класс L оптимизируемых контуров, следуя известному подходу [6, 9, 12, 13].

В качестве канонической области возьмем внешность единичного круга

$$E^- = \{ \zeta: |\zeta| > 1 \}$$

во вспомогательной плоскости ζ (фиг. 1). Рассмотрим обтекание единичного круга потоком, вектор скорости которого на бесконечности направлен вдоль оси абсцисс, модуль равен u , а критические точки $B = e^{-i\beta}$ и $A = -e^{i\beta}$ на единичной окружности (в которых скорость обращается в нуль) симметричны относительно вертикальной оси. Здесь $\beta \in [0, \pi/2]$ – так называемый теоретический угол атаки, являющийся, вообще говоря, параметром оптимизации. Значение угла β может быть задано зара-



Фиг. 1

нее, что накладывает дополнительное ограничение на коэффициент C_y при оптимизации.

Обтекание рассматриваемого профиля в физической плоскости полностью определяется заданием пары – управляющей 2π -периодической функции $P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$ ($L_2[0, 2\pi]$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[0, 2\pi]$), удовлетворяющим некоторым дополнительным условиям гладкости, о которых будет сказано ниже, а также параметра $\beta, \beta \in [0, \pi/2]$. Область течения – образ E^+ при конформном отображении $z_p(\zeta)$, нормированном условиями $z_p(\infty) = \infty, z_p(e^{-i\beta}) = 0$.

Координаты искомого контура и оптимизируемый функционал (коэффициент C_y) аналитически выражаются через $P(\gamma)$ и β в следующем виде:

$$x(\gamma) + iy(\gamma) = z_p(e^{i\gamma}) \equiv \frac{2}{J_0(P)} \int_{-\beta}^{\gamma} \exp[P(\tau) + iQ(\tau)] \left| 2 \sin \frac{\tau + \beta}{2} \right|^{\epsilon - 1} d\tau \tag{1.1}$$

$$Q(\tau) = Q_1(\tau) + (\epsilon - 1) \frac{\tau + \beta + \pi}{2}, \quad Q_1(\gamma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \gamma}{2} d\tau \tag{1.2}$$

$$C_y = 16\pi \sin \beta / J_0(P)$$

$$J_0(P) = \int_0^{2\pi} \exp[-P(\tau)] \left| 2 \sin \frac{\tau + \beta}{2} \right|^{\epsilon - 1} d\tau \tag{1.3}$$

Для обеспечения существования сингулярного интеграла $Q_1(\tau)$ потребуем, чтобы функция $P(\gamma)$ удовлетворяла условию Гёльдера с фиксированными коэффициентом и показателем; такие функции образуют в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ компактное множество. Отметим также, что при выводе функционала (1.3) существенно использовано изопериметрическое условие $l = 2$ (задания периметра искомого контура) (см. [5]).

Далее, в силу выбора $v_\infty = 1$ и требования замкнутости контуров, выполняются равенства

$$A_0(P) \equiv \int_0^{2\pi} P(\tau) d\tau = B_0, \quad A_1(P) + iA_2(P) \equiv \int_0^{2\pi} P(\tau) \exp(i\tau) d\tau = B_1 + iB_2 \tag{1.4}$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 + iB_2 = -\pi(\epsilon - 1) \exp(-i\beta)$$

(отметим, что в случае невыполнения второго комплексного равенства (1.4) разомкнутость контура профиля будет тем больше, чем больше отличается записанный интеграл от приведенного значения $B_1 + iB_2$).

Распределение величины скорости на контуре профиля в параметрическом виде может быть представлено в форме

$$v(\gamma) = 2 \exp[P(\gamma)] \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{2-\varepsilon}$$

Для удобства эта величина берется положительной на участке $\gamma \in [-\beta, \pi + \beta]$, соответствующем верхней поверхности контура, и отрицательной на нижней поверхности $\gamma \in [\pi + \beta, 2\pi - \beta]$ (где направление обхода и направление вектора скорости противоположны). Теперь требование ограниченности максимальной скорости на контуре заданной величиной v_{\max} также может быть выражено через функцию $P(\gamma)$ и параметр β :

$$P(\gamma) \leq H_0(\gamma, \beta) \equiv H(\gamma, \beta) + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right| \tag{1.5}$$

$$H(\gamma, \beta) = \ln[v_{\max}/M(\gamma, \beta)], \quad M(\gamma, \beta) = |2(\sin \gamma + \sin \beta)|$$

Результаты проведенных многочисленных вычислительных экспериментов показали, что в окрестности точного решения задачи имеются разные приближенные решения (профили как с гладкой, так и с заостренной задней кромкой), доставляющие минимизируемому функционалу значение, весьма близкое к экстремальному, но существенно различающиеся по геометрии оптимальных контуров. Все это делает актуальным построение точного решения задачи.

2. Существование и единственность решения. Представим управляющую функцию в виде

$$P(\gamma) = T(\gamma) + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right| \tag{2.1}$$

После подстановки в соотношения (1.3) и (1.4) получим

$$J_0(P) = I(T), \quad I(T) = \int_0^{2\pi} \exp[-T(\tau)] d\tau \tag{2.2}$$

$$A_0(T) = A_1(T) = A_2(T) = 0 \tag{2.3}$$

причем ограничение (1.5) примет вид

$$T(\gamma) \leq H(\gamma, \beta) \tag{2.4}$$

В функционале $I(T)$ и ограничениях (2.3) параметр β не связан с функцией T . Поэтому при отсутствии ограничения (2.4) оптимальным является выбор $\beta = \pi/2$, что соответствует обтеканию контура с совпадением точек разветвления и схода потока. Этот вывод полностью согласуется с известным фактом (см., например, [14]), что наибольшая циркуляция скорости при обтекании круга с критическими точками на окружности достигается при совпадении точек торможения и схода потока.

Итак, пришли к вариационной задаче: требуется определить 2π -периодическую гёльдеровскую функцию $P(\gamma)$, удовлетворяющую условиям (1.4), (1.5) и доставляющую минимум функционалу (1.3). При заданном значении $\beta = \beta^* > 0$ теоретического угла атаки в силу условий (1.4) и (1.5) эта задача равносильна следующей: при фиксированных β^* и v_{\max} минимизировать в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ функционал $I(T)$ при ограничениях (2.3) и (2.4).

Из полученных ранее результатов [5, 6] следует, что $I(T)$ – строго выпуклый функционал в пространстве $L_2[0, 2\pi]$, $\inf_{T(\gamma) \in L_2} I(T) = 2\pi$ и достигается на единствен-

ной функции $T(\gamma) = T_*(\gamma) \equiv 0$, не зависящей от ε . При $v_{\max} \geq 4$ функция $T_*(\gamma)$ автоматически удовлетворяет ограничению (2.4). В этом случае искомым оптимальным контур определяется отображением $z^*(\zeta) = (\zeta + i)/\pi$ и является окружностью радиуса $1/\pi$, обтекаемой так, что точки разветвления и схода потока совпадают. Абсолютный максимум C_y^* коэффициента C_y в соотношении (1.2) есть $C_y^* = 8$. Итак, как и в классических изопериметрических задачах, в рассматриваемой вариационной ОКЗА при $v_{\max} \geq 4$ экстремалью является круг. В случае $v_{\max} \leq 4$ ограничение (2.4) играет существенную роль при оптимизации.

Теорема 1. Пусть

$$v_{\max}^* = \exp \sin \beta^*, \quad v_{\max}^{**} = 2(1 + \sin \beta^*)$$

Необходимое условие разрешимости задачи имеет вид

$$v_{\max} \geq v_{\max}^* \tag{2.5}$$

При этом если $v_{\max} \geq v_{\max}^{**}$, то единственная экстремаль – окружность, а при $v_{\max}^* \leq v_{\max} < v_{\max}^{**}$ экстремаль отлична от окружности.

Если множество U гёльдеровских функций $P(\gamma)$, удовлетворяющих условиям (1.4) и (1.5), не пусто и выполнено условие (2.5), то задача имеет единственное решение.

Утверждения теоремы 1 являются непосредственным следствием полученных ранее результатов [12, 13], строгой выпуклости функционала (1.3), компактности в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ множества U (в случае его непустоты) и линейности ограничений (1.4) и (1.5).

В силу теоремы 1 задача будет иметь единственную “некруговую” экстремаль лишь в случае $v_{\max}^* \leq v_{\max} < v_{\max}^{**}$, а при фиксации v_{\max} – при $\beta \geq \beta_{\max} = \arcsin \ln v_{\max}$. Таким образом, существует допустимая область изменения параметров задачи, соответствующая “некруговым” экстремальям, ограниченная сверху и снизу кривыми, описываемыми уравнениями $v_{\max} = 2(1 + \sin \beta)$ и $v_{\max} = \exp \sin \beta$ соответственно. Если точка с координатами (β, v_{\max}) попадает в эту область, существует единственный оптимальный профиль, отличный от круга. Если указанная точка лежит выше обозначенной области, то решением вариационной задачи будет круг, а если ниже, то решение задачи не существует.

3. Построение точного решения. Вид экстремальной функции $P^*(\gamma)$ позволяет установить теорема Куна – Таккера (см., например, [15], раздел 1.1.2). Составим расширенный функционал

$$\begin{aligned} \Psi(P) = & \int_0^{2\pi} F(P, \tau) d\tau \equiv J_0(P) + \mu_0[A_0(P) - B_0] + \mu_1[A_1(P) - B_1] + \mu_2[A_2(P) - B_2] + \\ & + \int_0^{2\pi} \mu(\tau)[P(\tau) - H_0(\tau, \beta)] d\tau \end{aligned}$$

Параметры μ_0, μ_1 и μ_2 должны быть зафиксированы так, чтобы выполнялись условия (1.4), а $\mu(\gamma)$ – неотрицательная функция, связанная с обеспечением условия (1.5). Вид экстремальной функции $P^*(\gamma)$ в силу необходимого условия экстремума определяется из уравнения $\partial F / \partial P = 0$:

$$P^*(\gamma) = (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right| - \ln g(\mu_k, \mu^*; \gamma) \tag{3.1}$$

$$g(\mu_k, \mu^*; \gamma) \equiv \mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma + \mu^*(\gamma)$$

причем параметры μ_k ($k = 0, 1, 2$) и функция $\mu^*(\gamma)$ таковы, что $g(\mu_k, \mu^*; \gamma) \geq 0$. Неотрицательная функция $\mu^*(\gamma)$ находится из так называемого условия дополняющей нежесткости $\mu^*(\gamma) [P^*(\gamma) - H_0(\gamma, \beta)] = 0$:

$$\mu^*(\gamma) = \max \{ 0, v_{\max}^{-1} M(\gamma, \beta) - \mu_0 - \mu_1 \cos \gamma - \mu_2 \sin \gamma \} \tag{3.2}$$

Распределение скорости, соответствующее экстремальной функции $P^*(\gamma)$, имеет вид

$$|v^*(\gamma)| = \min \left\{ v_{\max}; \left| \frac{M(\gamma, \beta)}{\mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma} \right| \right\} \tag{3.3}$$

Минимальное значение функционала

$$J^* = J_0(P^*) = 2\pi\mu_0 + \int_0^{2\pi} \mu^*(\tau) d\tau > 0 \tag{3.4}$$

Условия (1.4) для полученной экстремальной функции $P^*(\gamma)$ перепишем в виде

$$\int_0^{2\pi} \ln g(\mu_k, \mu^*; \gamma) d\gamma = \int_0^{2\pi} \ln g(\mu_k, \mu^*; \gamma) \exp(i\gamma) d\gamma = 0 \tag{3.5}$$

Отметим, что величина J^* , функции $\mu^*(\gamma)$, $v^*(\gamma)$ и равенства (3.5) не содержат величину ε , определяющую растров угла профиля в задней кромке. Значит, полученная экстремаль – одна и та же для профилей с заостренной ($\varepsilon > 1$) и с затупленной ($\varepsilon = 1$) кромками. Однако, как видно из равенств (3.1), в первом случае функция $P^*(\gamma)$ имеет логарифмическую особенность при $\gamma = -\beta$; следовательно, полученное решение не попадает в заданный класс и дает лишь верхнюю оценку максимума C_y . В случае же затупленной кромки ($\varepsilon = 1$) можно построить профиль, для которого этот максимум достигается.

В силу отношений (1.3), (3.1) и (3.4) функция $z_{p^*}(\zeta)$, конформно отображающая внешность единичного круга на область течения вокруг профиля оптимальной формы, имеет вид

$$z^*(\zeta) = \frac{2}{J^*} \int_{e^{-i\beta}}^{\zeta} \exp[G(\zeta)] d\zeta \tag{3.6}$$

где $G(\zeta) = (S \ln g)(\zeta)$ – аналитическая в E^- функция, вещественная часть которой $\operatorname{Re} G(e^{i\gamma}) = \ln g(\mu_k, \mu^*; \gamma)$ на окружности, а $\operatorname{Im} G(\infty) = 0$; S – оператор Шварца. В частном случае $\mu^*(\gamma) \equiv 0$ (при отсутствии ограничения (1.5)), из представления (3.6) следует полученное ранее представление $z^*(\zeta) = (\zeta + i)/\pi$.

Еще раз подчеркнем, что параметр ε в формуле (3.6) отсутствует, и образы области E^- при отображениях (3.6) для различных β и v_{\max} будут иметь гладкие границы. В случае $\varepsilon = 1$ это будет область течения вокруг профилей оптимальной формы. Ниже показано, что при любых β и v_{\max} эти области будут симметричными относительно вертикали, но не всегда однолиственными.

4. Симметрия оптимального решения.

Теорема 2. Если выполнено необходимое условие разрешимости (2.5), то $\mu_1 = 0$, $\mu^*(\gamma) = \mu^*(\pi - \gamma)$, распределение скорости (3.3) монотонно возрастает на участке $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$, и при $\varepsilon = 1$ оптимальный контур имеет вертикальную ось симметрии.

Доказательство. Предположим, что удалось найти набор параметров $\mu_0, \mu_1 > 0, \mu_2$, удовлетворяющий условиям разрешимости (3.5). Покажем, что в этом случае набор параметров $\mu_0, -\mu_1 < 0, \mu_2$ также определяет решение задачи.

Сделав в равенствах (3.5) замену переменных $\tau = \pi - \gamma$, получим

$$\int_0^{2\pi} \chi(\gamma) d\gamma = 0, \quad \int_{\pi}^{-\pi} \chi(\gamma) \cos \gamma d\gamma = 0, \quad \int_0^{2\pi} \chi(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0$$

где

$$\chi(\gamma) = \ln|\omega(\gamma) - \mu_1 \cos \gamma + \tilde{\mu}(\gamma)|, \quad \omega(\gamma) = \mu_0 + \mu_2 \sin \gamma$$

$$\tilde{\mu}(\gamma) = \mu^*(\pi - \gamma) = \max\{0, v_{\max}^{-1} M(\gamma, \beta) - \omega(\gamma) + \mu_1 \cos \gamma\}$$

Для проверки выполнения условия ограниченности скорости для функции $v_1^*(\gamma)$, соответствующей новому набору параметров, запишем следующую цепочку соотношений:

$$|v_1^*(\gamma)| = \left| \frac{M(\gamma, \beta)}{\omega(\gamma) - \mu_1 \cos \gamma} \right| = \left| \frac{M(\tau, \beta)}{\omega(\tau) + \mu_1 \cos \tau} \right| = |v^*(\tau)| < v_{\max}$$

Значит, условие ограниченности скорости также будет выполнено. Наконец, подставив модифицированный набор параметров $\mu_0, -\mu_1, \mu_2$ и соответствующую функцию $\tilde{\mu}(\gamma)$ в необходимое условие экстремума, убедимся, что для них также достигается глобальный минимум функционала J_0 . Таким образом, набор $\mu_0, -\mu_1 < 0, \mu_2$ также определяет решение рассматриваемой экстремальной задачи, что противоречит единственности решения, поэтому $\mu_1 = 0$. Отсюда также следует, что $\mu^*(\gamma) = \mu^*(\pi - \gamma)$, поэтому достаточно рассмотреть участок изменения $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$, а на оставшейся части окружности решение может быть получено из соображений симметрии. Следствием этого свойства будет также автоматическое выполнение того из условий разрешимости (3.5), которое содержит $\cos \tau$ в качестве весовой функции. В случае $\varepsilon = 1$ равенство $\mu_1 = 0$, как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой экстремальной функции $P^*(\gamma)$ в равенство (3.6), обеспечивает симметрию соответствующего оптимального контура относительно вертикальной оси.

Далее, так как $\mu_1 = 0$ и скорость на верхней поверхности положительна, а на нижней отрицательна, то $\omega(\gamma) \geq 0$ при $\gamma \in [-\beta, \pi + \beta]$ (см. (3.3)). Следовательно,

$$\omega(-\beta) = \mu_0 - \mu_2 \sin \beta \geq 0$$

Тогда

$$v^*(\gamma) = \left[\frac{2(\sin \gamma + \sin \beta)}{\omega(\gamma)} \right], = 2 \frac{\mu_0 - \mu_2 \sin \beta}{\omega(\gamma)^2} \cos \gamma \geq 0, \quad \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Значит, распределение скорости монотонно возрастает.

Следствие. Если

$$2(1 + \sin \beta) > v_{\max}(\mu_0 + \mu_2) \quad (4.1)$$

то на отрезке $[t, \pi/2]$, где

$$t = \arcsin[(\mu_0 v_{\max} - 2 \sin \beta)/(2 - \mu_2 v_{\max})]$$

у распределения скорости $v^*(\gamma)$ образуется “полка” $v = v_{\max}$.

Вычислительные эксперименты показали, что у оптимальных форм, соответствующих распределению (3.3), при $\beta > 0$ одновременное образование “полок” на верхней и нижней поверхностях невозможно. Этот факт требует строгого доказательства, которое пока не получено. Если высказанная гипотеза верна, то всегда

$$v^*(\gamma) = v_1^*(\gamma) \equiv \frac{2(\sin \gamma + \sin \beta)}{\omega(\gamma)}, \quad \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, t\right]; \quad v^*(\gamma) = v_2^*(\gamma) \equiv v_{\max}, \quad \gamma \in \left[t, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4.2)$$

причем $t = \pi/2$, если выполняется неравенство, противоположное (4.1), а система для определения параметров при учете симметрии оптимального распределения скорости принимает вид

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |v^*(\gamma)| d\gamma = 0, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |v^*(\gamma)| \sin \gamma d\gamma = \pi \sin \beta \quad (4.3)$$

Таким образом, решение задачи сведено к решению системы нелинейных уравнений (4.3) для отыскания двух неизвестных: μ_0 и μ_2 .

Если ограничение (1.5) снято, то $\mu^*(\gamma) \equiv 0$, а система уравнений (4.3) примет вид

$$K_0 \equiv \int_0^{2\pi} \ln |\omega(\gamma)| d\gamma = 0, \quad K_1 \equiv \int_0^{2\pi} \ln |\omega(\gamma)| \sin \gamma d\gamma = 0$$

В результате вычисления интегралов K_0 и K_1 получим два варианта решений: $\mu_2 = 2$, $\mu_0 = 0$ и $\mu_2 = 0$, $\mu_0 = 1$. Первый набор не обеспечивает знакопостоянства функции $g(\mu_k, \mu^*, \gamma)$ и должен быть отброшен. В итоге имеем

$$g(\mu_k, \mu^*; \gamma) \equiv 1, \quad P^*(\gamma) = (\epsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|, \quad J^* = 2\pi$$

Соответствующая функция $T^*(\gamma) \equiv 0$ (см. (2.1)), а оптимальный контур – окружность, определяемая отображением $z^*(\zeta) = (\zeta + i)/\pi$. Таким образом, снова получили экстремальное решение в виде круга (ср. с полученными ранее результатами [5]).

5. Исследование разрешимости системы (4.3). Прежде всего рассмотрим случай $\mu_2 \neq 0$. Обозначим $m = \mu_0/\mu_2$. Преобразуем систему уравнений (4.3), используя выражения интегралов K_0 и K_1 , полученные при их вычислении как контурных при $|m| \leq 1$ и при дифференцировании по m с последующим сведением к табличным интегралам при $|m| > 1$:

$$K_0 = 2\pi \ln |\mu_2/2| + 2\pi T_0(m), \quad K_1 = 2\pi m - 2\pi T_1(m)$$

где

$$T_0(m) = \operatorname{sign}(m) \ln \left| m + \sqrt{m^2 - 1} \right|, \quad T_1(m) = \operatorname{sign}(m) \sqrt{m^2 - 1}, \quad \text{если } |m| > 1$$

$$T_0(m) = T_1(m) = 0, \quad \text{если } |m| \leq 1$$

В предположении, что образование “полки” возможно только на верхней поверхности контура оптимизированного профиля, подставив выражения (4.2) в равенства (4.3), получим

$$\Phi_0(t, m) = R_0(t, m), \quad \Phi_1(t, m) = R_1(t, m) \quad (5.1)$$

$$\Phi_0(t, m) \equiv \frac{\cos t}{\pi/2 + t} F_0(t, m) + F_1(t, m), \quad \frac{1}{\pi} R_0(t, m) \equiv m - T_1(m) + \frac{\cos t}{\pi/2 + t} T_0(m)$$

$$\Phi_1(t, m) \equiv \exp \frac{F_0(t, m) - \pi T_0(m)}{\pi/2 + t}, \quad R_1(t, m) \equiv \frac{2}{v_{\max}} \left| \frac{\sin t + \sin \beta}{\sin t + m} \right|$$

где

$$F_0(t, m) = \pi \ln 2 - \int_t^{\pi/2} \ln R_1(\gamma, m) d\gamma, \quad F_1(t, m) = - \int_t^{\pi/2} \ln R_1(\gamma, m) \sin \gamma d\gamma$$

Отметим, что из условия $v^*(t) = v_{\max}$ следует соотношение, дающее явное выражение искомой величины μ_2 через параметры t, m :

$$\mu_2 = \frac{2(\sin t + \sin \beta)}{v_{\max}(\sin t + m)} \quad (5.2)$$

В результате анализа границ изменения искомых параметров μ_0 и μ_2 установлены следующие ограничения, налагаемые на m :

$$-b_+ - 1 \leq m \leq 1 - b_- \quad \text{при } \mu_2 < 0$$

$$1 + b_- \leq m \leq b_+ - 1 \quad \text{при } 0 < \mu_2 \leq a \min\{\sin \beta, 1 - \sin \beta\} \quad (5.3)$$

$$b_- - 1 \leq m \leq 1 - b_- \quad \text{при } a(1 - \sin \beta) < \mu_2 \leq a$$

где

$$a = 2/v_{\max}, \quad b_{\pm} = a(1 \pm \sin \beta)/|\mu_2|; \quad b_- \leq b_+$$

Отметим также, что в силу теоремы 1 для экстремалей, отличных от окружности,

$$(1 + \sin \beta)^{-1} \leq a \leq 2 \exp(-\sin \beta)$$

Таким образом, нужно найти пару (m^*, t^*) – решение системы уравнений (5.1), причем интервалы изменения m (5.3) зависят от величины μ_2 , которая определится по решению (m^*, t^*) из соотношения (5.2). Отметим, что

$$[1 + b_-, b_+ - 1] \subset (1, \infty), \quad [b_- - 1, 1 - b_+] \subset (-\sin \beta, \sin \beta), \quad [-1 - b_+, 1 - b_-] \in (-\infty, \sin \beta)$$

Исследования показали, что при любом фиксированном $t \geq 0$ функция $\Phi_0(t, m)$ монотонно возрастает по m при $m > -1$, монотонно убывает по m при $m < -1$ и выпукла вверх в обоих случаях. Далее при $|m| \rightarrow \infty$

$$\Phi_0(t, m) = \pi(\pi/2 + t)^{-1} \cos t \ln |m| + O(|m|)$$

Значит, на бесконечности характер роста функции $\Phi_0(t, m)$ логарифмический. Из представления функции $R_0(t, m)$ (см. (5.1)) видно, что точно таким же на $\pm\infty$ является поведение функции $R_0(t, m)$ (с тем же коэффициентом при логарифме). При $|m| < 1$

функция $R_0(t, m)$ линейна. При $m > 1$ функция $R_0(t, m)$ сначала монотонно убывает, достигая своего минимума при $m = m^* = (\pi/2 + t)/\cos t$ и оставаясь выпуклой вниз, а затем монотонно возрастает, становясь выпуклой вверх. Далее функция $\Phi_1(t, m)$ при любых t строго положительна, ограничена и состоит из двух ветвей, каждая из которых стремится к нулю при $m \rightarrow \pm\infty$, оставаясь выпуклой вниз. Функция $R_1(t, m)$ также состоит из двух симметричных ветвей, имеющих асимптоту при $m = -\sin t$ (при приближении к которой с обеих сторон $R_1(t, m)$ неограниченно возрастает). При $m \rightarrow \pm\infty$ функция $R_1(t, m)$ стремится к нулю.

Описанные свойства функций $\Phi_0(t, m)$ и $R_0(t, m)$, $\Phi_1(t, m)$ и $R_1(t, m)$, установленные теоретически (некоторые – только для $t > 0$), были подтверждены при разных t вычислительными экспериментами с использованием указанных выше аналитических представлений. Вычислительные эксперименты показали, что система уравнений (5.1) не имеет решений, у которых $m > 1$, а каждое из уравнений системы (5.1), рассматриваемое при фиксированном t по отдельности как уравнение для нахождения m , имеет не более двух корней – не более одного на каждом из интервалов, указанных в соотношениях (5.3), за исключением интервала $(1, \infty)$.

Система уравнений (5.1) решалась численно, вычислительные эксперименты подтвердили ее однозначную разрешимость. После нахождения всех параметров нетрудно восстановить формы оптимизированных профилей.

Пусть теперь $\mu_2 = 0$ (напомним, что μ_0 и μ_2 одновременно в нуль обращаться не могут и, следовательно, $\mu_0 > 0$). В силу соотношений (4.2) имеем

$$v^*(\gamma) = \{(\mu_0)^{-1}M(\gamma, \beta), \gamma \in [-\pi/2, t]; v_{\max}, \gamma \in [t, \pi/2]\} \quad (5.4)$$

Значит, $\mu_0 = v_{\max}^{-1}M(t, \beta)$ и $M(\gamma, \beta) \geq M(t, \beta)$ при всех $\gamma \in [t, \pi/2]$. Так как все параметры, кроме t , определены, а их значения должны обеспечивать выполнение равенств (4.3), получаем два соотношения, связывающие t , β и v_{\max} . Подставив выражение (5.4) в равенства (4.3), будем иметь

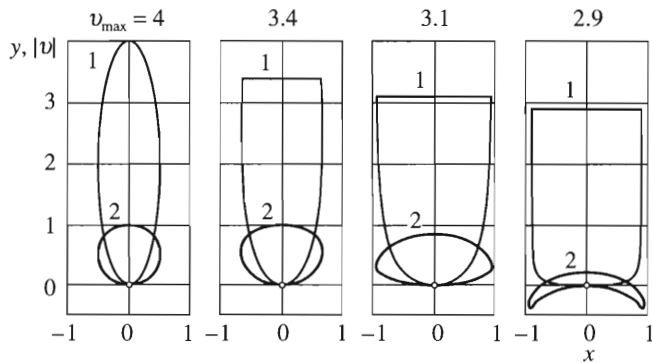
$$\int_t^{\pi/2} \ln \frac{M(\gamma, \beta)}{M(t, \beta)} d\gamma = -\pi \ln \frac{M(t, \beta)}{v_{\max}}, \quad \int_t^{\pi/2} \ln \frac{M(\gamma, \beta)}{M(t, \beta)} \sin \gamma d\gamma = 0 \quad (5.5)$$

Как показано выше, при $\gamma \in [t, \pi/2]$ первое подынтегральное выражение (5.5) отрицательно. Значит, левая часть первого равенства (5.5) положительна всегда, а левая часть второго равенства положительна при $t \geq 0$ за исключением случая $t = \pi/2$. В этом случае второе соотношение (5.5) выполняется тождественно, а обеспечить выполнение первого соотношения (5.5) можно лишь при $v_{\max} = 2(1 + \sin \beta)$. Снова получили оптимальный контур в виде окружности (см. теорему 1).

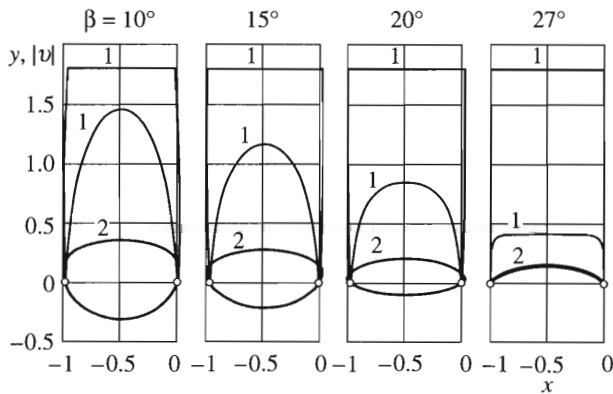
На фиг. 2 приведены формы оптимальных профилей и хордовые диаграммы скорости, соответствующие точному решению для $\epsilon = 1$ при $\beta = 90^\circ$ и разных значениях v_{\max} . Светлыми точками на контурах обозначены совпадающие точки разветвления и схода потока. Видно, что точные решения имеют лишь вертикальную ось симметрии. Их характеристики приведены в таблице.

На фиг. 3 приведены точные формы оптимальных профилей (контуров 2) и соответствующие хордовые диаграммы скорости (линии 1) при разных β и фиксированном значении $v_{\max} = 1.8$. Светлыми точками на контурах обозначены критические точки. В таблице приведены характеристики этих точных решений.

Как отмечено в теореме 1, при фиксированном значении $\beta = \beta^*$ величина v_{\max} должна удовлетворять необходимому условию разрешимости (2.5). Интересно было выявить тенденции изменения формы оптимальных профилей при увеличении v_{\max} ,



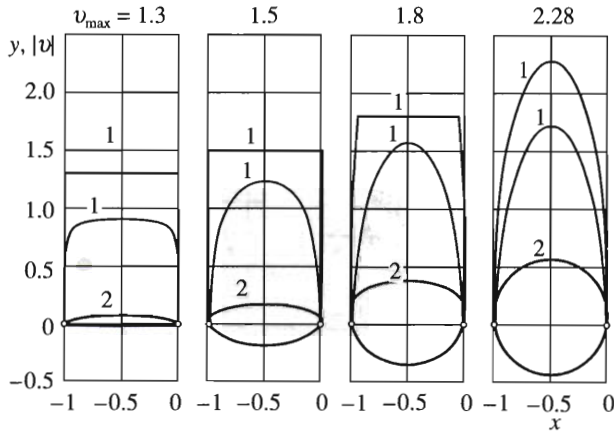
Фиг. 2



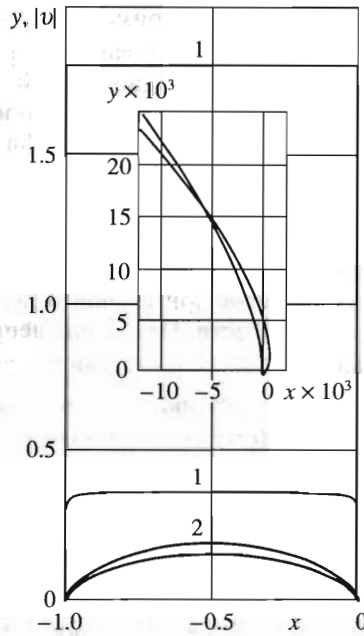
Фиг. 3

начиная со значения v_{\max}^* (описанная процедура соответствует движению по вертикали в области допустимых значений параметров задачи). На фиг. 4 реализована эта идея при $\beta^* = 8^\circ$ (см. также таблицу). Видно, что при увеличении значения v_{\max} профили (контуры 2) ставятся толще, коэффициент C_y увеличивается, профили приближаются к кругу, достигая круговой формы для значений $v_{\max} = v_{\max}^{**}$ (в данном примере это $v_{\max}^{**} = 2.28$). Наоборот, при уменьшении v_{\max} профили утоньшаются и, начиная с определенного значения v_{\max} , становятся неоднολистными. Отметим, что крайний слева профиль на фиг. 4 практически соответствует предельной ситуации (при дальнейшем уменьшении величины v_{\max} получаем неоднολистные области течения), хотя приведенные значения максимальной скорости еще далеки от мини-

$\beta = 90^\circ$			$\beta = 8^\circ$			$v_{\max} = 1.8$		
v_{\max}	l_{\max}	C_y	v_{\max}	l_{\max}	C_y	β	l_{\max}	C_y
4	1	8	2.28	1	1.11	10°	0.66	1.37
3.4	1	7.95	1.8	0.73	1.1	15°	0.49	2
3.1	0.84	7.69	1.5	0.36	1.05	20°	0.3	2.53
2.9	0.22	6.62	1.3	0.09	0.94	27°	0.01	2.86



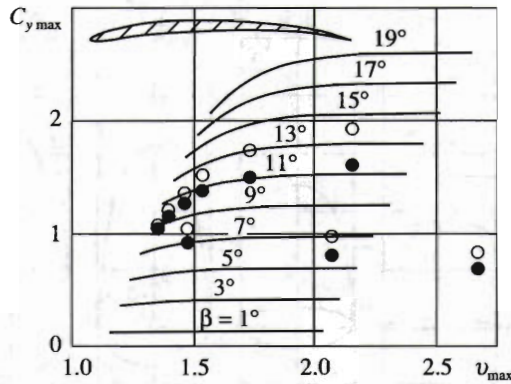
Фиг. 4



Фиг. 5

мально возможного значения v_{\max}^* (в данном случае это $v_{\max}^* = 1.15$). Хордовые диаграммы скорости отмечены цифрой 1.

Аналогичная картина наблюдается, если зафиксировать значение v_{\max} из допустимого интервала $[v_{\max}^*, v_{\max}^{**}]$ его изменения и увеличивать β вплоть до максимально допустимого значения β_{\max} (такая процедура соответствует движению по горизонтали в области допустимых значений параметров задачи). Фигура 3 иллюстрирует эту процедуру при $v_{\max} = 1.8$. Видно, что при увеличении β профили становятся все тоньше, коэффициент C_y увеличивается, профили приближаются к дуге окру-



Фиг. 6

ности и, начиная с определенного значения β , существенно меньшего β_{\max} , получаем неоднolistные области течения (в данном примере $\beta_{\max} = 36^\circ$).

На фиг. 5 представлены форма оптимизированного профиля (контур 2) при $\epsilon = 1$ для $v_{\max} = 1.8$, $\beta = 28^\circ$, соответствующая неоднolistной области течения, а также в увеличенном виде строение контура в окрестности точки схода потока (в силу симметрии точно так же устроен оптимизированный профиль в окрестности передней критической точки). Отметим, что хордовая диаграмма скорости (линия 1) мало отличается от двух “полок”.

На фиг. 6 представлены зависимости максимального значения $C_{y_{\max}}$ коэффициента подъемной силы от величины v_{\max} при разных β , построенные на основе точных решений. Правый конец каждой кривой при заданном значении β соответствует точному решению задачи в виде окружности. При уменьшении значения v_{\max} величины $C_{y_{\max}}$ уменьшаются, а для каждого β в соответствии с необходимым условием разрешимости задачи (см. теорему 1) имеется минимальное значение $v_{\max}^* = \exp \sin \beta$ максимальной скорости на контуре. Этому значению соответствует левый конец каждой кривой. Таким образом, при уменьшении значения v_{\max} в допустимом интервале его изменения величины $C_{y_{\max}}$ уменьшаются не более чем на 8%, и для каждого β имеется некоторое минимальное значение максимальной скорости на контуре, оно обязательно достигает заданной величины v_{\max} .

Приведем теперь результаты сравнения полученных оптимальных профилей с некоторыми известными профилями. Так, на фиг. 6 темными точками обозначены значения коэффициента C_y , рассчитанные для профиля Эплера E-61 (см., например [16]; этот профиль имеет толщину 6% и также изображен на фиг. 6) при некоторых значениях v_{\max} и для тех β , для которых соответствующие максимальные значения $C_{y_{\max}}$ при тех же значениях v_{\max} отмечены светлыми точками на графиках. Пары светлых и темных точек, расположенные правее графиков, соответствуют сравнению профиля E-61 с кругом. Как видим, характеристики профиля E-61 достаточно близки к оптимальным.

6. Учет сжимаемости потока при дозвуковом течении. Как известно, один из приближенных методов учета сжимаемости базируется на использовании линейных уравнений газовой динамики, записанных в плоскости годографа скорости – уравнений Чаплыгина, принимающих в случае дозвукового течения вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = K(S)^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial S}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial S} = -K(S)^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (6.1)$$

где φ – потенциал скорости, ψ – функция тока, θ – аргумент скорости, $K(\lambda)$, $S(\lambda)$ – известные функции приведенной скорости $\lambda = v/a_*$, a_* – критическая скорость. Для адиабатического движения совершенного газа, у которого $p = \rho^\kappa$ (p – величина давления, отнесенная к давлению в точке торможения, κ – показатель адиабаты), имеем

$$K(\lambda) = (1 - \lambda^2) \left(1 - \frac{\lambda^2}{h^2}\right)^{-h^2}, \quad \rho(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda^2}{h^2}\right)^{1/(\kappa-1)} \tag{6.2}$$

$$S(\lambda) = \ln \frac{2\lambda h}{(h^2 - \lambda^2)^{1/2} + h(1 - \lambda^2)^{1/2}} + h \ln \frac{(h^2 - \lambda^2)^{1/2} + (1 - \lambda^2)^{1/2}}{1 + h}, \quad h^2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}$$

Известно, что для воздуха ($\kappa = 1.41$) функция $K(\lambda)$ при $\lambda \leq 0.5$ отличается от единицы не более чем на 1.6%, поэтому при таких λ можно приближенно положить $K = 1$. В результате из системы уравнений (6.1) получим условия Коши – Римана, т.е. комплексный потенциал течения $w = \varphi + i\psi$ будет аналитической функцией переменной $\chi = S - i\theta$. При этом из соотношений (6.2) следует

$$\lambda(S) = \frac{\exp(S)}{1 - c^2 \exp(2S)}, \quad \rho(S) = \frac{1 - c^2 \exp(2S)}{1 + c^2 \exp(2S)} \tag{6.3}$$

где c^2 – постоянная интегрирования, выбранная из условия наилучшей аппроксимации адиабатических зависимостей соотношениями (6.3). Следуя известному подходу [17], можно взять $c^2 = 0.296$ или $c^2 = [2(\kappa + 1)(1 - \lambda_\infty)]^{-1}$, где $\lambda_\infty = v_\infty/a_*$. Полученную таким образом модель течения называют моделью газа Чаплыгина. Она обеспечивает удовлетворительную точность при расчете поля скоростей λ в дозвуковой области. Однако [17] переход к газу Чаплыгина дает погрешность при вычислении по λ чисел Маха M , поскольку формально для газа Чаплыгина число Маха не достигает единицы; поэтому в приближении Чаплыгина обычно определяют только скорость λ , а затем M вычисляют по точной формуле.

В рамках модели газа Чаплыгина класс оптимизированных контуров задается с помощью квазиконформного отображения

$$z(\zeta) = \int_{e^{-i\beta}}^{\zeta} \exp[-\chi(\zeta)] w'(\zeta) d\zeta - c^2 \overline{\exp[\chi(\zeta)] w'(\zeta) d\zeta} \tag{6.4}$$

при подстановке $\zeta = \exp(i\gamma)$. Здесь управляющая функция $P(\gamma) = \text{Re}\chi(\exp(i\gamma))$ и

$$\frac{dw}{d\zeta} = u \left(1 - \frac{\exp(-i\beta)}{\zeta}\right) \left(1 + \frac{\exp(i\beta)}{\zeta}\right)$$

а черта означает комплексное сопряжение. Отметим, что при $c^2 = 0$ из равенства (6.4) вытекает представление для модели идеальной несжимаемой жидкости. Далее выражение (1.2) коэффициента подъемной силы и вид условий разрешимости задачи сохраняются, изменяются лишь постоянные B_0, B_1, B_2 в равенстве (1.4):

$$B_1 + iB_2 = \pi(1 - \varepsilon) - 4\pi i \sin\beta \frac{c^2 \Lambda_\infty^2}{1 + c^2 \Lambda_\infty^2}, \quad B_0 = 2\pi \ln \Lambda_\infty \tag{6.5}$$

где

$$\Lambda_\infty = \Lambda(\lambda_\infty), \quad \Lambda(\lambda) = 2\lambda [1 + (1 + 4c^2 \lambda^2)^{1/2}]^{-1}$$

Таким образом, класс L рассматриваемых контуров задается с помощью интегрального представления (6.4), в котором управляющая функция $P(\gamma)$ удовлетворяет ограничениям (1.4) (с постоянными из (6.5) в правой части), а также ограничению (1.5), где нужно заменить v_{\max} на величину $2/(\sqrt{1+4c^2} + 1)$. Аналогом функционала (1.3) служит строго выпуклый функционал (подробный вывод приведен в [8])

$$J_c(P) = \int_0^{2\pi} \exp[-P(\tau)] \left[1 - c^2 \exp[2P(\tau)] M^2(\tau, \beta) \left| 2 \sin \frac{\tau + \beta}{2} \right|^{2-2\varepsilon} \right] \left| 2 \sin \frac{\tau + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1} d\tau$$

который при $c = 0$ (что соответствует переходу к модели идеальной несжимаемой жидкости) совпадает с функционалом (1.3). Таким образом, в данном случае для максимизации коэффициента подъемной силы при фиксированном β нужно минимизировать функционал $J_c(P)$ на множестве допустимых функций $P(\gamma)$, удовлетворяющих двум линейным ограничениям типа равенства и одному линейному ограничению типа неравенства. В отличие от случая идеальной несжимаемой жидкости в данной ситуации параметр β не может принимать произвольные значения из интервала $[0, \pi/2]$, а именно доказана

Теорема 3 (см. [13]). Если

$$\lambda_\infty > \lambda_\infty^*(\beta), \quad \lambda_\infty^*(\beta) = \frac{\exp(r_*)}{1 - c^2 \exp(2r_*)}$$

где r_* — единственный корень уравнения

$$r - c_0 + D(r, \beta) = 0$$

$$c_0 = \ln \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4c^2}}, \quad D(r, \beta) = \frac{\sin \beta [1 - c^2 \exp(2r)]}{[1 + c^2 \exp(2r)]}$$

то для любого профиля, обтекаемого газом Чаплыгина и имеющего теоретический угол атаки, равный или больший β , на контуре профиля найдутся точки, в которых $\lambda > 1$.

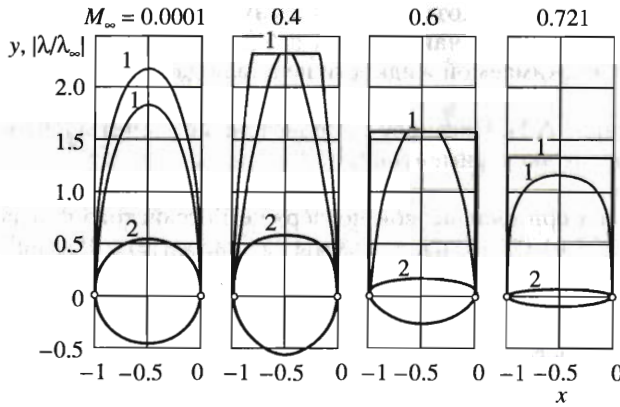
График зависимости $\lambda_\infty = \lambda_\infty^*(\beta)$ разделяет область изменения параметров λ_∞, β на две зоны. Если о проектируемом профиле известно, что он обтекается потоком газа Чаплыгина с таким значением λ_∞ скорости на бесконечности и с таким теоретическим углом атаки β , что точка (β, λ_∞) лежит выше названной линии, то в рамках принятой модели профиль обязательно будет иметь сверхзвуковую зону. Если точка (β, λ_∞) лежит ниже этой линии, то построение докритического профиля с указанными характеристиками возможно.

Построим теперь точное решение задачи в случае $\varepsilon = 1$, следуя схеме, изложенной выше. Расширенный функционал имеет тот же вид с заменой $J_0(P)$ на $J_c(P)$, из необходимого условия экстремума этого функционала найдем вид экстремальной функции $P^*(\gamma)$:

$$P^*(\gamma) = -\ln \frac{g(\mu_k, \mu; \gamma) + \sqrt{g^2(\mu_k, \mu; \gamma) - 4c^2 M^2(\gamma, \beta)}}{2} \quad (6.6)$$

Функция $\mu^*(\gamma)$, соответствующая точному решению, принимает в данном случае вид

$$\mu^*(\gamma) = \max \left\{ 0, \sqrt{1 + 4c^2} M(\gamma, \beta) - \mu_0 - \mu_1 \cos \gamma - \mu_2 \sin \gamma \right\} \quad (6.7)$$



Фиг. 7

а распределение скорости, соответствующее экстремальной функции $P^*(\gamma)$, таково:

$$|\lambda^*(\gamma)| = \min \left\{ 1, \left| \frac{M(\gamma, \beta)}{\sqrt{g^2(\mu_0, 0; \gamma) - 4c^2 M^2(\gamma, \beta)}} \right| \right\}$$

Естественно, из выписанных выражений при $c^2 = 0$ получаются формулы (3.2) и (3.3).

Далее система уравнений для нахождения μ_0, μ_1 и μ_2 получается из соотношений (1.4) подстановкой экстремальной функции (6.6) с учетом выражения (6.7) при соответствующих значениях B_0, B_1 и B_2 :

$$\int_0^{2\pi} R(\mu_k, \mu^*(\gamma); \gamma) d\gamma = B_0$$

$$\int_0^{2\pi} R(\mu_k, \mu^*(\gamma); \gamma) e^{i\gamma} d\gamma = B_1 + iB_2$$

$$R(\mu_k, \mu^*(\gamma); \gamma) \equiv \ln \frac{g(\mu_k, \mu^*(\gamma); \gamma) + \sqrt{g^2(\mu_k, \mu^*(\gamma); \gamma) - 4c^2 M^2(\gamma, \beta)}}{2}$$

Отметим, что функция (6.7), как и в случае идеальной несжимаемой жидкости, обладает свойством симметрии

$$\mu^*(\pi - \gamma)_{\mu_1 = \alpha} = \mu^*(\gamma)_{\mu_1 = -\alpha}$$

При $\epsilon = 1$ это свойство с учетом того, что $B_1 = 0$, позволяет доказать, как и в случае модели идеальной несжимаемой жидкости, симметричность оптимального решения.

Итак, получены представление точного решения основной вариационной обратной краевой задачи аэрогидродинамики для модели газа Чаплыгина и система уравнений для нахождения параметров. Проведенные расчеты и результаты построения точных решений для разных наборов значений β и v_{\max} , подтвердили в данном случае все тенденции изменения оптимизированных форм, установленные в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости и описанные выше.

На фиг. 7 представлены точные решения (контуры 2), соответствующие $\epsilon = 1$ и выбору $\beta = 5^\circ$, при разных числах M_∞ , а также хордовые диаграммы скорости (линии 1).

Интересно отметить, что в некоторых случаях экстремальные распределения скорости имеют по две “полки” (случаи $M_\infty = 0.4$ и $M_\infty = 0.6$ на фиг. 7). Такой эффект для модели идеальной несжимаемой жидкости не наблюдался.

Авторы благодарят А.Н. Ихсанову за проведенные расчеты и переданные результаты вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00015) и программы “Университеты России” (УР 04.01.009).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haslinger J., Neittaanmäki P.* Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Application. Chichester: Wiley, 1988. 335 p.
2. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
3. *Лаврентьев М.А.* Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана // Тр. ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского. 1934. Вып. 155. 41 с.
4. *Зубов В.И.* К вопросу об оптимальном профиле крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 1. С. 241–245.
5. *Елизаров А.М.* Некоторые экстремальные задачи теории крыла // Изв. вузов. Математика. 1988. № 10. С. 71–74.
6. *Елизаров А.М., Федоров Е.В.* Оптимизация аэродинамических форм методом обратных краевых задач // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 571–580.
7. *Елизаров А.М., Федоров Е.В.* Решение вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики методами численной оптимизации // ПМТФ. 1993. № 2. С. 73–81.
8. *Елизаров А.М., Федоров Е.В., Фокин Д.А.* Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики для дозвукового течения газа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 6. С. 958–968.
9. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.
10. *Фокин Д.А.* Максимизация аэродинамического качества крыловых профилей с турбулентным пограничным слоем // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 177–184.
11. *Elizarov A.M., Fokin D.A.* Upper estimates of airfoil aerodynamic characteristics for a viscous incompressible flow // ZAMM. 1999. V. 79. № 11. P. 757–762.
12. *Елизаров А.М., Фокин Д.А.* Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 6. С. 758–763.
13. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В., Степанов Г.Ю.* Основные методы, результаты, приложения и нерешенные проблемы теории обратных краевых задач аэрогидродинамики. Казань: Изд-во ДАС, 2001. 225 с. (Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 10).
14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
15. *Иоффе Ф.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
16. *Eppler R.* Airfoil Design and Data. Berlin: Springer, 1990, 562 p.
17. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.