

УДК 533.6.011; 697.4

© 2005 г. Н. Л. Ефремов, А. Н. Крайко, К. С. Пьянков

**ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ГОЛОВНАЯ ЧАСТЬ
МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПРИ ЗАДАННЫХ ГАБАРИТАХ И ОБЪЕМЕ**

В рамках формулы Ньютона решена задача построения осесимметричной головной части, реализующей минимум волнового сопротивления при заданных объеме и максимально допустимых габаритах. Решение получено в приближении тонкого тела и в полной постановке (без предположения о малости угла между осью тела и касательной к его контуру). В обеих постановках оптимальные контуры наряду с участком двустороннего экстремума могут содержать цилиндрическую образующую – участок краевого экстремума по максимально допустимой радиальной координате. Кроме того, в полной постановке оптимальные контуры могут включать передний или задний торец – участки краевого экстремума и по продольной координате, и по границе применимости формулы Ньютона. Определение коэффициентов сопротивления построенных головных частей численным интегрированием уравнений осесимметричного течения идеального газа подтвердило преимущества выпуклых конфигураций. В том же приближении сопротивление оптимальных в рамках формулы Ньютона головных частей с вогнутыми участками может превзойти сопротивление эквивалентных конусов. Измененная для таких случаев формулировка вариационной задачи (в частности, с заменой фиксации объема его ограничением снизу) приводит к решению Ньютона со свободным объемом.

1. Оптимальные головные части в приближении тонкого тела. Рассмотрим задачу построения осесимметричной головной части, которая в рамках формулы Ньютона для давления p на поверхности тела при фиксированных радиусе основания R , длине L и объеме Ω имеет минимальное волновое сопротивление D . Сначала, как и в [1], решим ее в приближении тонкого тела. Решение, построенное в [1], неполно, ибо при заданных Ω и относительной толщине $\tau = R/L$ полученные там уравнения и условия позволяют строить оптимальные головные части лишь в четверти полного диапазона значений коэффициента $C_\Omega = \Omega/(\pi R^2 L)$.

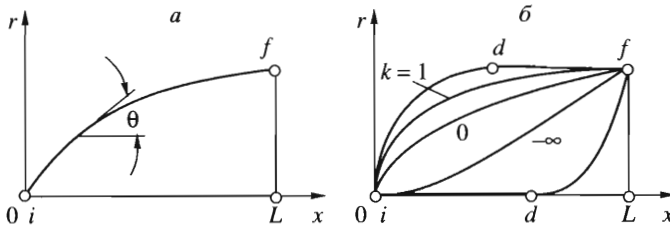
По формуле Ньютона [1–3] на головной части (*if* на фиг. 1, *a*)

$$p = p_\infty + \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \theta = p_\infty + \frac{q}{1 + x'^2} \approx p_\infty + \frac{q}{x'^2}, \quad q = \rho_\infty V_\infty^2 \quad (1.1)$$

Здесь ρ – плотность, V – скорость, $x = x(r)$ – уравнение образующей, $x' = dx/dr$, а индекс ∞ метит параметры набегающего потока, направленного по оси x . Последняя часть формулы для давления записана в приближении тонкого тела ($x'^2 \gg 1$).

Для коэффициента C_Ω , а при учете формулы (1.1) для коэффициента волнового сопротивления C_d тонкой головной части будем иметь ($\xi' = d\xi/d\eta$)

$$C_\Omega \equiv \frac{\Omega}{\pi R^2 L} = \frac{1}{R^2 L} \int_0^R x' r^2 dr = \int_0^1 \xi' \eta^2 d\eta$$



Фиг. 1

$$C_d \equiv \frac{D}{\pi q R^2} = \frac{2}{q R^2} \int_0^R (p - p_\infty) r dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{r dr}{1 + x^2} \approx 2\tau^2 \int_0^1 \frac{\eta d\eta}{\xi^2} \tag{1.2}$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{R}{L}$$

Составим функционал Лагранжа и найдем его вариацию

$$\Phi = \frac{C_d}{2\tau^2} + \lambda C_\Omega = \int_0^1 \left(\frac{\eta}{\xi^2} + \lambda \xi' \eta^2 \right) d\eta \tag{1.3}$$

$$\delta\Phi = \int_0^1 \left[\left(\frac{2\eta}{\xi^3} - \lambda \eta^2 \right)' \delta\xi + \frac{3\eta}{\xi^4} (\delta\xi')^2 \right] d\eta + \left(\lambda \eta^2 - \frac{2\eta}{\xi^3} \right) \delta\xi \Big|_i^f$$

Здесь λ – постоянный множитель Лагранжа, штрихом обозначена производная по η , а $\delta\xi$ и $\delta\xi'$ – вариации ξ и ξ' – разности проварьированных и непроварьированных функций при фиксированном η . При заданных координатах конечных точек $\delta\xi_i = \delta\xi_f = 0$. При фиксированных C_Ω и τ знаки вариаций Φ и C_d совпадают, и в согласии с формулой (1.3) необходимые условия минимума C_d имеют вид

$$\left(\frac{2\eta}{\xi^3} - \lambda \eta^2 \right)' = 0, \quad \frac{3\eta}{\xi^4} \geq 0$$

Второе условие (“условие Лежандра”) выполняется для любых образующих, а первое после интегрирования и разрешения относительно ξ' сводится к уравнению (C – постоянная интегрирования)

$$\xi' = (2\eta)^{1/3} / (C + \lambda \eta^2)^{1/3} \tag{1.4}$$

В силу определения ξ и η имеем $\xi(0) = 0$ и $\xi(1) = 1$. Проинтегрировав уравнение (1.4) с учетом этих условий, получим уравнение экстремали if в форме

$$\xi = \frac{I(\eta, k)}{I(1, k)}, \quad \xi' \equiv \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\eta^{1/3}}{I(1, k)(1 - k\eta^2)^{1/3}}, \quad k = -\frac{\lambda}{C}$$

$$I(\eta, k) = \int_0^\eta \frac{\zeta^{1/3} d\zeta}{(1 - k\zeta^2)^{1/3}} = 2I_0(\eta, k) - \frac{3}{4}(1 - k\eta^2)^{2/3} \eta^{4/3} \tag{1.5}$$

$$I_0(\eta, k) = \int_0^\eta (1 - k\zeta^2)^{2/3} \zeta^{1/3} d\zeta$$

В согласии с соотношениями (1.2) и (1.5) имеем

$$C_{\Omega} = I_{\Omega}(k), \quad C_d = \tau^2 I_d(k) \tag{1.6}$$

$$I_{\Omega}(k) = \frac{1}{I(1, k)} \int_0^1 \frac{\eta^{7/3} d\eta}{(1 - k\eta^2)^{1/3}} = \frac{1}{kI(1, k)} \left[I_0(1, k) - \frac{3}{4}(1 - k)^{2/3} \right], \quad I_d(k) = 2I^2(1, k)I_0(1, k)$$

На первый взгляд выбор постоянной k позволяет получить произвольные значения $I_{\Omega}(k)$, а вместе с ним и C_{Ω} . Покажем, что эта кажущаяся возможность не реализуема. Найдем производную $d\eta/d\xi$ в точке f экстремальной образующей и определим C_{Ω} и C_d для нескольких характерных значений k . Согласно второй формуле (1.5) при $\eta = \eta_f = 1$ имеем

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_f = I(1, k)(1 - k)^{1/3} \tag{1.7}$$

Из выражения для $I(1, k)$ следует непрерывная зависимость $I(1, k)$ от k при $k = 1$. В силу этого интеграл $I(1, k)$, будучи положительным при $k \leq 1$, сохраняет знак в конечной окрестности точки $k = 1$ и при $k > 1$. В этой окрестности, как видно из равенства (1.7), $(d\eta/d\xi)_f < 0$, т.е. такие экстремали *if* подходят к точке f сверху, имея при $x < L$ запрещенные по постановке задачи участки с $r > R$. В дополнение к нарушению подразумеваемого по постановке задачи габаритного ограничения $r \leq R$ на экстремали *if* на теневой стороне указанных участков формула Ньютона несправедлива, условие ее применимости в данной задаче имеет вид [2, 4, 5]

$$0 \leq \theta \leq \pi/2 \tag{1.8}$$

Итак, оставив на время пока не исключенную возможность изменения при некотором $k = k_* > 1$ знака интеграла $I(1, k)$, следует принять, что возможные значения постоянной $k \leq 1$. Согласно равенству (1.7), значению $k = 1$ отвечает экстремаль с горизонтальной касательной в точке f . Как показано ниже, такая экстремаль играет важную роль в решении рассматриваемой задачи. Вычислим, отвечающие ей коэффициенты C_{Ω_1} и C_{d1} . При $k = 1$ по формулам (1.6) имеем

$$C_{\Omega_1} = \frac{1}{2}, \quad C_{d1} = \tau^2 I_d(1) = 8\tau^2 I_0^3(1, 1) \tag{1.9}$$

В согласии с равенством $I(1, 1) = 2I_0(1, 1)$ и найденной численно величиной интеграла $I_0(1, 1)$ для контура в малой окрестности передней точки и для коэффициентов C_{Ω_1} и C_{d1} имеем

$$\xi \approx 0.73\eta^{4/3}, \quad C_{\Omega_1} = \frac{1}{2}, \quad C_{d1} = 1.0822\tau^2 = \frac{0.2706}{C_{\Omega_1}^2} \tau^2 \tag{1.10}$$

Постоянная $k = 0$ отвечает $\lambda = 0$, что эквивалентно задаче построения “ньютоновской” оптимальной головной части при заданном τ и свободном объеме. Ньютоновская головная часть имеет минимальное сопротивление, причем для нее

$$\xi = \eta^{4/3}, \quad C_{\Omega_0} = \frac{2}{5}, \quad C_{d0} = \frac{27}{32}\tau^2 = \frac{27}{200C_{\Omega_0}^2} \tau^2 \tag{1.11}$$

Из-за отличий в определениях C_d и τ коэффициент $27/32$ в формуле для C_{d0} вдвое больше аналогичного коэффициента, полученного ранее [1].

В силу формул из (1.10) и (1.11) в передней точке, где $x' = \tau\xi' = \infty$, и в ее окрестности нарушается условие тонкого тела. Это тем не менее слабо влияет на сопротивление всей головной части, ибо в данном случае, согласно второй формуле (1.2), вклад в величину C_d окрестности носика с относительным радиусом η мал (пропорционален $\eta^{4/3}$).

Если заданы объем и радиус основания при свободной длине головной части, то при постановке вариационной задачи координату x следует отнести не к L , а к R , введя переменную $\xi^\circ = x/R$. После этого в формулах (1.2) и (1.3) τ заменится на 1, а ξ – на ξ° . В итоге условие, определяющее оптимальную длину, получится приравниванием нулю коэффициента при $\delta\xi_i^\circ$ в неизменившемся в остальном выражении (1.3) для $\delta\Phi$. Это эквивалентно равенству нулю постоянной интегрирования C в уравнении (1.4) и обращению в “минус бесконечность” постоянной k в формуле (1.5). Последнее формально означает замену в уравнениях и формулах (1.5) и (1.6) величин $(1 - k\eta^2)$ и $(1 - k\xi^2)$ соответственно на η^2 и ξ^2 . В результате, вернувшись к переменной $\xi = x/L = \tau\xi^\circ$, где в отличие от предыдущего L – не заданная, а найденная длина, получим

$$\xi = \eta^{2/3}, \quad C_{\Omega(-\infty)} = \frac{1}{4}, \quad C_{d(-\infty)} = \frac{27}{16}\tau^2 = \frac{27}{256C_{\Omega(-\infty)}^2}\tau^2 \quad (1.12)$$

Хотя, согласно сказанному выше, вторая формула (1.12) при заданном значении $C_{\Omega(-\infty)}$ служит для определения τ , ею можно пользоваться и для определения величины $C_{\Omega(-\infty)}$, которая при фиксированном τ отвечает $k = -\infty$. Таким образом, согласно формулам (1.10)–(1.12) для любого заданного τ изменение k от 1 до $-\infty$ дает величины τC_{Ω} оптимальных головных частей из диапазона $[1/4, 1/2]$. С другой стороны, условию (1.8) применимости формулы Ньютона (1.1) отвечают головные части от заднего торца: $x = L, 0 \leq r \leq R$ до затупленного цилиндра: $x = 0, 0 \leq r \leq R; 0 \leq x \leq L, r = R$. Для них коэффициенты C_{Ω} изменяются от 0 до 1. Правда, на торцах теряет силу приближение тонкого тела ($x^2 \gg 1$). Однако и при учете этого пока математически не сформулированного ограничения четырехкратное отличие найденного $[1/4, 1/2]$ и возможного $[0, 1]$ интервалов изменения коэффициента C_{Ω} – свидетельство неполноты построенного решения.

Замечания. 1°. Причина отмеченной неполноты связана с тем, что при решении рассмотренной задачи до сих пор, как и ранее [1], не учитывались ограничения, которые неявно подразумеваются, но не выполняются автоматически. К их числу относятся упоминавшиеся ограничение (1.8) угла наклона θ касательной к образующей if и габаритные ограничения

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq x \leq L, \quad \text{или} \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.13)$$

Первое из них уже использовалось выше, правда, пока лишь при отбраковке превышающих единицу значений k .

2°. При решении задач построения оптимальных головных частей без предположения об их тонкости либо при заданных габаритах [4], либо при заданных объеме и радиусе основания [5] решающую роль играют ограничения, налагаемые на угол θ (1.8) и продольную координату (1.13). Из-за них в первой задаче при любых τ оптимальный контур содержит передний торец [2–4] – участок краевого экстремума одновременно и по x , и по θ . Размер торца, оставаясь конечным при конечных τ , стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$. Обязательное присутствие торца в оптимальной головной части заданных габаритов было установлено [6] и при решении этой задачи в приближении полных уравнений Эйлера. В приближении тонкого тела “следом” торца в той же задаче служит вертикальная касательная к контуру головной части в ее передней точке. Во второй задаче при $0 \leq C_{\Omega}/\tau < 13/30$ те же ограничения приводят к торцу $x = L$ – участку краевого экстремума, из которого выступает остроконечный штырь [2, 5].

В обеих задачах в точке стыковки экстремали (участка двустороннего экстремума) и торца на экстремали $\theta = 45^\circ$, а во всех точках экстремали $\theta \leq 45^\circ$. Для первой задачи последнее неравенство, полученное еще Ньютоном [3], не было замечено (или понято) Лежандром. Для той же задачи Лежандр получил более слабое условие (“условие Лежандра”) $\theta \leq 60^\circ$. Как было показано [2], то же условие $\theta \leq 45^\circ$ при отсутствии предположения о тонкости тела должно выполняться на экстремали и при заданных радиальном габарите и объеме головной части.

Сказанное в замечаниях 1° и 2° относится к решению задач, близких к рассматриваемой, однако без предположения о тонкости тела. Поскольку такое предположение в силу упрощенного варианта формулы (1.1) дает бесконечное давление при $x' = 0$, то это заведомо исключает из искомой оптимальной головной части торцы $x = 0$ и $x = L$. При этом, в силу ограничений (1.13), в качестве возможных участков краевого экстремума остаются отрезок оси симметрии $r = 0$ или $\eta = 0$ и отрезок образующей цилиндра $r = R$ или $\eta = 1$. Условия их соединения (в точке d на фиг. 1, б) с экстремалью (участком двустороннего экстремума) получаются из записанных соответствующим образом условий трансверсальности. Они, как можно показать, сводятся к требованию гладкой стыковки, т.е. к равенству $(d\eta/d\xi)_d = 0$ в концевой или начальной (соответственно для верхней или нижней образующей на фиг. 1, б) точке экстремали. Объем и сопротивление оптимальной головной части с контуром, содержащим отрезок оси симметрии id , не отличается от таковых для головной части, которая, отвечая значению $k = -\infty$, имеет длину Ll при $0 \leq l \leq 1$. Поэтому согласно соотношениям (1.12)

$$C_\Omega = \frac{l}{4}, \quad C_d = \frac{27\left(\frac{R}{Ll}\right)^2}{16l^2} = \frac{27\tau^2}{16l^2} = \frac{C_{d(-\infty)}}{l^2} = \frac{27\tau^2}{256C_\Omega^2}, \quad 0 \leq l \leq 1 \quad (1.14)$$

На самом деле отрезок оси симметрии id , вносящий нулевой вклад и в объем, и в сопротивление головной части, представляется лишним и по постановке задачи, поскольку его удаление не нарушает ограничения (1.13), налагаемого на максимально допустимую длину головной части.

Сопротивление оптимальной головной части с контуром, содержащим отрезок df прямой $r = R$, не отличается от сопротивления головной части, которая, отвечая значению $k = 1$, имеет длину Ll при $0 \leq l \leq 1$ при равном $\pi R^2 L(1 - l)$ дополнительном объеме ее цилиндрической части. Поэтому, в согласии с формулами (1.9),

$$C_\Omega = 1 - \frac{l}{2}, \quad C_d = 1.0822 \frac{\tau^2}{C_\Omega^2(2-l)^2 l^2} = \frac{0.2706\tau^2}{C_\Omega^2(2-l)^2 l^2}, \quad 0 \leq l \leq 1 \quad (1.15)$$

Формулы (1.14) дают коэффициент C_d оптимальных головных частей для $0 \leq C_\Omega \leq 0.25$, а формулы (1.15) – для $0.5 \leq C_\Omega \leq 1$. Минимальному (при $C_\Omega = 0$) и максимальному (при $C_\Omega = 1$) возможным объемам отвечают значение $l = 0$ и одинаковые бесконечные коэффициенты сопротивления C_d . Последнее есть результат использования формулы Ньютона (1.1) в приближении тонкого тела ($x'^2 \gg 1$), которое при любых сколь угодно малых τ нарушается на торцах $x = 0$ и $x = L$. Если же использовать первую (полную) запись этой формулы, то коэффициенты сопротивления торцов $x = 0$ и $x = L$, $0 \leq r \leq 1$ получаются конечными, хотя и максимальными ($C_d = 1$).

Отмеченное обстоятельство и возможность вертикального положения касательной в передней точке головных частей, оптимальных в приближении тонкого тела, оправдывает расчет их коэффициентов сопротивления с использованием полной формулы Ньютона.

Приведем найденные выше уравнения “тонких” оптимальных контуров и формулы для коэффициентов C_Ω и C_d . Все контуры начинаются на оси симметрии и приходят в точку $\xi = \eta = 1$.

Остроконечные контуры, начинающиеся при $\xi = 1 - l$ ($0 \leq l < 1$):

$$\xi = 1 - l + l\eta^{2/3}, \quad C_{\Omega} = \frac{l}{4} \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{C_d}{\tau^2} = 27 \int_0^1 \frac{\zeta^3 d\zeta}{9\zeta\tau^2 + 4l^2}; \quad 0 \leq l \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 1 - l \leq \xi \leq 1 \quad (1.16)$$

Остроконечный контур максимально допустимой длины получается отсюда при $l = 1$

$$\xi = \eta^{2/3}, \quad C_{\Omega-\infty} = \frac{1}{4}, \quad \frac{C_{d(-\infty)}}{\tau^2} = 27 \int_0^1 \frac{\zeta^3 d\zeta}{9\zeta\tau^2 + 4}$$

Затупленные контуры, начинающиеся при $\xi = \eta = 0$ с коэффициентами C_{Ω} , меньшими “ньютоновского”:

$$\xi = \frac{I(\eta, -k)}{I(1, -k)}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq k \leq \infty$$

$$C_{\Omega} = \frac{1}{I(1, -k)} \int_0^1 \frac{\eta^{7/3} d\eta}{(1 + k\eta^2)^{1/3}}, \quad \frac{C_d}{\tau^2} = 2I^2(1, -k) \int_0^1 \frac{(1 + k\eta^2)^{2/3} \eta d\eta}{I^2(1, -k)(1 + k\eta^2)^{2/3} \tau^2 + \eta^{2/3}} \quad (1.17)$$

Контур Ньютона, также начинающийся при $\xi = \eta = 0$, отвечает $k = 0$. Для него

$$\xi = \eta^{4/3}, \quad C_{\Omega 0} = \frac{2}{5}, \quad \frac{C_{d0}}{\tau^2} = 18 \int_0^1 \frac{\eta d\eta}{9\tau^2 + 16\eta^{2/3}} \quad (1.18)$$

Для затупленных контуров с коэффициентами $C_{\Omega} > C_{\Omega 0} = 2/5$, также начинающихся при $\xi = \eta = 0$, справедливы формулы (1.17) с заменой k на $-k$ при $0 \leq k \leq 1$. При $k = 0$ они сводятся к формулам (1.18) для контура Ньютона, а при $k = 1$ описывают контур с горизонтальной касательной в точке $\xi = \eta = 1$. Для него

$$\xi = \frac{I(\eta, 1)}{I(1, 1)}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad C_{\Omega 1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{C_{d1}}{\tau^2} = 2I^2(1, 1) \int_0^1 \frac{(1 - \eta^2)^{2/3} \eta d\eta}{I^2(1, 1)(1 - \eta^2)^{2/3} \tau^2 + \eta^{2/3}}$$

Затупленные контуры, начинающиеся при $\xi = \eta = 0$ и имеющие цилиндрический участок $l \leq \xi \leq 1, \eta = 1$ ($0 \leq l \leq 1$):

$$\xi = l \frac{I(\eta, 1)}{I(1, 1)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq l \leq 1$$

$$C_{\Omega} = 1 - \frac{l}{2}, \quad \frac{C_d}{\tau^2} = 2I^2(1, 1) \int_0^1 \frac{(1 - \eta^2)^{2/3} \eta d\eta}{I^2(1, 1)(1 - \eta^2)^{2/3} \tau^2 + l^2 \eta^{2/3}} \quad (1.19)$$

Отсюда при $l = 1$ получается предыдущий контур, а при $l = 0$ – “полный” цилиндр, у которого $C_{\Omega} = C_d = 1$.

2. Оптимальные головные части в приближении полной формулы Ньютона. Если воспользоваться полной формулой Ньютона и взять в качестве масштаба обеих координат максимально допустимый радиус головной части R , то формулы для коэффициентов C_{Ω} и C_d примут вид ($\eta' = d\eta/d\xi, \xi' = d\xi/d\eta$)

$$\frac{C_{\Omega}}{\tau} = \int_{0, (\eta' > 0)}^1 \eta^2 \xi' d\eta + \int_{\eta' = 0} \eta^2 d\xi, \quad C_d = 2 \int_0^1 \frac{\eta d\eta}{1 + \xi^2}, \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{r}{R} \quad (2.1)$$

С учетом этого составим функционал Лагранжа

$$\Phi = C_d + \lambda \frac{C_\Omega}{\tau} = 2 \int_0^1 \frac{\eta d\eta}{1 + \xi^2} + \lambda \int_{0, \eta' > 0}^1 \eta^2 \xi' d\eta + \lambda \int_{\eta' = 0} \eta^2 d\xi$$

и вычислим его вариацию

$$\begin{aligned} \delta C_d = \delta \Phi &= Y_{i+} \Delta \eta_i - Y_{b-} \Delta \eta_b + [X_{i+} - X_{b-} + \lambda(\eta_b^2 - \eta_i^2)] \Delta \xi_i \mp Z_{d\pm} \Delta \eta_d \pm X_{d\pm} \Delta \xi_d + \\ &+ \int_{\eta' > 0} (X - \lambda \eta^2) \delta \xi d\eta + 2 \int_{\eta' = 0} \lambda \eta \delta \eta d\xi + \int_{\xi' \geq 0} G(\delta \xi')^2 d\eta + \\ &+ \int_{\xi' = 0} [X_{b-} + \lambda(\eta^2 - \eta_b^2)] \delta \xi' d\eta \\ X &= \frac{2\eta \xi'}{(1 + \xi'^2)^2}, \quad Y = \eta \xi'^2 \frac{\xi'^2 - 1}{(1 + \xi'^2)^2}, \quad Z = \eta \frac{1 + 3\xi'^2}{(1 + \xi'^2)^2}, \quad G = \eta \frac{3\xi'^2 - 1}{(1 + \xi'^2)^3} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь b и i – нижняя и верхняя точки возможного торца bt ; индексы минус и плюс метят величины до и после соответствующей точки (при движении от i к f); соотношения $\eta' > 0$ и т.п. означают интегрирование по участкам с $\eta' > 0$ и т.п., а $\Delta \eta$ и $\Delta \xi$ – приращения координат точек стыковки разных участков.

В формулах (2.2) в дополнение к слагаемым, выписанным в [2], где до конца решались вариационные задачи или с фиксированными габаритами, или с фиксированными радиальным габаритом и объемом, добавлены интеграл по цилиндрическому участку df с $\eta = 1$ и $\eta' = 0$ и слагаемые, содержащие $\Delta \eta_d$ и $\Delta \xi_d$. Последние появляются в двух случаях: 1) если оптимальная головная часть оказывается короче L ; в этом случае, которому в формулах (2.2) отвечают верхние знаки и индексы, ее образующая начинается на оси симметрии в точке i , совпадающей с точкой d , а $\Delta \eta_d = 0$; 2) если оптимальная головная часть содержит цилиндрический участок $\eta = 1$; в формулах (2.2) этому случаю отвечают нижние знаки и индексы, причем $\Delta \eta_d$ и $\delta \eta$ под знаком интеграла по участку $\eta' = 0$ неположительны.

Рассмотрение слагаемых в правой части выражения для δC_d согласно формуле (2.2) дает необходимые условия минимума C_d , определяющие оптимальную образующую if . На участках двустороннего экстремума (УДЭ), где вариации $\delta \xi$ произвольны, имеем

$$\lambda \eta^2 - X \equiv \eta \left[\lambda \eta - \frac{2\xi'}{(1 + \xi'^2)^2} \right] = C \tag{2.3}$$

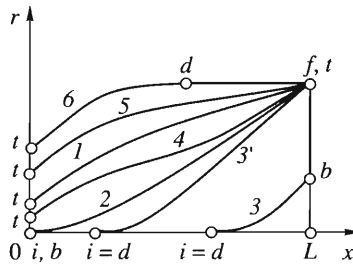
с подлежащей определению постоянной интегрирования C .

Требование неотрицательности на УДЭ коэффициента при $(\delta \xi')^2$ в формуле (2.2) дает необходимое условие Лежандра: $\xi' \geq 1/\sqrt{3}$. Оно, однако, оказывается слишком слабым и должно быть заменено упоминавшимся выше неравенством

$$\xi' \geq 1 \tag{2.4}$$

Действительно, в любой точке УДЭ можно ввести бесконечно малый торец bt , для которого $\Delta \eta_b \leq 0$, а $\Delta \eta_i \geq 0$, ибо непроварьированный контур в этой точке гладкий. При нарушении условия (2.4) такие приращения $\Delta \eta_b$ и $\Delta \eta_i$ уменьшают сопротивление.

Пусть оптимальный контур содержит передний ($\xi = 0$) или задний ($\xi = L/R = 1/\tau$) торец, которые из-за ограничений (1.8) и (1.13), как и ранее [2–5], могут появиться в



Фиг. 2

качестве участков краевого экстремума одновременно и по θ , и по ξ . В точках их стыковки с УДЭ приращения $\Delta\eta_b$ или $\Delta\eta_t$ произвольны. Следовательно, как и ранее [2–5], в точках b и t должны выполняться равенства

$$\xi'_{b-, t+} = 1 \quad (2.5)$$

т.е. УДЭ подходят к любому торцу под углом в 45° .

Разные типы нетонких оптимальных осесимметричных головных частей изображены на фиг. 2. Все они различаются формой носика: “заостренные” (контуры 2, 3 и 3') с $\xi'_{i, d} = \infty$ и с передним торцом (1, 4–6), а также присутствием (3) или отсутствием (1, 2, 3', 4, 5 и 6) заднего торца; кроме того, они могут иметь цилиндрический участок (6). Для контуров с передним торцом точка b совпадает с точкой i , а так как слева к ней примыкает ось симметрии, то $\xi'_{b-} = \infty$. Для контуров с задним торцом точка t совпадает с точкой f .

При каждом фиксированном удлинении или $\tau = R/L$ наименьшее сопротивление имеет затупленная головная часть 1, отвечающая задаче Ньютона [2–4] со свободным объемом. При ее построении в уравнении (2.3) следует приравнять нулю множитель λ . В результате при учете условия (2.5) в точке t уравнение ньютоновского УДЭ примет вид

$$\frac{\eta\xi'}{(1 + \xi'^2)^2} = \frac{\eta_t}{4} \quad (2.6)$$

Взяв, как и ранее [1–6], в качестве параметра $q = \xi'$, проинтегрируем уравнение (2.6) с учетом условий в точках d и f . Вычислив затем $C_\Omega = C_{\Omega 0}$ и $C_d = C_{d0}$, получим

$$\eta = \eta_t \frac{(1 + q^2)^2}{4q}, \quad \xi = \frac{\eta_t}{16}(3q^4 + 4q^2 - 7 - 4\ln q), \quad 1 \leq q \leq q_f, \quad \eta_t = \frac{4q_f}{(1 + q_f^2)^2}$$

$$\frac{C_{\Omega 0}}{\tau} = \frac{(q_f^2 - 1)(18q_f^{10} + 123q_f^8 + 373q_f^6 + 673q_f^4 + 823q_f^2 - 30) - 120q_f^2 \ln q_f}{60(1 + q_f^2)^6} q_f \quad (2.7)$$

$$C_{d0} = \frac{3q_f^6 + 10q_f^4 + 17q_f^2 + 4q_f^2 \ln q_f + 2}{2(1 + q_f^2)^4}, \quad \tau = \frac{4(1 + q_f^2)^2}{q_f(3q_f^4 + 4q_f^2 - 7 - 4\ln q_f)}$$

Если $q_f^2 \gg 1$, то $q^2 \gg 1$ на большей части экстремали, и при учете отличия в определении ξ получающиеся из соотношений (2.7) уравнение экстремали и формулы для $C_{\Omega 0}$ и C_{d0} совпадут с уравнениями и формулами (1.11).

Для любого отличного от нуля τ при значениях C_Ω , не превышающих некоторую определенную ниже величину C_Ω^m , оптимальны короткие с $\xi_i = \xi_d > 0$ заостренные ($\xi'_{i+} = \infty$) контуры при $\tau > 1/2$ – с задним торцом (типа 3), а при $\tau \leq 1/2$ – с ним или без него (кривая 3 и кривые типа 2 с задним торцом). Действительно, в таких случаях знак $\Delta \xi_d$ произволен. Поэтому одно из условий оптимальности – обращение в нуль коэффициента X_{d+} из равенства (2.2). Последнее дает $\xi'_{d+} = 0$ и $\xi'_{d+} = \infty$, но $\xi'_{d+} = 0$ не удовлетворяет необходимому условию (2.4). Следовательно $\xi'_{d+} = \infty$, и оптимальны заостренные головные части. Для них в уравнении (2.3) постоянная $C = 0$, а при наличии заднего торца на экстремали имеем

$$\eta = \frac{2\xi'}{\lambda(1+\xi'^2)^2} = \frac{4\eta_b q}{(1+q^2)^2} \tag{2.8}$$

Здесь множитель λ выражен через η_b с учетом справедливого в этом случае в точке b равенства (2.5). Уравнение (2.8) интегрируется аналогично (2.6). В итоге, как и ранее [2, 5], найдем

$$\eta = \frac{4\eta_b q}{(1+q^2)^2}, \quad \xi = \frac{1}{\tau} + 2\eta_b \left[\frac{1+3q^2}{(1+q^2)^2} - 1 \right], \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad \eta_{i=d} = 0, \quad \xi_{i=d} = \frac{1}{\tau} - 2\eta_b \tag{2.9}$$

$$\frac{C_\Omega}{\tau} = \frac{13}{30}\eta_b^3, \quad C_d = 1 - \frac{13}{20}\eta_b^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1.3^{1/3} \left(\frac{3C_\Omega}{\tau} \right)^{2/3} \approx 1 - 1.135 \left(\frac{C_\Omega}{\tau} \right)^{2/3}$$

При фиксированном τ решение (2.9) справедливо для η_b , удовлетворяющих неравенству

$$0 \leq \eta_b \leq \eta_b^m = \inf[1, 1/(2\tau)] \tag{2.10}$$

Контуры (2.9) не тонки на столь значительных участках, что в противоположность решению (2.7) у них нет аналогов среди построенных в рамках приближения тонкого тела.

Если вторая часть условия (2.10) со знаком меньше имеет место и для совпадающих точек b и f , т.е. если $\tau < 1/2$, то при таких τ в конечном диапазоне значений коэффициентов $C_\Omega/\tau > 13/30$ длины оптимальных головных частей будут также меньше, чем L . В отличие от рассмотренных, у этих головных частей без заднего торца наклон касательной в точке f_- меньше 45° и, следовательно, $q_f > 1$. Для них формулы (2.9) заменяются на

$$\eta = \frac{q(1+q_f^2)^2}{q_f(1+q^2)^2}, \quad \xi = \frac{1}{\tau} - \frac{1+3q_f^2}{2q_f} + \frac{(1+q_f^2)^2(1+3q^2)}{2q_f(1+q^2)^2}, \quad 1 < q_f \leq q \leq \infty \tag{2.11}$$

$$\frac{C_\Omega}{\tau} = \frac{45q_f^4 + 6q_f^2 + 1}{2^3 \cdot 15q_f^3}, \quad C_d = \frac{15q_f^2 - 1}{20q_f^2(1+q_f^2)}$$

Отсюда, в частности, для заданного $\tau < 1/2$ можно найти то максимальное значение $q_f^m > 1$, а по нему – максимальное $C_\Omega^m/\tau > 13/30$, для которых остроконечные оптимальные головные части без заднего торца, определяемые этими формулами, име-

ют длину L (кривая 2 на фиг. 2). Именно, записав второе уравнение (2.11) в точке i , где $\xi_i = 0$, а $q_i = \infty$, получим квадратное уравнение, решив которое, найдем

$$q_f^m = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tau} + \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 3} \right) \quad (2.12)$$

Если заостренная головная часть, описываемая формулами (2.11), тонкая, т.е. $\tau \ll 1$, а $q_f \gg 1$, то с использованием этих неравенств можно показать, что (с учетом отличий в масштабировании продольной координаты) формулы (2.11) сводятся к (1.12).

Решения (2.11), дающие головные части, длина которых не превышает заданную максимально допустимую длину L , не зависят от этой величины. Поэтому для них справедливо все, доказанное ранее [2, 5] для головных частей, оптимальных при фиксированном объеме и радиусе основания. Согласно этим результатам [2, 5] их образующие вогнутые. С другой стороны, образующая ньютоновской головной части (кривая 1 на фиг. 2) выпуклая [2–5]. Поэтому при фиксированном τ объем C_{Ω_0} затупленной головной части (см. формулу для C_{Ω_0} в (2.7)) заведомо превышает объем C_{Ω}^m остроконечной вогнутой головной части, определяемый предпоследним равенством (2.11), который отвечает тому же значению τ и определенному по нему формулой (2.12) значению q_f^m . При $C_{\Omega} > C_{\Omega}^m$ контуры оптимальных головных частей имеют передний торец и заканчиваются в точке f с конечным наклоном касательной (типа кривых 4 и 5 на фиг. 2). Форму их УДЭ определяет уравнение (2.3) с постоянной $C \neq 0$. Как и выше, оно интегрируется введением параметра q , причем $1 = q_{i+} \leq q \leq \infty$. Решив для этого случая квадратное относительно $\eta = \eta(q)$ уравнение (2.3), найдем

$$\eta^{\pm}(q) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{q}{(1+q^2)^2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{(1+q^2)^4} + \lambda C} \right] \quad (2.13)$$

$$\lambda = \left[\frac{2q_f}{(1+q_f^2)^2} - \frac{\eta_i}{2} \right] \frac{1}{1-\eta_i^2}, \quad C = \left[\frac{2q_f \eta_i}{(1+q_f^2)^2} - \frac{1}{2} \right] \frac{\eta_i}{1-\eta_i^2}$$

Ньютоновская оптимальная головная часть отвечает $\lambda = 0$. При $\lambda \rightarrow 0$ конечные η получаются, если в первом равенстве (2.13) взять знак минус. Поэтому для любых τ выпуклые оптимальные контуры, включая близкие к ньютоновским, получаются при $\eta = \eta^-(q)$. Для них

$$\eta = \eta^-(q), \quad \xi = q\eta - \eta_i - \int_1^q \eta^-(q) dq, \quad 1 \leq q \leq q_f; \quad \frac{1}{\tau} = q_f - \eta_i - \int_1^{q_f} \eta^-(q) dq \quad (2.14)$$

$$\frac{C_{\Omega}}{\tau} = \frac{q_f - \eta_i^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^{q_f} [\eta^-(q)]^3 dq, \quad C_d = \frac{1}{2} \eta_i^2 + \frac{1}{1+q_f^2} + 2 \int_1^{q_f} \frac{[\eta^-(q)]^2 q dq}{(1+q^2)^2}$$

Так как равенству $C_{\Omega}^m = C_{\Omega_0}$ отвечает заостренная вогнутая образующая if , то с уменьшением $C_{\Omega} < C_{\Omega_0}$ оптимальные образующие должны стать выпукло-вогнутыми с выпуклым начальным и вогнутым конечным участком. Можно показать, что в разделяющей их точке перегиба обращается в нуль подкоренное выражение в фор-

муле (2.13), а q принимает максимальное для данного контура значение q^m . Итак, в точке перегиба

$$\varphi(q^m) \equiv \frac{q^{m2}}{(1 + q^{m2})^4} = -\lambda C \tag{2.15}$$

причем $1 < q_f \leq q^m$, а $\varphi(q^m)$ – монотонно убывающая при $q^m > 1$ функция, равная нулю при $q^m = \infty$. В соответствии с этим q^m как функции λC определяется быстро сходящейся итерацией (k – номер итерации)

$$z_{k+1}^3 = z_k^3 \left[1 - \frac{1}{(1 + z_k)^4} \right] - \lambda C, \quad q^m = \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad z_0 = 1 \tag{2.16}$$

При $q_f = q^m$ точка перегиба совпадает с концевой точкой f . Для ньютоновского решения $\lambda = 0$, и определяемое формулой (2.15) или итерациями (2.16) значение q^m равно бесконечности, и равенство $q_{f0} = q^m$, естественно, не имеет места. В согласии с этим решением (2.14) справедливо в пределах от $q_f = q_{f0}$ до первого выполнения равенства $q^m = q_f$. Затем все интегралы по q разбиваются на два: от 1 до q^m и от q^m до q_f (или до q), с $\eta = \eta^-(q)$ в первом из них и с $\eta = \eta^+(q)$ – во втором:

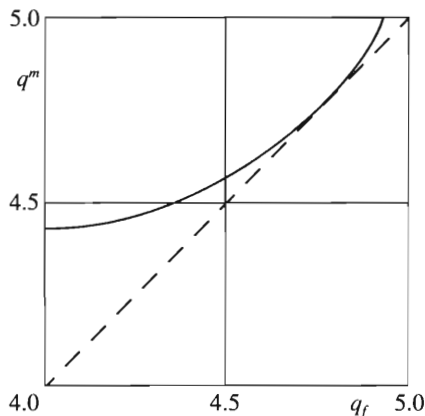
$$\eta = \eta^-(q), \quad \xi = q\eta^-(q) - \eta_f - \int_1^q \eta^-(q) dq, \quad 1 \leq q \leq q^m$$

$$\eta = \eta^+(q), \quad \xi = q\eta^+(q) - \eta_f - \int_1^{q^m} \eta^-(q) dq + \int_q^{q^m} \eta^+(q) dq, \quad q^m \geq q \geq q_f \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{\tau} = q_f - \eta_f - \int_1^{q^m} \eta^-(q) dq + \int_{q_f}^{q^m} \eta^+(q) dq, \quad \frac{C_\Omega}{\tau} = \frac{q_f - \eta_f^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^{q^m} [\eta^-(q)]^3 dq +$$

$$+ \frac{1}{3} \int_{q_f}^{q^m} [\eta^+(q)]^3 dq, \quad C_d = \frac{\eta_f^2}{2} + \frac{1}{1 + q_f^2} + 2 \int_1^{q^m} \frac{[\eta^-(q)]^2}{(1 + q^2)^2} q dq - 2 \int_{q_f}^{q^m} \frac{[\eta^+(q)]^2}{(1 + q^2)^2} q dq$$

Переход от выпуклых оптимальных контуров к выпукло-вогнутым поясняет фиг. 3. Сплошная кривая, изображенная на ней, дает зависимость $q^m = q^m(q_f)$ для $\tau = 1/4$. При таком τ , согласно последней формуле (2.7), $q_f \equiv q_{f0} \approx 5.48$. Как отмечалось выше, $q^m(q_{f0}) = \infty$. Оптимальные УДЭ для $4.75 \leq q_f \leq q_{f0}$ выпуклые. При их построении сначала из третьего равенства (2.14) определяется $\eta_f = \eta_f(q_f)$, затем из формул (2.13) находятся $\lambda = \lambda(q_f)$ и $C = C(q_f)$, и, наконец, из равенств (2.15) и (2.16) $q^m = q^m(q_f)$. Точке касания рассчитанной кривой со штриховой прямой $q^m = q_f$ отвечает оптимальный контур, в концевой точке которого его кривизна обращается в нуль. Меньшим q_f отвечают выпукло-вогнутые оптимальные образующие. Их расчет начинается с определения $q^m(q_f)$, $\lambda(q_f)$ и $C(q_f)$ из совместного решения уравнения (2.15) и пятого уравнения (2.17) с $\eta^\pm(q)$, λ и C из формул (2.13). Согласно фиг. 3 слева от точки касания вновь $q^m(q_f) > q_f$. Теперь, однако, в отличие от правой ветви это – естественное следствие наличия замыкающего оптимальную образующую вогнутого участка.



Фиг. 3

При $q_f \rightarrow q_f^m$, где для $\tau = 1/4$, согласно равенству (2.12), $q_f^m \approx 2.535$, оптимальный контур с передним торцом вне малой окрестности торца стремится к остроконечно-му контуру той же длины. При этом $\eta_t \rightarrow 0$, $q^m \rightarrow \infty$, но значение q_{t+} остается постоянным (равным единице).

Для коротких головных частей ($\tau > 1/2$) часть оптимальных контуров имеют два торца (передний и задний), а соединяющий их УДЭ состоит из выпуклого (переднего) и вогнутого (заднего) отрезков. В точке b стыковки экстремали с задним торцом $\eta_b < 1$, $q_{b-} = 1$. При построении таких контуров в соответствующем неравенстве (2.17) следует заменить q_f на единицу, а формулы (2.13) для λ и C и три последних равенства (2.17) – на

$$\lambda = \frac{1}{2(\eta_b + \eta_t)}, \quad C = \frac{-\eta_b \eta_t}{2(\eta_b + \eta_t)}, \quad \frac{1}{\tau} = \eta_b - \eta_t + \int_1^{q^m} [\eta^+(q) - \eta^-(q)] dq \tag{2.18}$$

$$\frac{C_\Omega}{\tau} = \frac{\eta_b^3 - \eta_t^3}{3} + \int_1^{q^m} \frac{[\eta^+(q)]^3 - [\eta^-(q)]^3}{3} dq, \quad C_d = 1 + \frac{\eta_t^2 - \eta_b^2}{2} + 2 \int_1^{q^m} \frac{[\eta^-(q)]^2 - [\eta^+(q)]^2}{(1 + q^2)^2} q dq$$

При любом τ и C_Ω из конечного диапазона значений ($C_{\Omega\infty} \geq C_\Omega > C_{\Omega 0}$, где $C_{\Omega\infty}$ определен ниже, а $C_{\Omega 0}$ при том же τ отвечает ньютоновской головной части) оптимальные образующие, как и ньютоновский контур, имеют передний торец и заканчивающийся в точке f выпуклый УДЭ (кривые типа 5 на фиг. 2). Для этих образующих справедливы формулы (2.14), причем $q_{f0} < q_f \leq \infty$. Коэффициент $C_{\Omega\infty}$ соответствует оптимальной образующей с горизонтальной касательной в точке f , т.е. с $q_f = \infty$. Для нее в силу последних двух формул (2.13)

$$2\lambda = 2C = -\eta_t(1 - \eta_t^2)^{-1} < 0 \tag{2.19}$$

При $1 \geq C_\Omega > C_{\Omega\infty}$ у оптимального контура (кривая 6 на фиг. 2) кроме переднего торца it и УДЭ td появляется цилиндрический участок краевого экстремума df . В этом случае знак $\Delta \xi_d$ произволен, и одно из условий оптимальности – обращение в нуль коэффициента X_{d-} из равенства (2.2). Последнее имеет место при $\xi_{d-}' = 0$ и

$\xi'_{d-} = \infty$, но $\xi'_{d-} = 0$ не удовлетворяет условию (2.4). Поэтому $\xi'_{d-} = \infty$, и УДЭ td стыкуется с цилиндрическим участком без излома. При учете этого параметрическую запись УДЭ с горизонтальной касательной в точке f представим в виде

$$\eta = \frac{q}{\lambda(1+q^2)^2} + \chi(q, \lambda), \quad \chi(u, \lambda) = \sqrt{\frac{u^2}{\lambda^2(q+u^2)^4} + 1} \tag{2.20}$$

$$\xi = 1 - \chi(1, \lambda) + \frac{q^2(1-q^2)}{2\lambda(1+q^2)^2} - q + q\chi(q, \lambda) - \int_1^q [\chi(u, \lambda) - 1] du, \quad 1 \leq q \leq \infty$$

Записав второе выражение (2.20) в точке f , получим

$$\frac{1}{\tau} = 1 - \chi(1, \lambda) - \frac{1}{2\lambda} - \int_1^\infty [\chi(u, \lambda) - 1] du \tag{2.21}$$

При заданном τ из уравнения (2.21) находится λ , а по λ из равенства (2.19) – размер торца η_t . Затем C_Ω и C_d в согласии с формулами (2.1) и с $\eta = \eta(q, \lambda)$ из первого равенства (2.20) вычисляются по формулам

$$\frac{C_{\Omega\infty}}{\tau} = \frac{1 - \eta_t^3}{3} + \frac{1}{3} \int_1^\infty (1 - \eta^3) dq, \quad C_{d\infty} = \frac{1 + \eta_t^2}{2} + 2 \int_1^\infty \frac{\eta^2 - 1}{(1 + q^2)^2} q dq \tag{2.22}$$

Если при фиксированном τ заданный объем Ω таков, что $C_{\Omega\infty} < C_\Omega < 1$, то оптимален контур (кривая b на фиг. 2) с передним торцом it и концевым цилиндрическим участком df , плавно стыкующимся с УДЭ td . УДЭ всех таких головных частей строятся по формулам (2.19)–(2.21) с заменой заданного значения τ на величину τ° , меняющуюся в диапазоне $\tau < \tau^\circ \leq \infty$. Для определения коэффициентов сопротивления C_d этих головных частей после замены τ на τ° , λ на λ° , η на η° и η_t справедлива формула (2.22). Изменяется лишь формула для C_Ω , которую при учете объема цилиндрической части запишем в виде

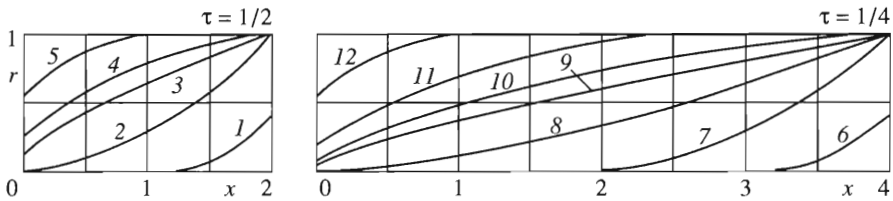
$$C_\Omega = C_{\Omega\infty}^\circ + \frac{\tau^\circ - \tau}{\tau^\circ}, \quad \frac{C_{\Omega\infty}^\circ}{\tau} = \frac{1 - \eta_t^{\circ 3}}{3} + \frac{1}{3} \int_1^\infty (1 - \eta^{\circ 3}) dq, \quad \tau < \tau^\circ < \infty$$

Градусом отмечены величины и функции, определенные по приведенным выше формулам для $\tau^\circ > \tau$, причем $\tau^\circ = \tau$ дает затупленный цилиндр, у которого $C_d = C_\Omega = 1$.

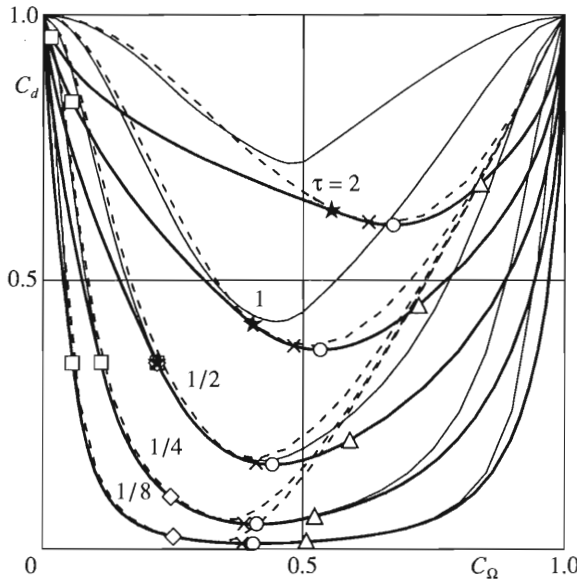
3. Результаты расчета. Некоторые результаты расчетов, выполненных в согласии с полученными решениями, представлены на фиг. 4 и 5. На фиг. 4 при $\tau = 1/2$ и $\tau = 1/4$ изображены контуры, оптимальные для разных C_Ω при следующем соответствии номеров контуров (цифры около кривых), значений C_Ω и коэффициентов сопротивления C_d :

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_Ω	0.014	0.22	0.44	0.59	0.86	0.007	0.11	0.24	0.41	0.52	0.72	0.93
C_d	0.90	0.35	0.16	0.21	0.46	0.90	0.35	0.10	0.049	0.063	0.15	0.46

Контур 1 для $\tau = 1/4$ дает короткую (с удлинением, меньшим максимально допустимого значения $1/\tau = 2$) остроконечную головную часть с задним торцом, контур 2 –



Фиг. 4



Фиг. 5

единственную для $\tau = 1/2$ остроконечную конфигурацию максимально допустимой длины с $q_f = 1$, а 3 – ньютоновскую головную часть с передним торцом. Кривая 4 – образующая головной части с передним торцом и УДЭ максимальной длины с горизонтальной касательной в конечной точке ($q_f = \infty$ при $\xi = 1/\tau = 2$). Наконец, головная часть 5 имеет два участка краевого экстремума – большой передний торец и достаточно длинную цилиндрическую образующую $r \equiv R$.

Для $\tau = 1/4$ первые два контура 6 и 7 по форме и коэффициентам сопротивления идентичны контурам 1 и 2. Отличный от цилиндрического начальный участок контура 7 совпадает с контуром 5 для $\tau = 1/2$, следствие чего – равенство их коэффициентов сопротивления. Условие тонкого тела ($x^2 \gg 1$) выполняется на всей заостренной образующей 8. На ньютоновском контуре 9, на контуре 10 с УДЭ максимальной длины и $q_f = \infty$ и на образующей 11 с горизонтальным участком оно нарушается лишь в малой (особенно по r^2) окрестности оси симметрии. Сопротивление этих тел близко к сопротивлению головных частей, построенных в приближении тонкого тела.

На фиг. 5 жирные сплошные кривые дают зависимости коэффициентов волнового сопротивления оптимальных головных частей, построенных согласно результатам раздела 2 для $\tau = 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2$, т.е. и для больших, и для малых удлинений (от 8 до 1/2). При выбранных τ кривые $C_d = C_d(\tau, C_\Omega)$ рассчитаны для всех возможных

$0 \leq C_\Omega \leq 1$. Крайние значения отвечают головным частям с передним ($C_\Omega = 1$) и с задним ($C_\Omega = 0$) торцом и одинаковыми $C_d = 1$ при любых τ .

Метки на жирных кривых – точки, соответствующие перечисленным выше характерным решениям. Кружки отвечают ньютоновским головным частям, которые при фиксированных τ реализуют (как и должно быть) минимальное сопротивление. Между кружками и треугольниками оптимальные (для $C_{\Omega 0} < C_\Omega < C_{\Omega \infty}$) образующие имеют передний торец и выпуклый УДЭ. Треугольники дают предельно толстые головные части этого типа с горизонтальной касательной в концевой точке ($q_f = \infty$, $C_\Omega = C_{\Omega \infty}$). Справа от треугольников оптимальные контуры состоят из переднего торца, выпуклого УДЭ и концевого цилиндра $r \equiv R$.

Между кружками и крестиками оптимальные образующие (для $C_\Omega < C_{\Omega 0}$) состоят из выпуклых УДЭ и переднего торца. При $\tau < 1/2$ крестики отвечают контурам с равной нулю второй производной в точке f . При фиксированных значениях τ слева от крестиков до ромбиков оптимальные контуры состоят из переднего торца и УДЭ с точкой перегиба, а от ромбиков до квадратиков оптимальны вогнутые остроконечные контуры без заднего торца ($q_i = \infty$, $\xi_i \geq 0$). Ромбики отвечают, тем из них, которые имеют полную длину, а квадратики – вогнутым остроконечным контурам с $q_f = 1$. При $\tau > 1/2$ от наклонных крестиков до звездочек оптимальные контуры состоят из переднего торца и УДЭ с точкой перегиба, а между звездочками и квадратами – из переднего и заднего торцов и УДЭ с точкой перегиба. Звездочки отвечают тем из них, у которых $q_f = 1$. При $\tau = 1/2$ ромбик, квадратик и звездочка совпадают ($C_\Omega = 13/60 \approx 0.22$). Отрезки жирных кривых слева от квадратиков отвечают укороченным головным частям ($\xi_i > 0$) с вогнутым заостренным УДЭ и задним торцом.

При $\tau = 1/8, 1/4, 1/2, 1$ для головных частей, оптимальных в приближении тонкого тела, тонкими кривыми даны зависимости $C_d = C_d(\tau, C_\Omega)$, определенные по соотношениям (1.16)–(1.19), т.е. по полной формуле Ньютона. Естественно, что для всех τ тонкие кривые лежат выше жирных, однако при $\tau \leq 1/2$ в некотором, расширяющемся с уменьшением τ диапазоне C_Ω тонкие кривые близки к жирным. Как уже отмечалось, для торцов ($C_\Omega = 0$ и $C_\Omega = 1$) и близких к ним конфигураций приближение тонкого тела неприменимо, а расчет C_d в таком приближении дает неограниченный рост коэффициента волнового сопротивления. Соотношения (1.16)–(1.19) устраняют неограниченный рост C_d . Более того, при $C_\Omega = 0$ и $C_\Omega = 1$ правильные оптимальные конфигурации определяются только габаритными ограничениями, независимо от используемых формул для давления. Поэтому и тонкие, и жирные кривые начинаются и заканчиваются в одних и тех же точках. Тем не менее при отходе от них тонкие кривые дают заметно большие значения C_d , чем жирные. С уменьшением τ размер таких окрестностей сокращается. Напомним, что уравнения и условия, полученные Миеле [1], позволяют строить оптимальные (в приближении тонкого тела) головные части лишь при $1/4 \leq C_\Omega \leq 1/2$.

Штриховые кривые на фиг. 5 дают зависимости $C_d = C_d(\tau, C_\Omega)$ для острых ($0 < C_\Omega \leq 1/3$) и для затупленных ($1/3 < C_\Omega \leq 1$) конусов (с передним торцом $x = 0$). С ростом C_Ω от нуля до единицы угол полураствора конусов монотонно уменьшается от $\pi/2$ до нуля. Коэффициенты C_Ω и C_d конусов определяются формулами (как и для оптимальных тел, η_i – отнесенный к R размер переднего торца)

$$C_\Omega = \frac{1 + \eta_i + \eta_i^2}{3} l, \quad C_d = \eta_i^2 + \frac{\tau^2 (1 + \eta_i)(1 - \eta_i)^3}{l^2 + \tau^2 (1 - \eta_i)^2}, \quad 0 \leq \eta_i \leq 1, \quad 0 \leq l \leq 1$$

Характеристики острых конусов даются этими формулами при $\eta_i = 0$ и $0 < l \leq 1$, а затупленных – при $l = 1$ и $0 < \eta_i \leq 1$.

Если $C_\Omega > 0.4$, то согласно фиг. 5 при $\tau \leq 1/2$ сопротивление затупленных конусов (штриховые линии) заметно превышает сопротивление головных частей, оптимальных в приближении тонкого тела (тонкие кривые). При $\tau \geq 1$ ситуация меняется на

№	τ	C_Ω	η_{con}	η_{opt}	ξ_{dopt}	η_{bopt}	$C_{\text{dopt}N}$	$C_{\text{dopt}E}$	$\frac{C_{\text{dopt}N}}{C_{\text{dcon}N}}$	$\frac{C_{\text{dopt}E}}{C_{\text{dcon}E}}$
1	1/8	0.70	0.66	0.03	5/8	1	0.043	0.045	0.100	0.122
2	1/4	0.72	0.69	0.17	3/5	1	0.146	0.134	0.300	0.327
3	1/2	0.73	0.70	0.38	5/8	1	0.304	0.250	0.607	0.583
4	1	0.74	0.71	0.57	1	1	0.474	0.371	0.872	0.815
5	2	0.84	0.83	0.76	1	1	0.684	0.528	0.949	0.894
6	1/2	0.22	0	0	1	1	0.350	0.449	0.943	1.120
6'	1/2	0.22	0	0	1	1	0.350	0.453	0.943	1.195
7	1	0.22	0	0.07	1	0.82	0.594	0.899	0.857	1.234
8	2	0.28	0	0.29	1	0.75	0.742	0.731	0.878	0.943

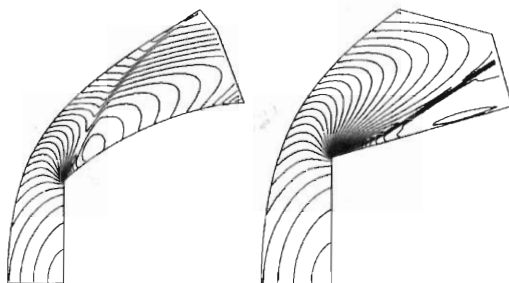
противоположную, что естественно, так как при таких τ приближение тонкого тела неприменимо во всем диапазоне изменения C_Ω .

4. Сопротивления построенных головных частей, найденные интегрированием уравнений Эйлера. В свете полученных ранее результатов [6] естественно ожидать, что для $C_{\Omega 0} \leq C_\Omega \leq 1$ в рамках уравнений Эйлера будут оптимальны аналогичные контуры, т.е. выпуклые с передним торцом и цилиндрическим участком или без него. В то же время представляется интересным построение в рамках уравнений Эйлера, Навье – Стокса и Рейнольдса оптимальных головных частей для меньших коэффициентов объема, для которых в приближении полной формулы Ньютона оптимальны контуры с точкой перегиба и с передним торцом и заостренные без переднего и заднего торцов и с задним торцом. У этих контуров вогнута вся или значительная часть образующей, оптимальной в рамках формулы Ньютона. При обтекании вогнутых образующих (особенно с задним торцом) даже идеальным (невязким и нетеплопроводным) газом весьма вероятно возникновение отрывов. При этом по схеме, близкой к ньютоновской, будет обтекаться не исходная “твердая” образующая, а мало похожий на него “эффективный” контур, что принципиально изменит результаты, получающиеся в рамках модели безотрывного обтекания.

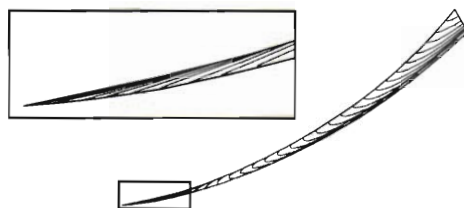
Для выяснения степени применимости формулы Ньютона к рассмотренным задачам сравним коэффициенты сопротивления, получающиеся по этой формуле, с коэффициентами, найденными интегрированием уравнений Эйлера по программе, применявшейся ранее [6].

Сравнивались контуры разных типов: длинные ($\tau = 1/8, 1/4, 1/2$) и короткие ($\tau = 1, 2$) выпуклые (в том числе, с горизонтальным концевым участком), короткие ($\tau = 1, 2$) с задним торцом и длинное ($\tau = 1/4$) вогнутое остроконечное тело. Результаты расчетов собраны в таблице. В ней наряду с коэффициентом C_d и геометрическими характеристиками: τ , C_Ω , верхними ординатами переднего торца (η_f), нижними – заднего (η_b) и левыми абсциссами цилиндрического участка ($\xi_d \leq 1$) оптимальных головных частей (индекс opt) приведены аналогичные величины, рассчитанные для остроконечных ($\eta_f = 0$) и затупленных ($\eta_f > 1$) конусов (индекс con) с теми же значениями C_Ω и максимально допустимыми τ (заостренные конусы с теми же C_Ω имели меньшие значения τ). Коэффициенты волнового сопротивления, определенные по формуле Ньютона и интегрированием уравнений Эйлера, отмечены индексами N и E .

Первые пять строк таблицы отвечают таким значениям τ и C_Ω , при которых оптимальные ньютоновские головные части имеют выпуклую образующую, передний торец и включают (№ 1–3) или не включают (№ 4 и 5) концевой цилиндрический участок. В приближении уравнений Эйлера расчет обтекания ньютоновских головных частей № 1–8 и эквивалентных им по величине коэффициента C_Ω и максималь-



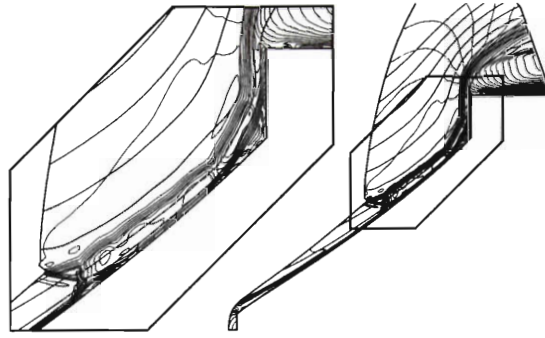
Фиг. 6



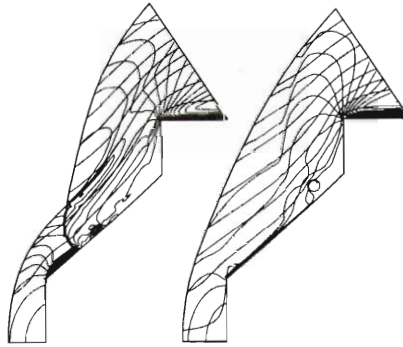
Фиг. 7

но допустимым значениям τ затупленных конусов проводился для совершенного газа с показателем адиабаты $\kappa = 1.4$ при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 5$. На фиг. 6 представлены типичные картины обтекания выпуклой ньютоновской (слева) и “конической” (справа) головных частей. Изомахи нарисованы через $\Delta M = 0.1$. При обтекании затупленного конуса за изломом образуется замкнутый локальный отрыв и интенсивный косой скачок. Собранные в верхних пяти строках таблицы коэффициенты сопротивления, найденные разными способами, подтверждают эффективность формулы Ньютона при построении выпуклых оптимальных головных частей.

В противоположность обтеканию выпуклых головных частей даже безотрывное обтекание идеальным газом вогнутых оптимальных ньютоновских головных частей (№ 6 таблицы и фиг. 7, $\Delta M = 0.1$, верхняя изомаха отвечает $M = 1.7$) и эквивалентных им конусов таково, что $C_{d\text{con}E} < C_{d\text{opt}E}$. Обнаруженную ситуацию не изменяет переход к $M_\infty = 10$ и $\kappa = 1.1$. Результаты, отвечающие этим M_∞ и κ , собраны в строке № 6'. Еще хуже положение для сравнительно длинного тела с задним торцом (№ 7), которое обтекается идеальным газом с образованием сложной системы ударных волн (фиг. 8). Важный элемент этой системы – отошедшая от заднего торца ударная волна, которая взаимодействует с косым (в тройной точке) головным скачком, возникающим при обтекании слегка затупленного штыря. По направлению к телу из тройной точки идет косой скачок слабого семейства. Направленный к телу сверхзвуковой поток за этим скачком после поворота в отраженном скачке, как и в одной из исследованных ранее [7] конфигураций (см. также [8–12]), формирует низкоэнтропийную пристенную струю с повышенным давлением торможения. В результате – высокое давление на заднем торце и большое значение коэффициента $C_{d\text{opt}E}$. Отличие от течений, которые исследовались ранее [7–12], в данном случае состоит в присутствии у стенки тонкой высокоэнтропийной струйки, прошедшей через близкий к прямому скачок перед передним торцом. Наличие этой струйки вызывает отрывы потока в окрестностях точек падения на нее косого скачка и стыковки участка двустороннего экстремума и заднего торца. Заполнение и опорожнение указанных от-



Фиг. 8



Фиг. 9

рывных зон высокоэнтропийным газом – один из механизмов нестационарных колебаний, возникающих при обтекании таких тел. Фигура 8 – один из “моментальных снимков” данного течения, а C_{doptE} в таблице – значение, осредненное по времени.

С увеличением τ оптимальная ньютоновская головная часть с двумя торцами (№ 8) и в рамках уравнений Эйлера оказывается несколько лучше эквивалентного конуса. Однако ее отрывное обтекание, как и для тела № 7, нестационарно. Сказанное иллюстрирует фиг. 9, на которой представлены две мгновенные картины изомах и траекторий частиц (линий, касательных вектору скорости).

Динамика нестационарного процесса зависит от числа ячеек N разностной сетки. В данном примере стационарное обтекание получалось только на самой грубой сетке ($N = 2^6$), т.е. при большой схемной вязкости. На сетках с $N = 2^8, 2^{10}, 2^{12}, 2^{14}$ наблюдались интенсивные колебания. Для перечисленных сеток осредненные по времени значения $C_{doptE} = 0.757, 0.704, 0.704, 0.729, 0.731$.

5. Заключение. Представляющие самостоятельный интерес расчеты обтекания идеальным газом оптимальных в рамках формулы Ньютона головных частей с $0 \leq C_{\Omega} < C_{\Omega 0}$ делают актуальным анализ постановки исходной вариационной задачи. На практике задание объема головной части Ω (или, что то же, коэффициента C_{Ω}) обусловлено либо необходимостью размещения в ней некоторых предметов (“полезного груза”, “приборов” и т.п.) фиксированного суммарного объема Ω_f , либо – заданием массы m_f того же полезного груза. Очевидно, что для размещения груза заданного объема Ω_f объем Ω должен удовлетворять неравенству $\Omega \geq \Omega_f$. При $\Omega_f \leq \Omega_0$, где Ω_0 отвечает решению задачи Ньютона со свободным объемом, именно оно и бу-

дет давать решение поставленной задачи. Если задание m_f определяет дальность или конечную скорость полета летательного аппарата, то масса головной части m удовлетворяет неравенству $m \leq km_f c$ с заданной превышающей единицу постоянной k . Последнее, вроде бы, налагает на объем головной части ограничение сверху $\Omega \leq \Omega_f = km_f / \rho$ с некоторой эффективной плотностью полезного груза ρ . При $\Omega_f \leq \Omega_0$ это, однако, не так, ибо в таком случае головную часть с $\Omega = \Omega_0$ можно сделать частично пустой, и решение вновь сведется к решению задачи Ньютона со свободным объемом. В результате, как видно из фиг. 5, при $\Omega_f \leq \Omega_0$ можно получить значительное (при $\tau \geq 1$ многократное) уменьшение сопротивления.

Авторы признательны Н.И. Тилляевой, которая обнаружила неполноту решения [1] при попытке его использования для тестирования генетического алгоритма оптимизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00422 и 05-01-00846) и в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-2124.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Миеле А. Тонкие тела минимального волнового сопротивления // Теория оптимальных аэродинамических форм/Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 203–215.
2. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: ЯНУС-К, 2001. 132 с.
3. Newton I. *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (*Philosophiae naturalis principia mathematica*). Пер. с латин. Э. Мотта. 1793; пересмотренное издание Ф. Кэджори (Cajori F.). Berkeley, California: Univ. California Press, 1947. 680 p. = *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Пер. с латин. и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука, 1989. 688 с.
4. Крайко А.Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 484–495 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Ред.-сост. А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 381–393.
5. Крайко А.Н. Головная часть заданного объема, оптимальная по волновому сопротивлению в приближении закона сопротивления Ньютона // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 382–388 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Ред.-сост. А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 394–402.
6. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
7. Edney B.E. Anomalous heat transfer and pressure distribution on blunt bodies at hypersonic speeds in the presence of an impinging shock. Stockholm: The Aeronaut. Res. Institute of Sweden, 1968. FFA Rep. 115. 92 p.
8. Tannehill J.C., Holst T.L., Rakich J.V. Numerical computation of two-dimensional viscous blunt body flows with an impinging shock // AIAA Journal. 1976. V. 14. № 2. P. 204–211.
9. Tannehill J.C., Holst T.L., Rakich J.V., Keyes J.W. Comparison of two-dimensional shock impingement computation with experiment // AIAA Journal. 1976. V. 14. № 4. P. 539–541.
10. Tannehill J.C., Vigneron Y.C., Rakich J.V. Numerical solution of two-dimensional turbulent blunt body flows with an impinging shock // AIAA Journal. 1979. V. 17. № 12. P. 1289–1290.
11. Тилляева Н.И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Учен. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-сост. А.Н. Крайко и др. М.: Физматлит, 2001. С. 201–210.
12. Ганжело А.Н., Крайко А.Н., Макаров В.Е., Тилляева Н.И. О повышении точности решения газодинамических задач // Современные проблемы аэромеханики. Сб. статей. М.: Машиностроение, 1987. С. 87–102.