ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **Том 69. Вып. 4, 2005**

УДК 539.3

© 2005 г. **В. Е. Вялков, В. А. Иванов, В.Н. Паймушин**

ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ И КРИТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ ТРЕХСЛОЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Рассматриваются задачи о формах потери устойчивости (ФПУ) трехслойной сферической оболочки, которая состоит из тонких внешних слоев, трансверсально-мягкого заполнителя произвольной толщины и находится в условиях равномерного внешнего давления. Для их постановки используются двумерные уравнения теории среднего изгиба тонких оболочек Кирхгофа – Лява, составленные для внешних слоев с учетом их взаимодействия с заполнителем, а для заполнителя – геометрически нелинейные уравнения теории упругости, отвечающие введению предположения о малости деформаций удлинений и конечности сдвиговых деформаций, которые позволяют корректно описать чисто сдвиговые ФПУ в заполнителе. Найдено точное аналитическое решение сформулированной задачи о начальном центрально-симметричном деформировании оболочки, линейно зависящее от внешнего давления. Показано, что линеаризованные в окрестности этого решения трехмерные уравнения для заполнителя допускают интегрирование по радиальной координате и сводятся к двум двумерным дифференциальным уравнениям в дополнение к шести уравнениям, которыми описывается нейтральное равновесие внешних слоев. Установлено, что составленная система восьми дифференциальных уравнений устойчивости для оболочки с изотропными слоями при введении новых неизвестных в виде скалярных и вихревых потенциалов распадается на две несвязанные системы уравнений. Первая из них имеет два вида решений, которыми описываются сдвиговые ФПУ при одинаковом значении критической нагрузки. Второй системой описывается смешанная изгибная ФПУ, реализация которой при определенных комбинациях определяющих параметров оболочки возможна при больших значениях внешнего давления по сравнению со сдвиговой ФПУ.

Было показано [1], что при действии равномерного внешнего давления в трехслойном кольце, кроме смешанной изгибной ФПУ [2], при определенных комбинациях некоторых определяющих параметров возможна реализация и чисто сдвиговой ФПУ. Начало этого процесса связано с поворотом одного несущего слоя относительно другого за счет только деформации поперечного сдвига, постоянной в окружном направлении. Более детальное изучение этой задачи, проведенное в геометрически нелинейной постановке, показало [3], что после прохождения сдвиговой точки ветвления, находящейся на начальном линейном участке решения об осесимметричном деформировании, при дальнейшем увеличении внешнего давления процесс деформирования кольца, оставаясь осесимметричным, сопровождается дальнейшим взаимным сближением внешних слоев за счет увеличивающейся деформации поперечного обжатия заполнителя с одновременным их взаимным поворотом. Окончательная потеря устойчивости кольца в силу отмеченной особенности напряженно-деформированного состояния на сдвиговой ветви решения, по-видимому, может произойти лишь по смешанной изгибно-сдвиговой ФПУ [4, 5].

Для анализа сдвиговых ФПУ трехслойных конструкций важными оказались результаты [6], согласно которым выведенные ранее уравнения устойчивости ([7, 8] и др.), использованные в [1–3], содержат лишь второстепенные параметрические слагаемые для описания и выявления сдвиговых ФПУ. Главная же причина реализации этих ФПУ при отсутствии докритических поперечных касательных напряжений в заполнителе состоит в появлении в нем докритических напряжений сжатия в поперечном направлении, а для корректного описания этих ФПУ в невозмущенном состоянии поперечные сдвиги в заполнителе необходимо считать конечными. Для этого достаточно сохранить в выражении для деформации поперечного обжатия заполнителя нелинейные слагаемые относительно тангенциальных компонент перемещений.

В связи с изложенным изучаемые в данной статье задачи о ФПУ трехслойной сферической оболочки при действии равномерного внешнего давления, в отличие от альтернативного подхода [3], основаны на использовании таких уточненных уравнений, которые по точности и содержательности полностью отвечают как отмеченным выше требованиям, так и требованиям, сформулированным ранее [5].

1. Геометрически нелинейные уравнения уточненной теории сферических оболочек с трансверсально-мягким заполнителем произвольной толщины. Будем рассматривать замкнутую трехслойную сферическую оболочку, состоящую из двух несущих слоев с толщинами $2t_{(k)}$ ($k = 1$ соответствует нижнему, $k = 2$ – верхнему слою) и трансверсально-мягкого заполнителя, имеющего толщину $2h$. Отнесем срединную поверхность заполнителя σ, имеющую радиус R, к географической системе координат, т.е. к углам широты $\theta(0 \le \theta \le 2\pi)$ и долготы $\varphi(-\pi \le \varphi \le \pi)$. Считая материалы несущих слоев и заполнителя ортотропными, причем оси ортотропии совпадают с направлениями координатных линий выбранной системы координат, через $E_1^{(k)}$, $E_2^{(k)}$, $G_{12}^{(k)}$, $\nu_1^{(k)}$, $\nu_2^{(k)}$ обозначим упругие характеристики (модули упругости и коэффициенты Пуассона) несущих слоев, а через E_3, G_{13}, G_{23} – модули упругости в направлении нормали к поверхности σ и модули поперечных сдвигов заполнителя.

Если пространство заполнителя отнести к триортогональной системе координат θ, φ, z, нормально связанной с поверхностью σ, и вместо поперечной координаты $z(-h \le z \le h)$ ввести в рассмотрение безмерную радиальную координату $\rho = 1 + z/R$, то параметры Ламе в произвольной точке заполнителя, отстоящей от σ на уровне z, будут иметь вид $H_1 = \rho R$, $H_2 = \rho R\sin\theta$. При этом для заполнителя можно записать следующие кинематические соотношения трехмерной теории упругости:

$$\begin{gathered}
2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{U}{\rho}\right) + \frac{\partial W}{\rho W\partial\theta}, \quad 2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{\partial W}{\rho R\sin\theta\partial\varphi} + \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{V}{\rho}\right) \\
\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{R\partial\rho} + \frac{1}{2R^2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)^2\right]
\end{gathered} \tag{1.1}$$

которые, удовлетворяя сформулированным ранее [6] требованиям в отношении возможности корректного описания чисто сдвиговых форм потери устойчивости, являются максимально упрощенными в отношении сохранения минимального числа геометрически нелинейных слагаемых. Составленным соотношениям (1.1) соответствуют трехмерные уравнения равновесия трансверсально-мягкого [9] заполнителя в проекциях на недеформированные оси

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sigma_{z\theta}^*) + \rho\sigma_{\theta z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sigma_{z\varphi}^*) + \rho\sigma_{\varphi z} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sigma_{zz}) + \frac{\rho}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\sigma_{\theta z}) + \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi}\right] = 0
\end{gathered} \tag{1.2}$$

в которых компоненты напряжений $\sigma_{z\theta}^*$, $\sigma_{z\varphi}^*$, $\sigma_{\theta z}$, σ_{zz}, отнесенные соответственно к недеформированным и деформированным осям, связаны зависимостями

$$\sigma_{z\theta}^* = \sigma_{\theta z} + \sigma_{zz}\frac{\partial U}{R\partial\rho}, \quad \sigma_{z\varphi}^* = \sigma_{\varphi z} + \sigma_{zz}\frac{\partial V}{R\partial\rho} \tag{1.3}$$

причем для напряжений $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$, $\sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi}$, σ_{zz} в пределах линейно-упругих деформаций в силу известных равенств [9] $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0$ имеют место соотношения закона Гука

$$\sigma_{z\theta} = 2G_{13}\varepsilon_{z\theta}, \quad \sigma_{z\varphi} = 2G_{23}\varepsilon_{z\varphi}, \quad \sigma_{zz} = E_3\varepsilon_{zz} \tag{1.4}$$

Равновесие внешних слоев при их среднем изгибе будем описывать уравнениями классической нелинейной теории оболочек Кирхгофа – Лява, которые при учете силового взаимодействия с заполнителем в проекциях на недеформированные оси представимы в виде

$$\begin{aligned}
f_\theta^{(k)} &= \frac{\partial T_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\,\theta(T_{\theta\theta}^{(k)} - T_{\varphi\varphi}^{(k)}) + \frac{\partial T_{\theta\varphi}^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} + \frac{S_\theta^{(k)}}{R\rho_{(k)}\sin\theta} + R\rho_{(k)}\delta_{(k)}\sigma_{z\theta}^* = 0 \\
f_\varphi^{(k)} &= \frac{\partial T_{\theta\varphi}^{(k)}}{\partial\theta} + 2\,\mathrm{ctg}\,\theta T_{\varphi\varphi}^{(k)} + \frac{\partial T_{\varphi\varphi}^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} + \frac{S_\varphi^{(k)}}{R\rho_{(k)}\sin\theta} + R\rho_{(k)}\delta_{(k)}\sigma_{z\varphi}^* = 0 \\
f_z^{(k)} &= T_{\theta\theta}^{(k)} + T_{\varphi\varphi}^{(k)} - \frac{\partial S_\theta^{(k)}}{R\rho_{(k)}\sin\theta\partial\theta} - \frac{\partial S_\varphi^{(k)}}{R\rho_{(k)}\sin^2\theta\partial\varphi} + R\rho_{(k)}\delta_{(k)}\sigma_{zz}^* + R\rho_{(k)}P_{(k)} = 0
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$k = 1, 2; \quad \delta_{(1)} = 1, \quad \delta_{(2)} = -1$$

Через $\sigma_{z\theta}^*$, $\sigma_{z\varphi}^*$, σ_{zz}^* обозначены действующие на внешние слои в точках поверхностей контакта поперечные касательные и нормальные напряжения в заполнителе, определяемые в проекциях на недеформированные оси и зависящие от θ, φ, $\rho_{(k)}$; $P_{(k)}$ – нормальные составляющие внешней поверхностной нагрузки.

К приведенным выше уравнениям равновесия необходимо присоединить кинематические условия сопряжения внешних слоев с заполнителем

$$\begin{aligned}
&w^{(k)} = W(\theta, \varphi, \rho_{(k)}), \quad u^{(k)} + t_{(k)}^0\delta_{(k)}\omega_\theta^{(k)} = U(\theta, \varphi, \rho_{(k)}) \\
&\upsilon^{(k)} + t_{(k)}^0\delta_{(k)}\omega_\varphi^{(k)} = V(\theta, \varphi, \rho_{(k)}); \quad k = 1, 2
\end{aligned} \tag{1.6}$$

в которых введены обозначения

$$t_{(k)}^0 = \frac{t_{(k)}}{R}, \quad \rho_{(k)} = 1 - \delta_{(k)}h_0, \quad h_0 = \frac{h}{R}$$

$$\omega_\theta^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{\partial\theta} - u^{(k)}, \quad \omega_\varphi^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} - \upsilon^{(k)}$$

При среднем изгибе оболочки входящие в соотношения (1.5) перерезывающие усилия в несущих слоях $S_\theta^{(k)}$, $S_\varphi^{(k)}$ через внутренние тангенциальные усилия $T_{\theta\theta}^{(k)}$,

$T_{\varphi\varphi}^{(k)}$, $T_{\theta\varphi}^{(k)}$ и моменты $M_{\theta\theta}^{(k)}$, $M_{\varphi\varphi}^{(k)}$, $M_{\theta\varphi}^{(k)}$ в квадратичном приближении связаны зависимостями

$$\begin{aligned} S_{\theta}^{(k)} &= \sin\theta\frac{\partial M_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial\theta} + \cos\theta(M_{\theta\theta}^{(k)} - M_{\varphi\varphi}^{(k)}) + \frac{\partial M_{\theta\varphi}^{(k)}}{\partial\varphi} + T_{\theta\theta}^{(k)}\omega_{\theta}^{(k)}\sin\theta \\ S_{\varphi}^{(k)} &= \sin\theta\frac{\partial M_{\theta\varphi}^{(k)}}{\partial\theta} + 2\cos\theta M_{\theta\varphi}^{(k)} + \frac{\partial M_{\varphi\varphi}^{(k)}}{\partial\varphi} + T_{\varphi\varphi}^{(k)}\omega_{\varphi}^{(k)}\sin\theta \end{aligned} \tag{1.7}$$

причем в пределах упругих деформаций имеют место соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta}^{(k)} &= B_1^{(k)}\left[\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\theta} + \frac{\omega_{\theta}^{(k)2}}{2} + \nu_1^{(k)}\left(w^{(k)} + \frac{\partial \upsilon^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta u^{(k)} + \frac{\omega_{\varphi}^{(k)2}}{2}\right)\right] \\ T_{\theta\varphi}^{(k)} &= B_{12}^{(k)}\left[\frac{\partial u^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} + \frac{\partial \upsilon^{(k)}}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\upsilon^{(k)} + \omega_{\theta}^{(k)}\omega_{\varphi}^{(k)}\right] \\ T_{\varphi\varphi}^{(k)} &= B_2^{(k)}\left[w^{(k)} + \frac{\partial \upsilon^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta u^{(k)} + \frac{\omega_{\varphi}^{(k)2}}{2} + \nu_2^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\theta} + \frac{\omega_{\theta}^{(k)2}}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} M_{\theta\theta}^{(k)} &= -D_1^{(k)}\left[\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial\theta^2} - \frac{\partial u^{(k)}}{\partial\theta} + \nu_1^{(k)}\left(\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\sin^2\theta\partial\varphi^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\theta} - \frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} - \operatorname{ctg}\theta u^{(k)}\right)\right] \\ M_{\theta\varphi}^{(k)} &= -D_{12}^{(k)}\left[2\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\sin\theta\partial\theta\partial\varphi} - 2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\varphi} - \frac{\partial u^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} - \frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\upsilon^{(k)}\right] \\ M_{\varphi\varphi}^{(k)} &= -D_2^{(k)}\left[\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\sin^2\theta\partial\varphi^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\theta} - \frac{\partial\upsilon^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} - \operatorname{ctg}\theta u^{(k)} + \nu_2^{(k)}\left(\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial\theta^2} - \frac{\partial u^{(k)}}{\partial\theta}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_j^{(k)} &= \frac{2E_j^{(k)}\overset{0}{t}_{(k)}}{\rho_{(k)}(1-\nu_1^{(k)}\nu_2^{(k)})}, \quad D_j^{(k)} = \frac{B_j^{(k)}\overset{0}{t}{}_{(k)}^{2}}{3R\rho_{(k)}}; \quad j = 1, 2 \\ B_{12}^{(k)} &= \frac{2\overset{0}{t}_{(k)}G_{12}^{(k)}}{\rho_{(k)}}, \quad D_{12}^{(k)} = \frac{B_{12}^{(k)}\overset{0}{t}{}_{(k)}^{2}}{3R\rho_{(k)}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

– жесткостные характеристики несущих слоев.

После введения безразмерных определяющих параметров $\gamma_j^{(k)} = B_{12}^{(k)}/B_j^{(k)}$ и дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} L_{11}^{(k)} &= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \nu_1^{(k)} - \frac{\nu_1^{(k)}}{\nu_2^{(k)}}\operatorname{ctg}^2\theta + \frac{\gamma_1^{(k)}\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2} \\ L_{12}^{(k)} &= \frac{\nu_2^{(k)}}{\nu_1^{(k)}}\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left[(\nu_2^{(k)} + \gamma_2^{(k)})\frac{\partial}{\partial\theta} - (1 + \gamma_2^{(k)})\operatorname{ctg}\theta\right] \\ L_{21}^{(k)} &= \frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left[(\nu_2^{(k)} + \gamma_2^{(k)})\frac{\partial}{\partial\theta} + (1 + \gamma_2^{(k)})\operatorname{ctg}\theta\right] \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$L_{22}^{(k)} = \gamma_2^{(k)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + 1 - \operatorname{ctg}^2\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

перерезывающие усилия (1.7) при использовании (1.9) будут выражаться через перемещения $u^{(k)}$, $\upsilon^{(k)}$, $w^{(k)}$ точек срединных поверхностей несущих слоев по формулам

$$S_\theta^{(k)} = D_1^{(k)}\sin\theta\left\{L_{11}^{(k)}(u^{(k)}) + L_{12}^{(k)}(\upsilon^{(k)}) - \left(L_{11}^{(k)} - \frac{\gamma_1^{(k)}}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\theta}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\left[(\nu_1^{(k)} + 2\gamma_1^{(k)})\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\right) - \frac{\nu_1^{(k)}}{\nu_2^{(k)}}\operatorname{ctg}\theta\right]w^{(k)}\right\} + T_{\theta\theta}^{(k)}\omega_\theta^{(k)}\sin\theta$$

$$S_\varphi^{(k)} = D_2^{(k)}\sin\theta\left\{L_{21}^{(k)}(u^{(k)}) + L_{22}^{(k)}(\upsilon^{(k)}) - \frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left[(\nu_2^{(k)} + 2\gamma_2^{(k)})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \right.\right. \quad (1.12)$$

$$\left.\left. + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\gamma_2^{(k)} + \frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\right]w^{(k)}\right\} + T_{\varphi\varphi}^{(k)}\omega_\varphi^{(k)}\sin\theta$$

2. Центрально-симметричное деформирование оболочки. Если внешнее давление p равномерно распределенное, то напряженно-деформированное состояние (НДС) исследуемой оболочки, линейно зависящее от внешней нагрузки p, при ее центрально-симметричном деформировании, когда

$$u^{0(k)} = \upsilon^{0(k)} = 0, \quad \sigma_{z\theta}^* = \sigma_{z\theta}^0 = 0, \quad \sigma_{z\varphi}^* = \sigma_{z\varphi}^0 = 0, \quad \sigma_{zz}^* = \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0$$

будет описываться уравнениями равновесия

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2\sigma_{zz}^0) = 0, \quad f_{zz}^{(k)} = T_{\theta\theta}^{0(k)} + T_{\varphi\varphi}^{0(k)} - \sigma_{zz}^0 R\rho_{(k)}\delta_{(k)} + P_{(k)} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем параметры этого НДС снабжаются дополнительными нулевыми верхними индексами.

Присоединяя к уравнениям (2.1) физические соотношения

$$T_{\theta\theta}^{0(k)} = B_1^{(k)}(1 + \nu_1^{(k)})w^{0(k)}, \quad T_{\varphi\varphi}^{0(k)} = B_2^{(k)}(1 + \nu_2^{(k)})w^{0(k)}, \quad \sigma_{zz}^0 = E_3\frac{dW^0}{Rd\rho} \quad (2.2)$$

последовательно находим интегралы

$$\sigma_{zz}^0 = \frac{q_0}{\rho^2}, \quad W^0 = w_0 - \frac{Rq_0}{\rho E_3} \quad (2.3)$$

где q_0, w_0 – постоянные, определяемые из условия контакта

$$w^{0(k)} = W^0(\rho_{(k)}), \quad k = 1, 2$$

Выполнение этих условий позволяет определить радиальное напряжение

$$\sigma_{zz}^0 = \frac{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}}{2R\rho^2 h_0}(w^{0(2)} - w^{0(1)}) \quad (2.4)$$

При использовании соотношений (2.2) и (2.4) из уравнений (2.1) следует система алгебраических уравнений, записанных относительно прогибов $w^{0(1)}$, $w^{0(2)}$,

$$(1+\chi_{(k)})w^{0(k)} - \chi_{(k)}w^{0(3-k)} = -\delta_{2k}\frac{p\rho_{(k)}}{\mu_1^{(k)}B_2^{(k)}}, \quad \delta_{21} = 0, \quad \delta_{22} = 1, \quad k = 1, 2 \tag{2.5}$$

где

$$\mu_1^{(k)} = 1 + 2\nu_2^{(k)} + \frac{\nu_2^{(k)}}{\nu_1^{(k)}}, \quad \chi_{(k)} = \frac{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}(1-\nu_1^{(k)}\nu_2^{(k)})}{4h_0t^0_{(k)}E_2^{(k)}\mu_1^{(k)}}$$

Из системы (2.5) определяются прогибы несущих слоев

$$w^{0(k)} = -\frac{pR\rho_{(2)}(k-1+\chi_{(1)})}{\mu_1^{(2)}B_2^{(2)}(1+\chi_{(1)}+\chi_{(2)})} \tag{2.6}$$

а из соотношений (2.2) находятся и усилия в этих слоях.

Из выражений (2.2), (2.6) следует, что усилия $T_{\theta\theta}^{0(k)}$ в общем случае отличаются от усилий $T_{\varphi\varphi}^{0(k)}$ для ортотропных материалов несущих слоев. Можно убедиться, что они равны между собой при выполнении условий $(1+\nu_1^{(k)})\nu_1^{(2)} = (1+\nu_2^{(k)})\nu_2^{(2)}$. В частном случае, когда материалы несущих слоев изотропны, т.е. $\nu_1^{(k)} = \nu_2^{(k)} = \nu^{(k)}$, $E_1^{(k)} = E_2^{(k)} = E^{(k)}$, имеем

$$T_{\theta\theta}^{0(1)} = T_{\varphi\varphi}^{0(1)} = -\frac{pR\rho_{(2)}\chi^*_{(1)}(1+\nu^{(1)})}{2(1+\chi^*_{(1)}+\chi^*_{(2)})(1+\nu^{(2)})}, \quad T_{\theta\theta}^{0(2)} = T_{\varphi\varphi}^{0(2)} = -\frac{pR\rho_{(2)}(1+\chi^*_{(1)})}{2(1+\chi^*_{(1)}+\chi^*_{(2)})} \tag{2.7}$$

где

$$\chi^*_{(k)} = \frac{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}(1-\nu^{(k)})}{8h_0t^0_{(k)}E_2^{(k)}}, \quad k = 1, 2$$

В случае отсутствия заполнителя ($E_3 = 0$, $\chi^*_{(1)} = \chi^*_{(2)} = 0$) из равенств (2.7) следуют известные результаты

$$T_{\theta\theta}^{0(1)} = T_{\varphi\varphi}^{0(1)} = 0, \quad T_{\theta\theta}^{0(2)} = T_{\varphi\varphi}^{0(2)} = -pR\rho_{(2)}/2$$

Для радиального напряжения (2.4) в соответствии с выражением (2.6) имеем

$$\sigma_{zz}^0 = -\frac{p\rho_{(2)}^2\chi_2}{(1+\chi_{(1)}+\chi_{(2)})\rho^2} \tag{2.8}$$

3. Линеаризованные уравнения устойчивости. Для определения значений p, при достижении которых возможно ветвление решения составленной системы нелинейных уравнений равновесия, проведем их линеаризацию в окрестности решения (2.2), (2.6) и (2.8).

Линеаризованные уравнения равновесия для заполнителя и их редукция к двумерным уравнениям. Если считать, что до потери устойчивости оболочка напряжена, но не деформирована, то уравнения нейтрального равновесия для заполнителя в силу соотношений $U^0 = V^0 = 0$, $\sigma^0_{\theta z} = \sigma^0_{\varphi z} = 0$ принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sigma^*_{z\theta}) + \rho\sigma_{\theta z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sigma^*_{z\varphi}) + \rho\sigma_{\varphi z} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\sigma_{zz}) + \frac{\rho}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\sigma_{\theta z}) + \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi}\right] = 0 \tag{3.1}$$

Здесь в отличие от соотношений (1.3)

$$\sigma^*_{z\theta} = \sigma_{\theta z} + \sigma^0_{zz}\frac{\partial U}{R\partial\rho} = G_{13}\left[\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{U}{\rho}\right) + \frac{\partial W}{\rho R\partial\theta}\right] + \sigma^0_{zz}\frac{\partial U}{R\partial\rho}$$
$$\sigma^*_{\varphi z} = \sigma_{\varphi z} + \sigma^0_{zz}\frac{\partial V}{R\partial\rho} = G_{23}\left[\frac{\partial W}{\rho R\sin\theta\partial\varphi} + \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{V}{\rho}\right)\right] + \sigma^0_{zz}\frac{\partial V}{R\partial\rho} \tag{3.2}$$

$$\sigma_{zz} = E_3\frac{\partial W}{R\partial\rho} \tag{3.3}$$

а σ^0_{zz} вычисляется по формуле (2.8).

. Интегралами уравнений (3.1) являются функции

$$\sigma_{z\theta} = \frac{q_1}{\rho^3} - \frac{q^0_3}{\rho R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{U}{\rho}\right), \quad \sigma_{z\varphi} = \frac{q_2}{\rho^3} - \frac{q^0_3}{\rho R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{V}{R}\right) \tag{3.4}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{q_3}{\rho^2} + \frac{q}{\rho^3} + q^0_3\frac{S}{\rho^3} \tag{3.5}$$

в которых $q_i = q_i(\theta, \varphi)$ – функции интегрирования, а

$$q^0_3 = -\frac{p\rho^2_{(2)}\chi_{(2)}}{1 + \chi_{(1)} + \chi_{(2)}}, \quad q = \frac{\partial q_1}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta q_1 + \frac{\partial q_2}{\sin\theta\partial\varphi}$$
$$S = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial U}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}U + \frac{\partial V}{\sin\theta\partial\varphi}\right) \tag{3.6}$$

При дальнейшем интегрировании уравнений (3.3), (3.5) определяется радиальное перемещение в заполнителе

$$W = w_0(\theta, \varphi) - \frac{R}{E_3}\left(\frac{q_3}{\rho} + \frac{q}{2\rho^2} - q^0_3 J\right), \quad J = \int\frac{Sd\rho}{\rho^3} \tag{3.7}$$

где w_0 – произвольная пока функция.

Выполнение кинематических условий контакта по нормали к поверхности σ из (1.6) позволяет определить введенные функции интегрирования q_3 и w_0, их подстановка в выражение (3.7) приводит к следующей формуле для определения прогиба в заполнителе:

$$W = \frac{\rho_{(2)}(\tilde{z} + h_0)w^{(2)} - \rho_{(1)}(\tilde{z} - h_0)w^{(1)}}{2h_0\rho} - \frac{qR(\tilde{z}^2 - h_0^2)}{2E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}\rho^2} +$$
$$+ q^0_3 R\frac{\rho_{(1)}(\tilde{z} - h_0)J_{(1)} - \rho_{(2)}(\tilde{z} + h_0)J_{(2)} + 2h_0\rho J}{2h_0E_3\rho}; \quad \tilde{z} = \frac{z}{R}, \quad J_{(k)} = J(\theta, \varphi, \rho_{(k)}) \tag{3.8}$$

При $S\rho^{-3} \le R$ с точностью $O(h_0^2)$ членом, содержащим множитель $\overset{0}{q}_3$, можно пренебречь по сравнению с первым членом. Тогда для W будем иметь упрощенную формулу

$$W \approx \frac{\rho_{(2)}(\tilde{z}+h_0)w^{(2)} - \rho_{(1)}(\tilde{z}-h_0)w^{(1)}}{2h_0\rho} - \frac{qE(\tilde{z}^2 - h_0^2)}{2E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}\rho^2} \tag{3.9}$$

а σ_{zz} будет вычисляться по формуле

$$\sigma_{zz} \approx \frac{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}(w^{(2)} - w^{(1)})}{2h\rho^2} + q\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho_{(1)}\rho_{(2)}}\right) \tag{3.10}$$

Для определения тангенциальных перемещений в заполнителе воспользуемся соотношениями (1.4) и (3.2), из которых следуют дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \left(G_{13} + \frac{\overset{0}{q}_3}{\rho^2}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{U}{\rho}\right) &= \frac{q_1 R}{\rho^4} - \frac{G_{13}}{\rho^2}\frac{\partial W}{\partial\theta} \\ \left(G_{23} + \frac{\overset{0}{q}_3}{\rho^2}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{V}{\rho}\right) &= \frac{q_2 R}{\rho^4} - \frac{G_{23}}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial\varphi} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Интегрирование этих уравнений затруднено из-за наличия переменных коэффициентов перед производными по координате ρ, поэтому их решение будем определять в окрестности

$$\frac{\overset{0}{q}_3}{\rho^2} = \overset{0}{\sigma}_{zz} \approx \frac{p\chi_{(2)}}{1+\chi_{(1)}+\chi_{(2)}} = \tilde{q} \tag{3.12}$$

Оно представимо в виде

$$\begin{aligned} \frac{U}{\rho} &= U_0(\theta,\varphi) - \frac{q_1 R}{3G_{13}^*\rho^3} - \frac{G_{13}}{G_{13}^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int\frac{W d\rho}{\rho^2}\right) \\ \frac{V}{\rho} &= V_0(\theta,\varphi) - \frac{q_2 R}{3G_{23}^*\rho^3} - \frac{G_{23}}{G_{23}^*}\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left(\int\frac{W d\rho}{\rho^2}\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $G_{13}^* = G_{13} + \tilde{q}$, $G_{23}^* = G_{23} + \tilde{q}$. Внося в равенства (3.13) выражение для радиального перемещения (3.9) и выполняя кинематические условия сопряжения по тангенциальным перемещениям из (1.6), после некоторых преобразований приходим к двум двумерным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\omega_\theta^{(2)}}{\rho_{(2)}} - \frac{\omega_\theta^{(1)}}{\rho_{(1)}} + \frac{\partial w_1}{\partial\theta} + f_1 - g_1\frac{\partial q}{\partial\theta} = 0 \\ \mu_2 &= \frac{\omega_\varphi^{(2)}}{\rho_{(2)}} - \frac{\omega_\varphi^{(1)}}{\rho_{(1)}} + \frac{\partial w_2}{\sin\theta\partial\varphi} + f_2 - g_2\frac{\partial q}{\sin\theta\partial\varphi} = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

в которых

$$w_i = \frac{\rho_{(2)}w^{(1)} - \rho_{(1)}w^{(2)} - h_i^*(w^{(1)} + w^{(2)})}{\rho_{(1)}\rho_{(2)}}; \quad h_i^* = \frac{h_0 G_{i3}}{G_{i3}^*}$$

$$f_i = \frac{q_i R f}{G^*_{i3}}, \quad g_i = \frac{2h_0^3 G_{i3} R}{3E_3 G^*_{i3}\rho^3_{(1)}\rho^3_{(2)}}; \quad i = 1,2; \quad f = 2h_0(3+h_0^2)/(3p_1^3 p_2^3)$$

Линеаризованные уравнения устойчивости для несущих слоев. Проведя линеаризацию уравнений (1.5), (1.8), (1.12) в окрестности решений (2.6), (2.7), (2.9), приходим к уравнениям нейтрального равновесия внешних слоев, которые через перемещения могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}
f_\theta^{(k)} = L_{11}^{(k)}(u^{(k)}) + L_{12}^{(k)}(v^{(k)}) + \left[(1+\nu_1^{(k)})\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(1 - \frac{\nu_1^{(k)}}{\nu_2^{(k)}}\right)\operatorname{ctg}\theta\right]w^{(k)} - \\
- C_{(k)}^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \nu_1^{(k)} - \frac{\nu_1^{(k)}}{\nu_2^{(k)}}\operatorname{ctg}^2\theta\right]\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\theta} - \\
- C_{(k)}^2\frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\left[(\nu_1^{(k)} + 2\gamma_1^{(k)})\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\right) - \frac{\nu_1^{(k)}}{\nu_2^{(k)}}\operatorname{ctg}\theta\right]w^{(k)} + \\
+ \frac{T_{\theta\theta}^{0(k)}\omega_\theta^{(k)}}{R\rho_{(k)}B_1^{(k)}} + \frac{Rq_1^*(\rho_{(k)})\delta_{(k)}}{\rho_{(k)}^2 B_1^{(k)}} = 0 \\
f_\varphi^{(k)} = L_{21}^{(k)}(u^{(k)}) + L_{22}^{(k)}(v^{(k)}) + (1+\nu_2^{(k)})\frac{\partial w^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} - \\
- C_{(k)}^2\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left[(\nu_2^{(k)} + 2\gamma_2^{(k)})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\gamma_2^{(k)} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\right]w^{(k)} + \\
+ \frac{T_{\varphi\varphi}^{0(k)}\omega_\varphi^{(k)}}{R\rho_{(k)}B_2^{(k)}} + \frac{Rq_2^*(\rho_{(k)})\delta_{(k)}}{\rho_{(k)}^2 B_2^{(k)}} = 0 \\
f_z^{(k)} = \left(\nu_2^{(k)} + \frac{\nu_2^{(k)}}{\nu_1^{(k)}}\right)\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\theta} + (1+\nu_2^{(k)})\operatorname{ctg}\theta u^{(k)} + (1+\nu_2^{(k)})\frac{\partial v^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} + \mu_1^{(k)}w^{(k)} - \\
- C_{(k)}^2\left\{\frac{\nu_2^{(k)}}{\nu_1^{(k)}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\operatorname{ctg}\theta\right)\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\left[(\nu_2^{(k)} + 2\gamma_2^{(k)})\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\right]u^{(k)} + \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left[(\nu_2^{(k)} + 2\gamma_2^{(k)})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\right]v^{(k)}\right\} + \\
+ C_{(k)}^2\left\{\left[\frac{\nu_2^{(k)}}{\nu_1^{(k)}}\left(\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right) - (\nu_2^{(k)} + \operatorname{ctg}^2\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\right)\right]\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\theta} + \right. \\
\left. + \frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\left[2(\nu_2^{(k)} + 2\gamma_2^{(k)})\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + (1+\nu_2^{(k)})(1 + 2\operatorname{ctg}^2\theta) + \frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\right]w^{(k)}\right\} +
\end{gathered} \tag{3.15}$$

$$+\delta_{(k)}\frac{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}(w^{(1)}-w^{(2)})}{2h_0\rho_{(k)}B_2^{(k)}}-\frac{1}{R\rho_{(k)}B_2^{(k)}}\left[T_{\theta\theta}^{0(k)}\left(\frac{\partial\omega_\theta^{(k)}}{\partial\theta}+\omega_\theta^{(k)}\operatorname{ctg}\theta\right)+\right.$$

$$\left.+T_{\varphi\varphi}^{0(k)}\frac{\partial\omega_\varphi^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi}\right]-\frac{qRH_{(k)}}{\rho_{(k)}^2B_2^{(k)}}=0;\quad k=1,2$$

где

$$q_1^*(\rho_{(k)})=q_1+\frac{q_3^0U(\theta,\varphi,\rho_{(k)})}{R},\quad q_2^*(\rho_{(k)})=q_2+\frac{q_3^0V(\theta,\varphi,\rho_{(k)})}{R}$$
$$C_{(k)}^2=\frac{t_{(k)}^{02}}{3\rho_{(k)}^2},\quad H_{(k)}=\frac{t_{(k)}^0}{\rho_{(k)}}+\frac{h_0\rho_{(k)}^2\delta_{(k)}}{\rho_{(1)}\rho_{(2)}}\tag{3.16}$$

Таким образом, уравнения устойчивости рассматриваемой оболочки состоят из уравнений (3.14), (3.15), в которых неизвестными являются двумерные функции $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$, q_1, q_2, причем входящие в (3.16) функции $U(\theta, \varphi, \rho_{(k)})$, $V(\theta, \varphi, \rho_{(k)})$ определяются из условий контакта слоев по тангенциальным перемещениям.

Для дальнейших исследований в качестве неизвестных целесообразно принять функции $w^{(k)}$, $\omega_\theta^{(k)}$, $\omega_\varphi^{(k)}$, q_1, q_2, выражая тангенциальные перемещения в несущих слоях через введенные неизвестные согласно зависимостям

$$u^{(k)}=\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\theta}-\omega_\theta^{(k)},\quad v^{(k)}=\frac{\partial w^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi}-\omega_\varphi^{(k)};\quad k=1,2\tag{3.17}$$

При использовании соотношений (3.17) уравнения (3.15) с точностью $O(C_{(k)}^2)$ представимы в виде

$$f_\theta^{(k)}=\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2+2)+\left(1-\frac{\nu_1^{(k)}}{\nu_2^{(k)}}\right)\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+1\right)-\right.$$

$$\left.-(1-\nu_1^{(k)}-2\gamma_1^{(k)})\frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\right)\right]w^{(k)}-$$

$$-L_{11}^{(k)}(\omega_\theta^{(k)})-L_{12}^{(k)}(\omega_\varphi^{(k)})+\frac{T_{\theta\theta}^{0(k)}\omega_\theta^{(k)}}{R\rho_{(k)}B_1^{(k)}}+\frac{Rq_1^*(\rho_{(k)})\delta_{(k)}}{\rho_{(k)}^2B_1^{(k)}}=0$$

$$f_\varphi^{(k)}=\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left[\nabla^2+2-(1-\nu_2^{(k)}-2\gamma_2^{(k)})\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+1\right)\right]w^{(k)}-$$

$$-L_{21}^{(k)}(\omega_\theta^{(k)})-L_{22}^{(k)}(\omega_\varphi^{(k)})+\frac{T_{\varphi\varphi}^{0(k)}\omega_\varphi^{(k)}}{R\rho_{(k)}B_2^{(k)}}+\frac{Rq_2^*(\rho_{(k)})\delta_{(k)}}{\rho_{(k)}^2B_2^{(k)}}=0$$

$$f_z^{(k)}=(1+\nu_2^{(k)})\left[\nabla^2+2-\left(1-\frac{\nu_2^{(k)}}{\nu_1^{(k)}}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+1\right)\right]w^{(k)}+\left(1-\frac{\nu_2^{(k)}}{\nu_1^{(k)}}\right)\frac{\partial\omega_\theta^{(k)}}{\partial\theta}-\tag{3.18}$$

$$-(1+\nu_2^{(k)})\left(\frac{\partial\omega_\theta^{(k)}}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\omega_\theta^{(k)}+\frac{\partial\omega_\varphi^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi}\right)+C_{(k)}^2\left\{\frac{\nu_2^{(k)}}{\nu_1^{(k)}}\left(\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}+2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\left[(\nu_2^{(k)}+2\gamma_2^{(k)})\frac{\partial}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\right]\right\}\omega_\theta^{(k)}+$$

$$+C_{(k)}^2\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left[(\nu_2^{(k)}+2\gamma_2^{(k)})\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\right]\omega_\varphi^{(k)}+$$

$$+\delta_{(k)}\frac{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}(w^{(1)}-w^{(2)})}{2h_0\rho_{(k)}B_2^{(k)}}-$$

$$-\frac{1}{R\rho_{(k)}B_2^{(k)}}\left[T_{\theta\theta}^{0(k)}\left(\frac{\partial\omega_\theta^{(k)}}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\omega_\theta^{(k)}\right)+T_{\varphi\varphi}^{0(k)}\frac{\partial\omega_\varphi^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi}\right]-\frac{qRH_{(k)}}{\rho_{(k)}^2B_2^{(k)}}=0$$

в которых

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}$$

$$q_1^*(\rho_{(k)})=q_1+\frac{\overset{0}{q}_3}{R}\left[\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\theta}-(1-\overset{0}{t}_{(k)}\delta_{(k)})\omega_\theta^{(k)}\right]\tag{3.19}$$

$$q_2^*(\rho_{(k)})=q_2+\frac{\overset{0}{q}_3}{R}\left[\frac{\partial w^{(k)}}{R\sin\partial\theta}-(1-\overset{0}{t}_{(k)}\delta_{(k)})\omega_\varphi^{(k)}\right]$$

причем в соотношениях (3.19) слагаемыми, пропорциональными $\overset{0}{q}_3$, с точностью $1+U(\theta,\varphi,\rho_{(k)})/R\approx 1$ можно пренебречь, в чем можно убедиться при использовании формул (2.8), (2.9).

Исследование составленной однородной системы дифференциальных уравнений (3.14), (3.18) показывает, что в них разделение переменных по углам θ и φ не происходит. Такое разделение возможно лишь для оболочки с изотропными несущими слоями и изотропным заполнителем.

4. Формы потери устойчивости и критические нагрузки изотропной трехслойной сферической оболочки. Если оболочка изотропная, т.е. имеют место равенства

$$E_1^{(k)}=E_2^{(k)}=E^{(k)},\quad \nu_1^{(k)}=\nu_2^{(k)}=\nu^{(k)}(B_1^{(k)}=B_2^{(k)}=B^{(k)}),\quad G_{13}=G_{23}=G_3\tag{4.1}$$

то при введении безразмерных параметров, искомых функций и внешней нагрузки

$$K_{(k)}=\frac{3G_3^*\rho_{(1)}^2\rho_{(2)}^2}{2h_0\rho_{(k)}^2(3+h_0^2)B^{(k)}},\quad K=\frac{G_3^*h_0^2}{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}(3+h_0^2)},\quad \varphi_{(k)}=\frac{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}}{2h_0\rho_{(k)}B^{(k)}},\quad \tilde q_k=\frac{fRq_k}{G_3^*}$$

$$\tilde p_{(1)}=\frac{p\chi_{(1)}^*(1+\nu^{(1)})}{2(1+\chi_{(1)}^*+\chi_{(2)}^*)(1+\nu^{(2)})B^{(2)}},\quad \tilde p_2=\frac{p(1+\chi_{(1)}^*)}{2(1+\chi_{(1)}^*+\chi_{(2)}^*)B^{(2)}},\quad h_0^*=\frac{h_0G_3}{G_3^*}\tag{4.2}$$

где $G_3^* = G_3 + \tilde{q}$, уравнения устойчивости (3.14), (3.18) при пренебрежении в соотношениях (3.19) слагаемыми, пропорциональными $\overset{0}{q}_3$, принимают вид

$$
\begin{aligned}
f_\theta^{(k)} &= \frac{\partial}{\partial\theta}[(\nabla^2+2)w^{(k)}] - \tilde{L}_{11}^{(k)}(\omega_\theta^{(k)}) - \tilde{L}_{12}^{(k)}(\omega_\varphi^{(k)}) - \tilde{p}_{(k)}\omega_\theta^{(k)} + K_{(k)}\delta_{(k)}\tilde{q}_1 = 0\\
f_\varphi^{(k)} &= \frac{1}{\sin\theta\partial\varphi}[(\nabla^2+2)w^{(k)}] - \tilde{L}_{21}^{(k)}(\omega_\theta^{(k)}) - \tilde{L}_{22}^{(k)}(\omega_\varphi^{(k)}) - \tilde{p}_k\omega_\varphi^{(k)} + K_{(k)}\delta_{(k)}\tilde{q}_2 = 0\\
f_z^{(k)} &= (1+\nu^{(k)})\left[(\nabla^2+2)w^{(k)} - \frac{\partial\omega_\theta^{(k)}}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\,\omega_1^{(k)} - \frac{\partial\omega_\varphi^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi}\right] +\\
&+ C_{(k)}^2\left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\right)\nabla^2 - \operatorname{ctg}^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\omega_\theta^{(k)} + \frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}(\nabla^2 - 2\operatorname{ctg}\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\omega_\varphi^{(k)}\right\} +\\
&+ \delta_{(k)}\varphi_{(k)}(w^{(1)} - w^{(2)}) + \tilde{p}_{(k)}\left(\frac{\partial\omega_\theta^{(k)}}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\,\omega_\theta^{(k)} + \frac{\partial\omega_\varphi^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi}\right) -\\
&- K_{(k)}H_{(k)}\left(\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\,\tilde{q}_1 + \frac{\partial\tilde{q}_2}{\sin\theta\partial\varphi}\right) = 0\\
\mu_1 &= \frac{\omega_\theta^{(2)}}{\rho_{(2)}} - \frac{\omega_\theta^{(1)}}{\rho_{(1)}} + \frac{\partial}{\rho_{(1)}\rho_{(2)}\partial\theta}[\rho_{(2)}w^{(1)} - \rho_{(1)}w^{(2)} - h_0^*(w^{(1)}+w^{(2)})] +\\
&+ \tilde{q}_1 - K\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial\theta} + \tilde{q}_1\operatorname{ctg}\theta + \frac{\partial\tilde{q}_2}{\sin\theta\partial\varphi}\right) = 0\\
\mu_2 &= \frac{\omega_\varphi^{(2)}}{\rho_{(2)}} - \frac{\omega_\varphi^{(1)}}{\rho_{(1)}} + \frac{\partial}{\rho_{(1)}\rho_{(2)}\sin\theta\partial\varphi}[\rho_{(2)}w^{(1)} - \rho_{(1)}w^{(2)} - h_0^*(w^{(1)}+w^{(2)})] +\\
&+ \tilde{q}_2 - K\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left(\frac{\partial\tilde{q}_1}{\partial\theta} + \tilde{q}_1\operatorname{ctg}\theta + \frac{\partial\tilde{q}_2}{\sin\theta\partial\varphi}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Здесь введены обозначения для операторов

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_{11}^{(k)} &= \nabla^2 - \nu^{(k)} - \operatorname{ctg}^2\theta - \frac{1+\nu^{(k)}}{2}\frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}\\
\tilde{L}_{12}^{(k)} &= \frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}\left(\frac{1+\nu^{(k)}}{2}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{3-\nu^{(k)}}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) = \tilde{L}_{21}^{(k)}\\
\tilde{L}_{22}^{(k)} &= \frac{1-\nu^{(k)}}{2}\frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}(\nabla^2 + 1 - \operatorname{ctg}^2\theta) + \frac{1+\nu^{(k)}}{2}\frac{\partial^2}{\sin^2\theta\partial\varphi^2}
\end{aligned}
$$

которые получаются из операторов (1.11) при выполнении условий (4.1).

Введем вместо искомых функций $\omega_\theta^{(k)}$, $\omega_\varphi^{(k)}$, $\tilde{q}_k$ $(k = 1, 2)$ новые искомые неизвестные $F^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, Q, Ψ в соответствии с представлениями

$$
\begin{aligned}
\omega_\theta^{(k)} &= \frac{\partial F^{(k)}}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi}, \quad \omega_\varphi^{(k)} = \frac{\partial F^{(k)}}{\sin\theta\partial\varphi} - \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\theta}\\
\tilde{q}_1 &= \frac{\partial Q}{\partial\theta} + \frac{\partial\Psi}{\sin\theta\partial\varphi}, \quad \tilde{q}_2 = \frac{\partial Q}{\sin\theta\partial\varphi} - \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

После подстановки выражений (4.4) в соотношения (4.3) и некоторых преобразований с точностью $O(C^2_{(k)})$ приходим к уравнениям

$$f_\theta^{(k)} = \frac{\partial}{\partial\theta}U^{(k)} + \frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}V^{(k)} = 0, \quad f_\varphi^{(k)} = \frac{\partial}{\sin\theta\partial\varphi}U^{(k)} - \frac{\partial}{\partial\theta}V^{(k)} = 0$$

$$f_z^{(k)} = (\nabla^2+2)w^{(k)} - \left(\nabla^2 - \frac{C^2_{(k)}}{1+\nu^{(k)}}\nabla^2\nabla^2\right)F^{(k)} + \frac{\tilde{p}_{(k)}}{1+\nu^{(k)}}\nabla^2 F^{(k)} +$$
$$+ \frac{\varphi_{(k)}\delta_{(k)}}{1+\nu^{(k)}}(w^{(1)} - w^{(2)}) - \frac{K_{(k)}H_{(k)}}{1+\nu^{(k)}}\nabla^2 Q = 0 \tag{4.5}$$

$$\mu_1 = \frac{\partial M}{\partial\theta} + \frac{\partial N}{\sin\theta\partial\varphi} = 0, \quad \mu_2 = \frac{\partial M}{\sin\theta\partial\varphi} - \frac{\partial N}{\partial\theta} = 0$$

в которых

$$U^{(k)} = (\nabla^2+2)w^{(k)} - (\nabla^2 + 1 - \nu^{(k)})F^{(k)} - \tilde{p}_{(k)}F^{(k)} + K_{(k)}\delta_{(k)}Q$$

$$V^{(k)} = \frac{1-\nu^{(k)}}{2}(\nabla^2+2)\Phi^{(k)} + \tilde{p}_{(k)}\Phi^{(k)} - K_{(k)}\delta_{(k)}\Psi$$

$$M = \frac{F^{(2)}}{\rho_{(2)}} - \frac{F^{(1)}}{\rho_{(1)}} + \frac{(\rho_{(2)} - h_0^*)w^{(1)} - (\rho_{(1)} + h_0^*)w^{(2)}}{\rho_{(1)}\rho_{(2)}} + (1 - K\nabla^2)Q \tag{4.6}$$

$$N = \frac{\Phi^{(2)}}{\rho_{(2)}} - \frac{\Phi^{(1)}}{\rho_{(1)}} + \Psi$$

Из уравнений (4.5) следует, что исходная система взаимосвязанных дифференциальных уравнений устойчивости (4.3) относительно новых неизвестных распадается на две независимые системы уравнений. Так как для замкнутой сферической оболочки для всех неизвестных функций вместо граничных условий формулируются условия их периодичности по угловым координатам θ и φ, одной из этих систем уравнений, имеющей вид

$$V^{(k)} = 0, \quad k = 1,2, \quad N = 0 \tag{4.7}$$

описываются такие формы потери устойчивости (ФПУ), которые реализуются в оболочке без появления прогибов несущих слоев в возмущенном состоянии, что следует из анализа выражений для $V^{(k)}$ и N из соотношений (4.6). Другой системой уравнений

$$U^{(k)} = 0, \quad f_z^{(k)} = 0, \quad k = 1,2, \quad M = 0 \tag{4.8}$$

содержащей прогибы $w^{(k)}$ и скалярные потенциальные функции $F^{(k)}$, Q, описываются ФПУ, сопровождающиеся изгибаниями несущих слоев в возмущенном состоянии. В свете результатов, полученных ранее [1, 3], описывающиеся уравнениями (4.7) ФПУ следует назвать чисто сдвиговыми, а устанавливаемые решением уравнений (4.8) ФПУ – смешанными изгибными.

Поскольку граничные условия в сферической оболочке заменяются условиями периодичности функций $w^{(k)}$, $F^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, Q, Ψ по угловым координатам θ и φ, решениями уравнений (4.7), (4.8) являются следующие комбинации:

$$F = P_n^m(\cos\theta)(F_{nm}\cos m\varphi + \tilde{F}_{nm}\sin m\varphi) \tag{4.9}$$

где под функцией F понимается одна из приведенных выше; F_{nm}, $\tilde{F}_{nm}$ – постоянные интегрирования; $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединенная функция Лежандра степени n; m – число узловых меридианов.

При этом функция F удовлетворяет уравнению Лежандра

$$\frac{d^2F}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{dF}{d\theta} + \left(\lambda_n^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)F = 0, \quad \lambda_n^2 = n(n+1) \tag{4.10}$$

В соответствии со свойствами (4.9), (4.10) от дифференциальных уравнений (4.7) и (4.8) можно перейти к алгебраическим уравнениям, имеющим одинаковый вид как относительно F_{nm}, так и относительно $\tilde{F}_{nm}$. Для этого достаточно осуществить формальный переход от $w^{(k)}$, $F^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, Q, Ψ к их амплитудным значениям $w_{nm}^{(k)}$, $F_{nm}^{(k)}$, $\Phi_{nm}^{(k)}$, Q_{nm}, Ψ_{nm} или $\tilde{w}_{nm}^{(k)}$, $\tilde{F}_{nm}^{(k)}$, $\tilde{\Phi}_{nm}^{(k)}$, $\tilde{Q}_{nm}$, $\tilde{\Psi}_{nm}$, заменяя оператор ∇^2 числовым значением $-\lambda_n^2$.

Сдвиговая ФПУ. В соответствии с изложенным выше для исследования сдвиговой ФПУ имеем уравнения (4.7), которые с учетом выражений (4.6) представимы в алгебраическом виде

$$\left[\frac{1-\nu^{(k)}}{2}(2-\lambda_n^2) + \tilde{p}^{(k)}\right]\Phi_{nm}^{(k)} - K_{(k)}\delta_{(k)}\Psi_{nm} = 0; \quad k = 1, 2$$

$$\frac{\Phi_{nm}^{(2)}}{\rho_{(2)}} - \frac{\Phi_{nm}^{(1)}}{\rho_{(1)}} + \Psi_{nm} = 0$$

Заметим, что аналогичные уравнения получаются и относительно амплитудных значений $\tilde{\Phi}_{nm}^{(k)}$, $\tilde{\Psi}_{nm}$.

Из условия нетривиальности решений этих систем приходим к уравнению для определения критического внешнего давления p

$$\tilde{p}_{(1)}\tilde{p}_{(2)} + \tilde{p}_{(1)}\left[\frac{1-\nu^{(2)}}{2}(2-\lambda_n^2) - \frac{K_{(2)}}{\rho_{(2)}}\right] + \tilde{p}_{(2)}\left[\frac{1-\nu^{(1)}}{2}(2-\lambda_n^2) - \frac{K_{(1)}}{\rho_{(1)}}\right] +$$

$$+ \frac{(1-\nu^{(1)})(1-\nu^{(2)})}{4}(2-\lambda_n^2)^2 - \left[\frac{(1-\nu^{(2)})K_{(1)}}{2\rho_{(1)}} + \frac{(1-\nu^{(1)})K_{(2)}}{2\rho_{(2)}}\right](2-\lambda_n^2) = 0 \tag{4.11}$$

Исследование уравнения (4.11) совместно с (4.2) показывает, что значения p получаются отрицательными при $n = 0$ ($\lambda_n = 0$) и являются возрастающими положительными с увеличением порядка присоединенных функций $P_n^m(\cos\theta)$. Своего наименьшего значения давление p, которое обозначим через p^c, достигает при $n = 1$, и ее величина находится из соотношения

$$p^c = \frac{2B^{(2)}(1+\chi_{(1)}^* + \chi_{(2)}^*)}{(1+\chi_{(1)}^*)}\left[\frac{K_{(1)}}{\rho_{(1)}} + \frac{(1+\chi_{(1)}^*)(1+\nu^{(2)})}{\chi_{(1)}^*(1+\nu^{1)})}\frac{K_{(2)}}{\rho_{(2)}}\right] \tag{4.12}$$

При этом возможна потеря устойчивости при $m = 0$ ($P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta$) или при $m = 1$ ($P_1^1(\cos\theta) = -\sin\theta$).

В первом случае в соответствии с представлениями (4.4) и (4.9) имеем

$$P_n^m(\cos\theta)\Phi_{nm}^{(k)} = \Phi_{10}^{(k)}\cos\theta, \quad P_n^m(\cos\theta)\Psi_{nm} = \Psi_{10}\cos\theta \tag{4.13}$$

так как амплитудные величины $\tilde{\Phi}_{10}^{(k)}$ и $\tilde{\Psi}_{10}$ при $m = 0$ отсутствуют. При этом полная система дифференциальных уравнений (4.5) будет удовлетворена при

$$w^{(k)} = 0, \quad F^{(k)} = 0, \quad Q = 0 \tag{4.14}$$

Таким образом, здесь в возмущенном состоянии перемещения $w^{(k)}$, $u^{(k)}$, $\upsilon^{(k)}$ и функции $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ на основании соотношений (3.17), (4.4), (4.13) и (4.14) будут иметь вид

$$w^{(k)} = 0, \quad u^{(k)} = 0, \quad \tilde{q}_1 = 0, \quad \upsilon^{(k)} = \Phi_{10}^{(k)}\sin\theta, \quad \tilde{q}_2 = \Psi_{10}\sin\theta \tag{4.15}$$

Данная ФПУ для оболочки с тонким заполнителем была подробно исследована [3], однако полученное значение критической нагрузки в соответствии с последними результатами [6] требует уточнения. Потеря устойчивости по этой форме происходит путем взаимного поворота одного несущего слоя относительно другого с осью вращения, проходящей через центр сферы. Такой поворот при переходе оболочки из невозмущенного состояния (т.е. с решения (2.6), (2.8), (2.9)) в возмущенное состояние (т.е. на решение (4.15) на начальном этапе (т.е. на бесконечно малом начальном участке новой траектории) происходит без деформаций и искривлений несущих слоев.

Наряду с ФПУ (4.13), (4.15) существует другая ФПУ (случай $m = 1$), которая описывается функциями

$$\Phi^{(k)} = (\Phi_{11}^{(k)}\cos\varphi + \tilde{\Phi}_{11}^{(k)}\sin\varphi)\sin\theta, \quad \Psi = -(\Psi_{11}\cos\varphi + \tilde{\Psi}_{11}\sin\varphi)\sin\theta \tag{4.16}$$

В этом случае вместо (4.15) будем иметь

$$\begin{gathered} w^{(k)} = 0, \quad u^{(k)} = -\Phi_{11}^{(k)}\sin\varphi + \tilde{\Phi}_{11}^{(k)}\cos\varphi \\ \upsilon^{(k)} = (\Phi_{11}^{(k)}\cos\varphi + \tilde{\Phi}_{11}^{(k)}\sin\varphi)\cos\theta \\ \tilde{q}_1 = -\Psi_{11}\sin\varphi + \tilde{\Psi}_{11}\cos\varphi, \quad \tilde{q}_2 = (\Psi_{11}\cos\varphi + \tilde{\Psi}_{11}\sin\varphi)\cos\theta \end{gathered} \tag{4.17}$$

а значение критической нагрузки по прежнему находится из равенства (4.12) с использованием формулы (4.2) для K_i, зависящих от начального обжатия заполнителя $\tilde{q}$.

Для оболочки симметричного строения с тонкостенным заполнителем

$$(\rho_{(1)} \approx \rho_{(2)} \approx 1,\ \nu_1^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu,\ E^{(1)} = E^{(2)} = E,\ t_{(1)}^0 = t_{(2)}^0 = t_0)$$

из соотношения (4.12) следует формула

$$p^c = \frac{G_3(1 + 2\chi)}{\chi\{1 + h_0(1 + \chi)/[4(1 + 2\chi)\chi]\}}, \quad \chi = \frac{E_3(1 - \nu)}{8h_0 t_0 E} \tag{4.18}$$

которая в силу сохранения в соотношениях (1.1) нелинейных слагаемых принципиально уточняет аналогичную формулу, полученную [3] при использовании для заполнителя [8, 9] лишь линейных уравнений теории упругости.

Смешанная изгибная ФПУ. Изгибные ФПУ описываются системой уравнений (4.8), которая, согласно соотношениям (4.9), (4.10), принимает вид

$$
\begin{gathered}
(2-\lambda_n^2)W_{nm}^{(k)} + (\lambda_n^2 - 1 + \nu^{(k)} - \tilde{p}_{(k)})F_{nm}^{(k)} + K_{(k)}\delta_{(k)}Q_{nm} = 0 \\
(2-\lambda_n^2)W_{nm}^{(k)} + \lambda_n^2\left(1 + \frac{C_{(k)}^2\lambda_n^2 - \tilde{p}_{(k)}}{1+\nu^{(k)}}\right)F_{nm}^{(k)} + \frac{\varphi_{(k)}\delta_{(k)}}{1+\nu^{(k)}}(W_{nm}^{(1)} - W_{nm}^{(2)}) + \\
+ \frac{K_{(k)}H_{(k)}}{1+\nu^{(k)}}\lambda_n^2 Q_{nm} = 0; \quad k = 1, 2 \\
\frac{\rho_{(2)}W_{nm}^{(1)} - \rho_{(1)}W_{nm}^{(2)} - h_0^*(W_{nm}^{(1)} + W_{nm}^{(2)})}{\rho_{(1)}\rho_{(2)}} + \frac{F_{nm}^{(2)}}{\rho_{(2)}} - \frac{F_{nm}^{(1)}}{\rho_{(1)}} + (1 + K\lambda_n^2)Q_{nm} = 0
\end{gathered}
\tag{4.19}
$$

Аналогичная система алгебраических уравнений получается и для амплитуд $\tilde{W}_{nm}^{(k)}$, $\tilde{F}_{nm}^{(k)}$ и $\tilde{Q}_{nm}$.

Исключая из системы (4.19) амплитуды $\tilde{W}_{nm}^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ и $\tilde{Q}_{nk}$, приходим к следующим алгебраическим уравнениям:

$$
\begin{gathered}
(A_n^{(1)} - a_n^{(1)}\tilde{P}_{(1)})F_{nm}^{(1)} - (B_n^{(1)} - b_n^{(1)}\tilde{P}_{(2)})F_{nm}^{(2)} = 0 \\
(B_n^{(2)} + b_n^{(2)}\tilde{P}_{(1)})F_{nm}^{(1)} + (A_n^{(2)} - a_n^{(2)}\tilde{P}_{(2)})F_{nm}^{(2)} = 0
\end{gathered}
\tag{4.20}
$$

где

$$
A_n^{(k)} = 1 - \nu^{(k)2} + C_{(k)}^2\lambda_n^4 + \varphi_{(k)}\left(1 + \frac{\nu^{(k)}}{\lambda_n^2 - 2}\right) - K_n^{(k)}f_{(k)}
$$

$$
B_n^{(k)} = \varphi_{(k)}\left(1 + \frac{1+\nu^{(3-k)}}{\lambda_n^2 - 2}\right) + K_n^{(k)}f_{(3-k)}
$$

$$
a_n^{(k)} = \lambda_n^2 - 1 - \nu^{(k)} + \frac{\varphi_{(k)}}{\lambda_n^2 - 2} - K_n^{(k)}(\delta_{(k)} + h_0 - h_0^*)
$$

$$
b_n^{(k)} = \frac{\varphi_{(k)}}{\lambda_n^2 - 2} - K_n^{(k)}(\delta_{(k)} - h_0 + h_0^*)
$$

$$
f_{(k)} = (1+\nu^{(k)})\delta_{(k)} + (h_0 - h_0^*)(1+\nu^{(k)}) - h_0^*(\lambda_n^2 - 2)
$$

$$
K_n^{(k)} = \frac{K_{(k)}H_{(k)}\lambda_n^2 - K_{(k)}(1+\nu^{(k)})\delta_{(k)} + \varphi_{(k)}(K_{(1)} + K_{(2)})\delta_{(k)}/(\lambda_n^2 - 2)}{\rho_{(1)}\rho_{(2)}(\lambda_n^2 - 2)(1 + K\lambda_n^2) + K_{(1)}(\rho_{(2)} - h_0^*) + K_{(2)}(\rho_{(1)} - h_0^*)}
$$

Введя безразмерный параметр нагрузки

$$
\bar{q} = p(1 + \chi_{(1)}^*)/[2(1 + \chi_{(1)}^* + \chi_{(2)}^*)B^{(2)}]
\tag{4.21}
$$

в соответствии с которым

$$\tilde{p}_{(1)} = \chi^*_{(1)}(1+\nu^{(1)})\bar{q}/[(1+\chi^*_{(1)})(1+\nu^{(2)})], \quad \tilde{p}_{(2)} = \bar{q}$$

из системы (4.20) получаем квадратное уравнение относительно $\bar{q}$. Его решение представляется в виде

$$\bar{q}_{1,2} = A_n \pm \sqrt{A_n^2 - B_n} \tag{4.22}$$

где

$$A_n = \frac{1}{2(a_n^{(1)}a_n^{(2)} - b_n^{(1)}b_n^{(2)})}\left[a_n^{(1)}A_n^{(2)} - b_n^{(2)}B_n^{(1)} + \frac{(1+\chi^*_{(1)})(1+\nu^{(2)})}{\chi^*_{(1)}(1+\nu^{(1)})}(a_n^{(2)}A_n^{(1)} - b_n^{(1)}B_n^{(2)})\right]$$

$$B_n = \frac{(1+\chi^*_{(1)})(1+\nu^{(2)})(A_n^{(1)}A_n^{(2)} - B_n^{(1)}B_n^{(2)})}{\chi^*_{(1)}(1+\nu^{(1)})(a_n^{(1)}a_n^{(2)} - b_n^{(1)}b_n^{(2)})}$$

Минимальное положительное значение корня (4.22) обозначим через $\bar{q}_*$. Оно находится из решения задачи минимизации функционала

$$\bar{q}_* = \min_{(n)}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \tag{4.23}$$

Если n_* – значение n, при котором реализуется минимум параметра нагрузки $\bar{q}_*$, то ФПУ будет описываться присоединенной функцией Лежандра степени $n_*(P_{n*}^m(\cos\theta))$ при числе узловых меридианов m, изменяющихся в пределах $0 \le m \le n_*$.

В этом случае ФПУ будет описываться функциями

$$w^{(k)} = P_n^{\tilde{m}}(\cos\theta)(W_{n\tilde{m}}^{(k)}\cos\tilde{m}\varphi + \tilde{W}_{n\tilde{m}}^{(k)}\sin\tilde{m}\varphi)$$

$$u^{(k)} = -\frac{d}{d\theta}[P_n^{\tilde{m}}(\cos\theta)](F_{n\tilde{m}}^{(k)}\cos\tilde{m}\varphi + \tilde{F}_{n\tilde{m}}^{(k)}\sin\tilde{m}\varphi)$$

$$\upsilon^{(k)} = \frac{\tilde{m}P_n^{\tilde{m}}(\cos\theta)}{\sin\theta}(F_{n\tilde{m}}^{(k)}\sin\tilde{m}\varphi - \tilde{F}_{n\tilde{m}}^{(k)}\cos\tilde{m}\varphi)$$

$$q_1 = -\frac{d}{d\theta}[P_n^{\tilde{m}}(\cos\theta)](Q_{n\tilde{m}}\cos\tilde{m}\varphi + \tilde{Q}_{n\tilde{m}}\sin\tilde{m}\varphi)$$

$$q_2 = \frac{\tilde{m}P_n^{\tilde{m}}(\cos\theta)}{\sin\theta}(Q_{n\tilde{m}}\sin\tilde{m}\varphi - \tilde{Q}_{n\tilde{m}}\cos\tilde{m}\varphi)$$

где $0 \le \tilde{m} \le n_*$.

5. Числовые результаты и их анализ. Исследование критических нагрузок и соответствующих им ФПУ проводилось для оболочек симметричного строения, когда

$$\nu^{(k)} = \nu, \quad E_2^{(k)} = E, \quad t_{(k)}^0 = t_0$$

и, как следствие,

$$\chi^*_{(k)} = \chi = \frac{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}(1-\nu)}{8h_0t_0E}, \quad \varphi_{(k)} = \varphi = \frac{E_3\rho_{(1)}\rho_{(2)}(1-\nu^2)}{4h_0t_0E}, \quad C_{(k)}^2 = \frac{t_0^2}{3\rho_{(k)}^2}$$

$$K_{(k)} = \frac{3G_3^*\rho_{(1)}^2\rho_{(2)}^2(1-\nu^2)}{4h_0t_0(3+h_0^2)E\rho_{(k)}}; \quad k = 1, 2$$

Таблица 1

r	$\delta = 1/2.6$	0.1/2.6	0.01/2.6
	m_*^u	m_*^u	m_*^u
2	2.05	1.98	1.95
4	2.31	2.03	2.00
6	2.71	2.10	2.04
8	3.26	2.19	2.08
10	3.98	2.29	2.12

Таблица 2

χ	r	$\delta = 1/2.6$		0.1/2.6	0.01/2.6
		m_*^u	m_*^c	m_*^u	m_*^c
0.2	2	1.42	2.599	1.42	1.42
	10	1.64	14.006	1.45	1.43
0.4	2	1.70	3.347	1.68	1.68
	10	2.23	18.231	1.73	1.73
0.6	2	1.87	4.096	1.84	1.84
	10	2.81	22.450	1.93	1.93
0.8	2	1.98	4.844	1.93	1.92
	10	3.38	26.666	2.18	2.05
1	2	2.05	5.592	1.98	1.97
	10	3.92	30.879	2.29	2.12
5	2	2.47	20.558	2.10	2.06
	10	12.11	115.070	3.26	2.34

Числовые результаты получены при варьировании параметров t_0, χ, $\delta = G_3/E_3$, $r = h_0/t_0$ в следующих пределах:

$$0.01 \le t_0 \le 0.0001, \quad 0.1 \le \chi \le 5, \quad 1/2.6 \le \delta \le 0.01/2.6, \quad 2 \le r \le 10 \tag{5.1}$$

Некоторые из них для $\nu = 0.3$, $t_0 = 0.01$ приведены в табл. 1 при $\chi = 1$ и в табл. 2, в которых введены следующие обозначения: $m_*^u = p_*^u/p_*$, $m_*^c = p_*^c/p_*$; p_*^u – критическое давление в случае изгибной ФПУ, найденное из решения задачи (4.23) при $q_0^3 \neq 0$ (уточненное решение, построенное в данной статье); p_* – критическое давление для однослойной сферической оболочки, которое в принятых в настоящей работе обозначениях вычисляется по известной формуле

$$p_* = \frac{8Et_0^2}{\rho_{(2)}^2\sqrt{3(1-\nu^2)}} = \frac{4t_0B^{(2)}}{\rho_{(2)}}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}}$$

Анализ полученных результатов показывает, что тенденция потери устойчивости по сдвиговой форме раньше, чем по изгибной, усиливается, в частности, при уменьшении у заполнителя модуля поперечного сдвига по сравнению с модулем E_3 (т.е. коэффициента анизотропии $\delta = G_3/(2.6E_3)$, $\delta = 1/2.6$ соответствует изотропному заполнителю), а также при увеличении h_0 и уменьшении χ. Так как значение p_*^c прямо пропорционально параметру δ, то m_*^c становится меньше m_*^u только при малых значениях δ, в то время как значение m_*^u практически не зависит от δ. Для оболочки с изотропным заполнителем, как видно из табл. 2, всегда $p_*^u < p_*^c$. Разница между значениями критических нагрузок у сферической трехслойной оболочки и однослойной оболочки (т.е. изолированного внешнего несущего слоя) не так значительна (табл. 2), чем, например, у трехслойных пластин. Как и следовало ожидать, такая разница возрастает при уменьшении t_0 и увеличении параметров χ и r.

Были проведены также расчеты по определению критического давления в случае изгибной ФПУ по формуле (4.23) при $q_3^0 = 0$ (решение, отвечающее описанной ранее постановке [3]). Их сопоставление со значениями m_*^u показало, что уточненные варианты теории трехслойных оболочек, построенные ранее [7, 8] в предположении о малости деформаций поперечных сдвигов при использовании линейных кинематических соотношениях для определения деформации поперечного обжатия заполнителя, на основе которых проводилось исследование изгибных ФПУ [2, 3], имеют весьма высокую точность их описания. Следовательно, использование для заполнителя нелинейных кинематических соотношений при определении деформации ε_{zz} в невозмущенном состоянии необходимо лишь для корректного описания сдвиговых ФПУ трехслойных конструкций.

Следует обратить внимание на то, что при малом значении параметра поперечного обжатия χ значение m_*^u даже меньше двух (т.е. теряет устойчивость по смешанной изгибной форме лишь подкрепленный заполнителем верхний несущий слой).

Эффект трехслойности (т.е. $m_*^u > 2$) у оболочки достигается только при определенных комбинациях параметров χ, r и увеличивается при возрастании указанных параметров. В наибольшей степени он проявляется у оболочек с изотропным заполнителем ($\delta = 1/2.6$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00535а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Паймушин В.Н.* Сдвиговая форма потери устойчивости трехслойного кругового кольца при равномерном внешнем давлении // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37. № 2. С. 209–214; Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 1. С. 58–60.
2. *Паймушин В.Н., Иванов В.А., Бобров С.Н., Полякова Т.В.* Устойчивость трехслойного кругового кольца под равномерным внешним давлением // Механика композитных материалов. 2000. Т. 36. № 3. С. 317–328.
3. *Вялков В.Е., Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Изгибная и сдвиговая формы потери устойчивости трехслойной сферической оболочки при действии равномерного внешнего давления // Юбилейный сборник избранных трудов членов Академии наук Республики Татарстан (Отделение математики, механики и машиноведения), Казань: Изд-во “Фолиантъ”, 2002. С. 121–134.
4. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных элементов конструкций. Анализ современного состояния и уточненная классификация форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. 1999. Т. 35. № 6. С. 707–716.
5. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 148–162.
6. *Паймушин В.Н., Шалашилин В.И.* Уточненные уравнения среднего изгиба трехслойных оболочек и сдвиговые формы потери устойчивости // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 2. С. 195–200.
7. *Паймушин В.Н., Бобров С.Н.* Уточненная геометрически нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем средней толщины для исследования смешанных форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. 2000. Т. 36. № 1. С. 95–108.
8. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (нелинейные уравнения докритического равновесия оболочек с трансверсально-мягким заполнителем) // Изв. вузов. Математика. 1995. № 3. С. 29–42.
9. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.

Казань
e-mail: dsm@dsm.kstu-kai.ru

Поступила в редакцию
9.XII.2003