

УДК 539.3 : 537.22

© 2005 г. И. Т. Денисюк

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ПОЛЯ  
ВБЛИЗИ НЕГЛАДКИХ ПОДВИЖНЫХ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА СРЕД**

Устанавливается асимптотическое поведение динамических тепловых, механических и электромагнитных полей вблизи особой линии (множества угловых точек) подвижной границы раздела термоэлектропроводящих сред при внешних динамических термоэлектромеханических воздействиях.

Изучались упругие поля в телах при условиях обобщенной плоской деформации с негладкой движущейся границей раздела краевых условий [1].

Аналитическое исследование термоупругого состояния электропроводных неоднородных трехмерных тел с негладкими границами раздела предполагает построение функций, определяющих соответствующие поля. Класс таких функций определяется их поведением вблизи особенностей граничных поверхностей. Знание асимптотики функций позволяет конструировать решения задач о термоупругом состоянии трехмерных электропроводных тел аналогично тому, как это выполнено для трехмерных полей, описываемых гармоническими функциями в областях с негладкими границами [2].

**1. Постановка задачи.** Пусть  $S = S_1 \cup S_2$  – граница раздела двух термоупругих электропроводящих тел. Пересечение гладких поверхностей  $S_1, S_2$  определяет гладкую особую линию  $L = S_1 \cap S_2$ , являющейся множеством угловых точек. Введем локальные криволинейные ортогональные координаты  $\rho, \theta, s$  согласно соотношению [2]

$$r = r_0 + \rho(\cos\theta\mathbf{n}_2(s) + \sin\theta\mathbf{n}(s)) \tag{1.1}$$

где  $r_0, r$  – радиус-векторы точек  $M_0 \in L$  и  $M$ , точка  $M$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{nn}_2$  сопровождающего трехгранника  $\mathbf{nn}_1\mathbf{n}_2$  в точке  $M_0$ , натянутой на особую линию поверхности  $S_0$ , и определяется в этой плоскости полярным радиусом  $\rho$  и углом  $\theta$ ,  $\mathbf{n}_1$  – касательный вектор к особой линии,  $\mathbf{n}_2$  – к натянутой поверхности,  $s$  – длина дуги особой линии, отсчитываемая от некоторой ее точки.

Рассматриваемые упругие электропроводные тела не обладают самопроизвольной поляризацией и намагнитченностью и подвергнуты действию механической нагрузки, температурного поля и находятся в переменном электромагнитном поле. На поверхности контакта отсутствуют внешние электрические заряды и токи, а материалы тел имеют постоянные характеристики.

Учитывая влияние поля электрического потенциала на процесс деформации, теплопроводности и электропроводности, выберем в качестве определяющих величин вектор перемещений  $\mathbf{u}$ , температуру  $T$  и электрический потенциал  $\Phi$ .

Уравнения равновесия, теплопроводности, сохранения электрических зарядов и уравнения Максвелла должны выполняться во всех точках составного тела, в том числе в точках особой линии [3]. Имеем

$$\lim \left( c_{1j}^2 \text{grad div } \mathbf{u}_j - c_{2j}^2 \text{rot rot } \mathbf{u}_j - a_{4j} \text{grad } T_j - a_{5j} \text{grad } \Phi_j - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial t^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim\left(\Delta T_j - b_{4j} \frac{\partial T_j}{\partial t} - b_{5j} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}_j}{\partial t} + b_{6j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial t}\right) &= 0 \\ \lim\left(\Delta \Phi_j - d_{4j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial t} + d_{5j} \frac{\partial T_j}{\partial t} - d_{6j} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}_j}{\partial t} - d_{7j} \Phi_j + d_{8j} T_j - d_{9j} \operatorname{div} \mathbf{u}_j\right) &= 0 \\ \lim\left(\operatorname{rot} H_j - \varepsilon_j \frac{\partial E_j}{\partial t} - \lambda_j (E_j - \operatorname{grad} \Phi_j)\right) &= 0 \\ \lim\left(\operatorname{rot} E_j + \mu_{0j} \frac{\partial H_j}{\partial t}\right) &= 0, \quad \lim \operatorname{div} H_j = 0 \\ \lim(\varepsilon_{0j} \operatorname{div} E_j - \rho_{0j} C_{0j} (\Phi_j - \gamma_j T_j) - \beta_j K_j \operatorname{div} \mathbf{u}_j) &= 0 \\ c_{1j}^2 &= \frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_{0j}}, \quad c_{2j}^2 = \frac{\mu_j}{\rho_{0j}}, \quad a_{4j} = \frac{\alpha_j K_j}{\rho_{0j}}, \quad a_{5j} = \frac{\beta_j K_j}{\rho_{0j}}, \quad b_{4j} = \frac{\rho_{0j} c_j}{\kappa_j} \\ b_{5j} &= \frac{\alpha_j K_j T_{0j}}{\kappa_j}, \quad b_{6j} = \frac{\rho_{0j} \gamma_j C_{0j} T_{00}}{\kappa_j}, \quad d_{4j} = \frac{\rho_{0j} C_{0j}}{\lambda_j}, \quad d_{5j} = \frac{\rho_{0j} C_{0j} \gamma_j}{\lambda_j} \\ d_{6j} &= \frac{\beta_j K_j}{\lambda_j}, \quad d_{7j} = \frac{\rho_{0j} C_{0j}}{\varepsilon_{0j}}, \quad d_{8j} = \frac{\rho_{0j} C_{0j} \gamma_j}{\varepsilon_{0j}}, \quad d_{9j} = \frac{\beta_j K_j}{\varepsilon_{0j}} \\ \lambda_j &= \frac{\nu_j E_j}{(1 + \nu_j)(1 - 2\nu_j)}, \quad K_j = \frac{3\lambda_j + 2\mu_j}{3} \end{aligned} \tag{1.2}$$

$\mathbf{u}_j$  – вектор перемещений,  $T_j$  – температурное поле,  $\Phi_j$  – электрический потенциал,  $\mathbf{H}_j, \mathbf{F}_j$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей,  $c_j$  – удельная теплоемкость,  $\alpha_j$  – температурный коэффициент объемного расширения,  $\nu_j$  – коэффициент Пуассона,  $\mu_j, E_j$  – модули сдвига и упругости,  $\rho_{0j}$  – плотность материала,  $T_{00} = \text{const}$ ,  $\beta_j$  – электрострикционный коэффициент объемного расширения,  $\kappa_j$  – коэффициент теплопроводности,  $\lambda_j$  – коэффициент электропроводности,  $\gamma_j$  – температурный коэффициент изменения электрического потенциала,  $\varepsilon_{0j}, \mu_{0j}$  – диэлектрическая и магнитная постоянные,  $c_{1j}, c_{2j}$  – скорости волн расширения и сдвига среды,  $C_{0j}$  – удельная электроемкость, значения индекса  $j = 0, 1$  отвечают телам, составляющим неоднородное тело. Пределы берутся при  $M \rightarrow M_0 \in L$

В точках особой линии поверхности раздела сред в рамках рассматриваемой модели примем, что выполняются условия термоэлектромеханического контакта в виде

$$\lim(u_{\rho 0} - u_{\rho 1}) = 0, \quad \lim(u_{\theta 0} - u_{\theta 1}) = 0, \quad \lim(u_{s 0} - u_{s 1}) = 0 \tag{1.3}$$

$$\lim(\sigma_{\theta 0} - \sigma_{\theta 1}) = 0, \quad \lim(\tau_{\rho \theta 0} - \tau_{\rho \theta 1}) = 0, \quad \lim(\tau_{s \theta 0} - \tau_{s \theta 1}) = 0 \tag{1.4}$$

$$\lim(T_0 - T_1) = 0, \quad \lim(q_{\theta 0} - q_{\theta 1}) = 0 \tag{1.4}$$

$$\lim(\Phi_0 - \Phi_1) = 0, \quad \lim(j_{\theta 0} - j_{\theta 1}) = 0 \tag{1.5}$$

$$\lim(E_{\theta 0} - E_{\theta 1}) = 0, \quad \lim(E_{s 0} - E_{s 1}) = 0 \tag{1.6}$$

$$\lim(H_{\theta 0} - H_{\theta 1}) = 0, \quad \lim(H_{s 0} - H_{s 1}) = 0 \tag{1.7}$$

где пределы берутся при  $M \rightarrow M_0$  в плоскости, нормальной к особой линии,  $q_{\theta j}, j_{\theta j}$  – компоненты вектора плотности теплового потока и тока проводимости соответст-

венно,  $\sigma_{\theta j}$ ,  $\tau_{\rho \theta j}$ ,  $\tau_{\theta s j}$  – компоненты тензора напряжений,  $E_{\theta j}$ ,  $H_{s j}$ ,  $H_{\theta j}$ ,  $H_{s j}$  – компоненты векторов напряженности электромагнитного поля.

Пусть поступательное перемещение локального участка поверхности раздела сред как жесткого целого определяется вектором  $r_0(t) = \{x_0(t), y_0(t), z_0(t)\}$  в неподвижной системе координат  $Oxuz$ .

Условия в виде (1.3) позволяют единым способом исследовать некоторые случаи, например взаимовлияние термоэлектромеханических полей вблизи особой линии распространяющейся заполненной ионизированным газом полости ( $\sigma_{\theta 1} = \tau_{\rho \theta 1} = \tau_{\theta s 1} = 0$ ) [4] и взаимодействие термоэлектродупругих полей в контактной задаче жесткого и упругого тела [5].

Найдем в локальной окрестности особой линии распределение компонент тензора напряжений, температурного поля, плотности теплового потока, тока проводимости и компонент векторов напряженности электромагнитного поля, если композиция подвергнута внешним динамическим силовым, тепловым и электромагнитным воздействиям.

Начальные условия не задаются, поскольку, как показано ниже, выполнение равенств (1.2) приводит к установившемуся режиму.

**2. Локальные термоэлектродупругие поля.** Перейдем в уравнениях (1.2) к подвижным координатам  $x_1, y_1, z_1$ , связанными с подвижным участком поверхности раздела формулами

$$x = x_1 + x_0(t), \quad y = y_1 + y_0(t), \quad z = z_1 + z_0(t)$$

Производные по  $t$  в новых координатах имеют вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\mathbf{v}_0, \nabla)(\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_0, \nabla) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \frac{\partial((\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u}_1)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{u}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{v}_0 = \left\{ \frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt} \right\}, \quad |\mathbf{v}_0| < c_{10}, \quad |\mathbf{v}_0| < c_{20}, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(x_1, y_1, z_1, t)$$

Здесь и далее при решении системы (1.2) идентифицирующий индекс  $j$  для упрощения записи опущен.

Смещение точек упругой среды, температурное поле и электрический потенциал в локальной области особой линии, исходя из равенства их нулю в точках особой линии, а также учитывая их вид в стационарном случае [6–8], представляем в степенном классе относительно переменной  $\rho$  локальных координат (1.1)

$$u_{x_1} = \rho^{m_1} A(\rho, \theta, s, t), \quad u_{y_1} = \rho^{m_2} B(\rho, \theta, s, t), \quad u_{z_1} = \rho^{m_5} C(\rho, \theta, s, t) \quad (2.3)$$

$$T = \rho^{m_6} T_3(\rho, \theta, s, t) + \rho^{m_7} T_4(\rho, \theta, s, t) \quad (2.4)$$

$$\Phi = \rho^{m_8} \Phi_3(\rho, \theta, s, t) + \rho^{m_9} \Phi_4(\rho, \theta, s, t) \quad (2.5)$$

где  $m_q = m_q(s, t)$  ( $q = 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9$ ),  $A, B, C, T_3, T_4, \Phi_3, \Phi_4$  – ограниченные и непрерывные функции своих переменных.

Напряженности электромагнитного поля вблизи особой линии также ищем в степенном классе

$$\mathbf{E} = \{E_{21}, E_{22}, E_{23}\}, \quad \mathbf{H} = \{H_{21}, H_{22}, H_{23}\} \tag{2.6}$$

$$E_{2r} = \rho^{m_{1r}-1} E_1(\rho, \theta, s, t), \quad H_{2r} = \rho^{m_{1r}+3} H_1(\rho, \theta, s, t), \quad r = 1, 2, 3$$

где  $m_q = m_q(s, t) \in (0, 1) (q = 11, 12, \dots, 16)$

Представление (2.6) в двумерном случае тела с трещиной совпадает с известным [6].

Записываем уравнения равновесия (1.2) в новых переменных, учитывая соотношения (2.1), (2.2), и переходим к локальным координатам с учетом представлений (2.3)–(2.5).

В результате, приравнявая выражения при одинаковых степенях  $\rho$ , получим систему дифференциальных уравнений, которая совместна при  $m_1 = m_2 = m$  и расщепляется на систему

$$a_0 A + a_1 \frac{dA}{d\theta} + a_2 \frac{d^2 A}{d\theta^2} + b_0 B + b_1 \frac{dB}{d\theta} = 0 \tag{2.7}$$

$$c_0 A + c_3 \frac{dA}{d\theta} + d_0 B + d_1 \frac{dB}{d\theta} + d_2 \frac{d^2 B}{d\theta^2} = 0$$

и уравнение

$$g_2 \frac{d^2 C}{d\theta^2} + g_1 \frac{dC}{d\theta} + g_0 C = 0 \tag{2.8}$$

Здесь

$$a_0 = c_{10}^2 (m^2 - 1) - v_{01}^2 m(m - 1) + v_{02}^2 m(m - 1), \quad a_1 = (2m - 1)v_{01}v_{02}, \quad a_2 = c_{20}^2 - v_{02}^2$$

$$b_0 = v_{01}v_{02}(m - 1), \quad b_1 = c_{10}^2 (m - 1) - c_{20}^2 (m + 1) + 2v_{02}^2$$

$$c_0 = (1 - m - m^2)v_{01}v_{02}, \quad c_3 = c_{10}^2 (m + 1) - c_{20}^2 (m - 1) - v_{02}^2 (m + 2)$$

$$d_0 = c_{20}^2 (m^2 - 1) + v_{02}^2, \quad d_1 = v_{01}v_{02}(1 - m) + c_{10}^2, \quad d_2 = c_{10}^2 - v_{02}^2$$

$$g_0 = c_{20}^2 m^2 - v_{01}^2 m_5(m_5 - 1), \quad g = v_{01}v_{02}(1 - 2m_5), \quad g_2 = c_{20}^2 - v_{02}^2$$

$v_{01}, v_{02}$  – компоненты вектора скорости участка поверхности раздела в координатах  $\rho, \theta, s$ .

Удовлетворяя уравнению теплопроводности (1.2) с помощью представлений (2.3)–(2.5), аналогично предыдущему находим, что  $m_7 = m$  и

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial \theta^2} + m_6^2 T_3 = 0, \quad \frac{\partial^2 T_4}{\partial \theta^2} + m^2 T_4 = -b_5 f_6(\theta) \tag{2.9}$$

где

$$f_6(\alpha) = v_{01}(m^2 - 1)A + v_{01}(m - 1)\frac{\partial B}{\partial \theta} + v_{02}(m + 1)\frac{\partial A}{\partial \theta} + v_{02}\frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}$$

Подставляя в уравнения сохранения электрических зарядов (1.2) представление (2.3)–(2.5), получим, что  $m_9 = m$  и

$$\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial \theta^2} + m_8 \Phi_3 = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial \theta^2} + m^2 \Phi_4 = -d_6 f_6(\theta) \quad (2.10)$$

Из уравнений Максвелла (1.2) при учете представлений (2.3)–(2.5) вытекает, что

$$m_{11} = m_{12} = m_{13} = m_{14} = m_{15} = m_{16} = m_0$$

и при отличной от нуля скорости перемещения границы раздела сред получим

$$E_r = 0, \quad H_r = 0; \quad r = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

Решение системы уравнений (2.7) имеет вид

$$\begin{aligned} A(\theta, s, t) &= 2\text{Re}(C_{01} \exp(\delta_1 \theta) + C_{03} \exp(\delta_3 \theta)) \\ B(\theta, s, t) &= 2\text{Re}(n_1 C_{01} \exp(\delta_1 \theta) + n_3 C_{03} \exp(\delta_3 \theta)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$n_q = b_{30} \delta_q^3 + b_{20} \delta_q^2 + b_{10} \delta_q + b_0$$

$\delta_q = \alpha_q + i\beta_q$  – комплексные несопряженные корни характеристического уравнения

$$\delta^4 + d_{30} \delta^3 + d_{20} \delta^2 + d_{10} \delta + d_{00} = 0, \quad (2.13)$$

где  $b_{30}, b_{20}, b_{10}, b_0, d_{30}, d_{20}, d_{10}, d_{00}$  – величины, определяемые значениями  $v_{01}, v_{02}, c_{10}, c_{20}$ .  
Решение уравнения (2.8) таково:

$$C(\theta, s, t) = \exp(\alpha_5 \theta) (C_{51} \cos \beta_5 \theta + C_{52} \sin \beta_5 \theta)$$

$$\alpha_5 = v_{01} v_{02} \frac{m_5 - 1/2}{c_{20}^2 - v_{01}^2}, \quad \beta_5 = \frac{\sqrt{|D_0|}}{2(c_{20}^2 - v_{01}^2)} \quad (2.14)$$

$$|D_0| = 4(c_{20}^2 - (v_{01}^2 + v_{02}^2))c_{20}^2 m_5^2 + v_{01}^2 (4m_5 c_{20}^2 - v_{01}^2)$$

Из уравнений (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} T_3(\theta, s, t) &= C_{61} \cos m_6 \theta + C_{62} \sin m_6 \theta \\ T_4(\theta, s, t) &= C_{71} \cos m \theta + C_{72} \sin m \theta + 2\text{Re}(h_{71} \exp(\delta_1 \theta) + h_{73} \exp(\delta_3 \theta)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$h_{7k} = C_{01} \frac{g_{7k}}{m^2 + \delta_k^2}$$

$$g_{7k} = -b_5(v_{01}(m^2 - 1) + v_{01}(m - 1)n_k \delta_k + v_{02}(m + 1)\delta_k + v_{02}n_k \delta_k^2); \quad k = 1, 3$$

$C_{61}, C_{62}, C_{71}, C_{72}$  – постоянные.

Представления  $\Phi_3, \Phi_4$  вытекают из уравнений (2.10)

$$\begin{aligned} \Phi_3(\theta, s, t) &= C_{81} \cos m_8 \theta + C_{82} \sin m_8 \theta \\ \Phi_4(\theta, s, t) &= C_{91} \cos m \theta + C_{92} \sin m \theta + 2\text{Re}(h_{91} \exp(\delta_1 \theta) + h_{93} \exp(\delta_3 \theta)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$h_{9k} = C_{0k} \frac{g_{9k}}{m^2 + \delta_k^2}$$

$$g_{9k} = -d_6(v_{01}(m^2 - 1) + v_{01}(m - 1)n_k\delta_k + v_{02}(m + 1)\delta_k + v_{02}n_k\delta_k^2); \quad k = 1, 3$$

Удовлетворяя условиям контакта (1.3) с помощью представлений (2.3)–(2.5) при значениях

$$\theta = \theta_g(s) = \arccos((\text{grad} f_g, \text{grad} f_0) / (|\text{grad} f_g| |\text{grad} f_0|)^{-1}) \quad (2.17)$$

$$(0 \leq \theta_g(s) \leq \pi/2), \quad g = 1, 2$$

(уравнение  $f_q(x, y, z) = 0$  определяет поверхность  $S_q$  ( $q = 0, 1, 2$ )) в точке  $M_0 \in L$ , приходим к системе уравнений

$$A_1 = A_0, \quad B_1 = B_0, \quad g_{01}^{(0)} \frac{\partial B_0}{\partial \theta} + g_{02}^{(0)} A_0 = g_{11}^{(0)} \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + g_{12}^{(0)} A_1 \quad (2.18)$$

$$h_{01}^{(0)} B_0 + h_{02}^{(0)} \frac{\partial A_0}{\partial \theta} = h_{11}^{(0)} B_1 + h_{12}^{(0)} \frac{\partial A_1}{\partial \theta}$$

$$C_1 = C_0, \quad \gamma \frac{\partial C_0}{\partial \theta} = \frac{\partial C_1}{\partial \theta} \quad (2.19)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{\mu_0}{\mu_1}, \quad g_{01}^{(0)} = \frac{1}{2} \gamma \mu_{00}, \quad g_{02}^{(0)} = \gamma \left( 1 + \frac{(m+1)v_0}{1-2v_0} \right), \quad g_{11}^{(0)} = \frac{1}{2} \mu_{01}, \quad g_{12}^{(0)} = 1 + \frac{(m+1)v_1}{1-2v_1}$$

$$h_{01}^{(0)} = \gamma(m-1), \quad h_{02}^{(0)} = \gamma, \quad h_{11}^{(0)} = m-1, \quad h_{12}^{(0)} = 1, \quad \mu_{0j} = 2 \frac{1-v_j}{1-2v_j}$$

Удовлетворяя условиям теплового контакта (1.4) при учете представления (2.4), получим систему уравнений

$$T_{q1} = T_{q0}, \quad \gamma_6 \frac{\partial T_{q0}}{\partial \theta} = \frac{\partial T_{q1}}{\partial \theta}; \quad q = 3, 4; \quad \gamma_6 = \frac{\kappa_0}{\kappa_1} \quad (2.20)$$

Из условий электрического контакта (1.5) при учете представления (2.5) имеем системы уравнений

$$\Phi_{q1} = \Phi_{q0}, \quad \gamma_8 \frac{\partial \Phi_{q0}}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial \theta}, \quad q = 3, 4; \quad \gamma_8 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \quad (2.21)$$

Подставляя представления (2.15) в систему (2.7), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_{01}, C_{03}, C_{11}, C_{13}$ . Приравнивая ее определитель нулю, получим характеристическое уравнение для определения порядка особенности динамических напряжений

$$\det Q = 0 \quad (2.22)$$

$Q = (p_{rq}), r, q = 1, 2, \dots, 8$ ;  $r$ -я строка матрицы  $Q$  такова:

$$(p_{rq})_q = (s_{1r1} \exp(\delta_{11}\theta_p), \quad \bar{s}_{1r1} \exp(\bar{\delta}_{11}\theta_p), \quad s_{1r3} \exp(\delta_{13}\theta_p), \quad \bar{s}_{1r3} \exp(\bar{\delta}_{13}\theta_p),$$

$$s_{0r1} \exp(\delta_{01}\theta_p), \quad \bar{s}_{0r1} \exp(\bar{\delta}_{01}\theta_p), \quad s_{0r3} \exp(\delta_{03}\theta_p), \quad \bar{s}_{0r3} \exp(\bar{\delta}_{03}\theta_p); \quad r = 1, 2, 3, 4$$

$$(s_{j1k}, s_{j2k}, s_{j3k}, s_{j4k})^T = (n_{jk}, 1, g_{jk}, h_{jk})^T, \quad g_{jk} = g_{j1}^{(0)} \delta_{jk} + n_{jk} g_{j2}^{(0)}, \quad h_{jk} = h_{j1}^{(0)} + n_{jk} \delta_{jk} h_{j2}^{(0)}; \\ k = 1, 3$$

$j = 1$  при  $q = 1, 2, 3, 4$ ;  $j = 0$  при  $q = 5, 6, 7, 8$

$s_{jrp} = s_{jrp}$ ,  $p = 1$  при  $r = 1, 2, 3, 4$ ;  $s_{jrp} = s_{jr-4p}$ ,  $p = 2$  при  $r = 5, 6, 7, 8$

$n_{jk}$  – комплексные несопряженные корни уравнения (2.13), записанного для  $j$ -й составляющей; черточка означает, как обычно, комплексно-сопряженную величину.

С помощью полученного решения такой системы с нулевым определителем и представлений (2.3)–(2.5) находим распределение локальных динамических напряжений и перемещений в каждом теле, составляющем неоднородное тело, вблизи особой линии подвижного участка поверхности раздела сред в локальных координатах (1.1)

$$u_p^{(0)} = \sum_{n=1}^l (\rho^{m_n} M_{01n} K_n) + o(\rho^{m^*}), \quad u_\theta^{(0)} = \sum_{n=1}^l (\rho^{m_n} M_{02n} K_n) + o(\rho^{m^*}), \quad m^* = \max m_n$$

$$\sigma_p^{(0)} = 2\mu_0 \sum_{n=1}^l \left( \rho^{m_n-1} \left( (m_n + \nu_0(1 - m_n))(1 - 2\nu_0)^{-1} M_{01n} + \right. \right. \\ \left. \left. + \nu_0(1 - 2\nu_0)^{-1} \frac{\partial M_{02n}}{\partial \theta} \right) K_n \right) + O(1) \tag{2.23}$$

$$\sigma_\theta^{(0)} = 2\mu_0 \sum_{n=1}^l \left( \rho^{m_n-1} \left( (1 - 3\nu_0 + \nu_0 m_n)(1 - 2\nu_0)^{-1} M_{01n} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \nu_0)(1 - 2\nu_0)^{-1} \frac{\partial M_{02n}}{\partial \theta} \right) K_n \right) + O(1)$$

$$\tau_{p\theta}^{(0)} = 2\mu_0 \sum_{n=1}^l \left( \rho^{m_n-1} \left( (m_n - 1) M_{02n} + \frac{\partial M_{01n}}{\partial \theta} \right) K_n \right) + O(1)$$

где

$$M_{01n} = 2\text{Re}(n_{01} P_{0n} \exp(\delta_{01}\theta) + n_{03} S_{0n} \exp(\delta_{03}\theta))$$

$$M_{02n} = 2\text{Re}(P_{0n} \exp(\delta_{01}\theta) + S_{0n} \exp(\delta_{03}\theta))$$

$l$  – число корней  $m_n \in (0, 1)$  сингулярного характеристического уравнения (2.22),  $P_{jn}$ ,  $S_{jn}$  ( $j = 0, 1$ ) – величины, определяемые упругими характеристиками материалов составляющих,  $K_n$  – коэффициенты интенсивности напряжений. Распределение напряжений и смещений другой составляющей составного тела имеет вид, аналогичный распределению (2.23) при учете его упругих постоянных.

Удовлетворяя с помощью (2.14) системе (2.19), аналогично предыдущему находим характеристическое уравнение

$$\left| \sin\left(\frac{1}{2}i\omega^*(\delta_{51} - \delta_{50})\right) \right| = q_5 \left| \sin\left(\frac{1}{2}i\omega^*(\delta_{51} - \bar{\delta}_{50})\right) \right| \tag{2.24}$$

где

$$\omega^* = 2\pi - \omega, \quad \omega = \theta_1 + \theta_2, \quad q_5 = |\gamma\delta_{50} - \delta_{51}| |\gamma\delta_{50} - \overline{\delta_{51}}|^{-1}$$

$\delta_{50}, \delta_{51}$  – величины в представлении (2.14), записанные для обеих составляющих составного тела. Распределение соответствующих смещений и напряжений в одной из составляющих составного тела имеет вид

$$u_s^{(0)} = \sum_{t=1}^{l_5} (\rho^{m_{5t}} M_{3t} K_{3t}) + o(\rho^{m_{50}}), \quad \tau_{ps}^{(0)} = \mu_0 \sum_{t=1}^{l_5} (m_{5t} \rho^{m_{5t}-1} M_{3t} K_{3t}) + O(1) \tag{2.25}$$

$$\tau_{\theta s}^{(0)} = \mu_0 \sum_{t=1}^{l_5} \left( K_{3t} \rho^{m_{5t}-1} \frac{\partial M_{3t}}{\partial \theta} \right) + O(1), \quad M_{3t} = 2\text{Re}(P_{3t} \exp(\delta_{50}\theta))$$

где  $l_5$  – число корней  $m_{5t} \in (0, 1)$  характеристического уравнения (2.24),  $m_{50} = \max m_{5t}$ . Аналогичный вид имеет распределение смещений и напряжений в другой составляющей составного тела при учете ее упругих постоянных. Распределение (2.23) и характеристическое уравнение (2.22) соответствуют плоской динамической задаче, а распределение (2.25) и уравнение (2.24) – динамической задаче продольного сдвига.

Аналогично, удовлетворяя системам (2.20) с помощью представлений (2.15), находим, что

$$m_6 = \pi / (2\pi - \omega) < 1 \tag{2.26}$$

Температурное поле в локальных криволинейных координатах (1.1) на основе полученных решений и представления (2.14) одной из составляющих составного тела имеет вид

$$T_0 = \rho^{m_6} (\gamma_6 - 1)^{-1} (k_{61} \cos m_6(\theta - \theta_1) + k_{62} \sin m_6(\theta - \theta_1)) + \sum_{n=1}^l (\rho^{m_n} (G_{061n} \cos m_n \theta + G_{062n} \sin m_n \theta + F_{06n}(\theta))) + o(\rho^{m_6}) \tag{2.27}$$

где

$$F_{06n}(\theta) = 2\text{Re}(C_{01} \exp(\delta_{01}\theta) (m_n^2 + \delta_{01}^2)^{-1} + C_{02} \exp(\delta_{03}\theta) (m_n^2 + \delta_{03}^2)^{-1})$$

$G_{061n}, G_{062n}$  определяются при решении системы (2.26),  $k_{61}, k_{62}$  – коэффициенты интенсивности плотности теплового потока.

Аналогичный вид имеет распределение температурного поля в другой составляющей композиции при учете ее теплофизических характеристик.

Из систем (2.21) при учете выражений (2.16) находим величину, определяющую порядок сингулярности плотности тока проводимости,

$$m_8 = \pi / (2\pi - \omega) < 1 \tag{2.28}$$

и на основе решения системы алгебраических уравнений – соответствующее распределение электрического потенциала в матрице

$$\Phi_0 = \rho^{m_8} (\gamma_8 - 1)^{-1} (k_{81} \cos m_8(\theta - \theta_1) + k_{81} \sin m_8(\theta - \theta_1)) + \sum_{n=1}^l (\rho^{m_n} (G_{081n} \cos m_n \theta + G_{081n} \sin m_n \theta + F_{06n}(\theta))) + o(\rho^{m_8}) \tag{2.29}$$

Постоянные  $G_{081n}$ ,  $G_{082n}$  находятся при решении системы (2.28),  $k_{81}$ ,  $k_{82}$  – коэффициенты интенсивности плотности тока проводимости.

Аналогичный вид принимает распределение и в другой составляющей неоднородного тела при учете ее электрофизических характеристик.

Таким образом, как локальные напряжения, так и компоненты плотности теплового потока и компоненты плотности тока проводимости в окрестности особой линии имеют сингулярности степенного характера.

Для получения случая распространяющейся полости с особой линией, заполненной, например, ионизированным газом, необходимо в сингулярных характеристических уравнениях (2.22) и (2.24) и распределениях компонент тензора локальных напряжений (2.23) и (2.25) устремить  $\mu_1$  к нулю. В результате получим

$$\left| \sin\left(\frac{1}{2}i\omega^*(\delta_{01} - \delta_{03})\right) \right| = q \left| \sin\left(\frac{1}{2}i\omega^*(\delta_{01} - \bar{\delta}_{03})\right) \right|, \quad \text{Im}\delta_{50} = \pi/(2\pi - \omega) \quad (2.30)$$

где

$$q = |h_{03}g_{01} - h_{01}g_{03}| |\bar{h}_{01}g_{03} - h_{01}\bar{g}_{03}|^{-1}$$

и соответствующее распределение компонент тензора напряжений.

Совершая предельный переход в соотношениях (2.22)–(2.24) при  $\mu_1 \rightarrow \infty$ , что соответствует случаю первого типа граничных условий в контактной задаче для абсолютно жесткого и упругого термоэлектропроводных тел [5], найдем сингулярные характеристические уравнения, совпадающие с уравнениями (2.30), и где необходимо положить  $q = |n_{01} - n_{03}| |n_{01} - \bar{n}_{03}|^{-1}$ , а также соответствующее распределение локальных напряжений.

Порядки сингулярности температурного поля (2.26) и электрического потенциала (2.28) определяются только геометрией поверхности раздела сред.

Устремляя в формулах (2.27) величину  $\kappa_1$  к нулю (бесконечности), получим распределение температурного поля для термоизолированного (абсолютно теплопроводящего) участка поверхности раздела сред. При коэффициенте электропроводности  $\lambda_1 = 0$  или  $\lambda_1 \rightarrow \infty$  из распределения (2.29) получаем распределение электрического потенциала в окрестности диэлектрика или абсолютно проводящего участка поверхности раздела.

**3. Неподвижная граница раздела сред.** Полагая в соотношениях (2.22), (2.24)  $v_{01} = 0$ ,  $v_{02} = 0$ , получим известные характеристические уравнения, определяющие порядок особенности динамических напряжений вблизи неподвижной границы раздела сред [9]. При этом в распределении температурного поля (2.27) и электрического потенциала (2.29) исчезают слагаемые, содержащие особенности напряжений  $1 - m_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ), и они преобразуются в распределения для стационарного случая.

Компоненты вектора напряженности электрического поля, как следует из соотношений (2.6), имеют степенные сингулярности и такое распределение в матрице:

$$E_{0\rho} = \rho^{m_0-1} k_{013} \sin m_0(\theta - \theta_1) + O(1)$$

$$E_{0\theta} = \rho^{m_0-1} k_{013} \cos m_0(\theta - \theta_1) + O(1)$$

$$E_{0s} = O(1), \quad m_0 = \pi/(2\pi - \omega)$$

Компоненты напряженности магнитного поля имеют аналогичный вид.

Отсюда и из граничного условия (1.5), получим связь коэффициента интенсивности плотности тока проводимости и коэффициента интенсивности напряженности электрического поля

$$k_{82} = -(1 - \gamma_8)^2 k_{013} (2m_0 \gamma_8)^{-1} \quad (3.1)$$

В случае неподвижной поверхности раздела сред с особой линией распределение локальных напряжений и смещений, температурного поля и теплового потока, электрического потенциала и плотности тока проводимости оказываются одинаковыми как при динамических, так и при статических нагрузках и стационарных тепловых и электромагнитных воздействиях. В частном случае трещин ( $\mu_1 = 0$ ,  $\omega(s) = 2\pi$ ) и силовых динамических воздействиях этот результат согласуется с известными в литературе [10, 11].

В случае полости характер сингулярности компонент тензора напряжений совпадает с полученными ранее [1], а особенность электрического потенциала согласуется с известными данными [12]. При переходе к случаю двумерной пластинки с трещиной получаем для плотности тока проводимости сингулярность порядка  $1/2$ , что совпадает с известным результатом [3].

Сингулярные составляющие плотности теплового потока и тока проводимости представляют собой сумму двух слагаемых: одно из них, имеющее порядок  $1 - m_0$ , вызвано теплофизическими и электрическими свойствами композиции, второе, имеющее порядок  $1 - m_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ), обусловлено упругими свойствами композита и определяется коэффициентами интенсивности напряжений. Так проявляется эффект связности тепловых, электрических и механических полей вблизи особенностей поверхности подвижного участка границы раздела сред, т. е. локальные деформации вблизи особой линии приводят к возмущениям теплового и электрического поля. В случае неподвижной границы раздела сред такой эффект исчезает, но появляется сингулярность компонент векторов напряженности электромагнитного поля порядка  $1 - m_0$ , а плотность тока проводимости испытывает влияние напряженности электромагнитного поля согласно соотношению (2.31).

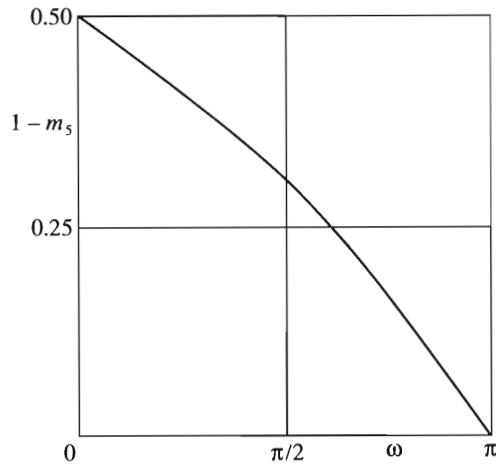
Реализация соотношений (1.2) приводит к системам дифференциальных уравнений (2.7)–(2.10), не содержащих производных по переменной  $t$ , т.е. такая задача разрешима для установившегося режима.

На порядок сингулярности теплового потока, электрического потенциала и напряженности электромагнитного поля влияет величина угла раскрытия поверхности раздела в точках особой линии. Упругие свойства композита, скорость перемещения участка границы раздела сред, как вытекает из сингулярных характеристических уравнений (2.22), (2.24), определяют особенность напряжений и через них влияют на особенность плотности теплового потока и плотности тока проводимости.

Влияние перемещения участка поверхности раздела сред на локальное напряженное состояние проиллюстрируем на примере величины  $1 - m_5$ , определяющей особенность напряжений  $\tau_{ps}$ ,  $\tau_{\theta s}$  вблизи особой линии поверхности распространяющейся полости, заполненной ионизированным газом. Согласно уравнению (2.30), имеем

$$m_5 = \frac{1}{2(1 - (\eta_1^2 + \eta_2^2))} (-\eta_1^2 + (\eta_1^4 + (1 - (\eta_1^2 + \eta_2^2))^{1/2} (\eta_1^2 \eta_2^2 + \frac{4\pi^2}{\omega^{*2}} (1 - \eta_1^2)^2))^{1/2}), \quad \omega^* = 2\pi - \omega \quad (3.2)$$

где  $h_1 = v_{01} c_{20}^{-1}$ ,  $h_2 = v_{02} c_{20}^{-1}$  – относительные величины компонент вектора скорости распространяющейся полости.



Численный анализ формулы (3.2) показывает, что на порядок сингулярности локальных напряжений существенно влияют значения  $\eta_1$  или  $\eta_2$ , принадлежащие интервалу (0,1, 1).

Изменение порядка сингулярности напряжений  $1 - m_5$  в зависимости от угла раскрытия  $\omega$  поверхности распространяющейся полости в точках особой линии показано на фигуре при  $\eta_1^2 = \eta_2^2 = 0.02$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
2. Денисюк И.Т. Задача сопряжения гармонических функций в трехмерных областях с негладкими границами // Изв. вузов. Математика. 2002. № 4. С. 29–35.
3. Бурак Я.Й., Галапац Б.П., Гнідець Б.М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. Київ: Наук. думка, 1978. 230 с.
4. Лыков А.В. Теплообмен. М.: Энергия, 1978. 479 с.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
6. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Механика разрушения при наличии электрических полей // Физ.-хим. механика материалов. 1982. 5. С. 3–15.
7. Денисюк И.Т. Термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 148–155.
8. Ловейкін А.В. Розподіл електростатичного поля на поверхні тригранного кута // Доп. НАН України. 1998. № 9. С. 26–30.
9. Денисюк И.Т. Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 64–70.
10. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
11. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
12. Fichera J. Comportamento asintotico del campo elettrico e della densità elettrica in prossimità dei punti singolari della superficie conduttore // Rend. Sem. Mat. Unit. e Politec. Torino. 1973/74. V. 32. P. 111–143. (1975) = Фикера Г. Асимптотическое поведение электрического поля и плотности зарядов в окрестности сингулярных точек проводящей поверхности // Успехи. мат. наук. 1975. 30. Вып. 3(183). С. 105–124.