УДК: 539.3: 534.1

© 2005 г. Н. С. Бахвалов, М. Э. Эглит

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ, ОПИСЫВАЮЩИХ КОЛЕБАНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Методы, развитые в математической теории осреднения процессов в периодических средах, применяются для вывода двумерных уравнений, описывающих распространение волн в неоднородных анизотропных пластинах периодической структуры. Выводятся уравнения высокого порядка точности по малому параметру – отношению типичной толщины пластины к типичной длине волны. Подробно рассматривается случай однородных изотропных тонких пластин. Проводится анализ и сравнение уравнений разного порядка точности, выведенных в данной работе, с уравнениями, предложенными другими авторами. Предлагаются некоторые поправки для коэффициентов в уравнениях типа Тимошенко, увеличивающие точность этих уравнений.

Цель работы – получение двумерных уравнений высокого порядка точности, описывающих изгибные колебания пластин периодической структуры, в частности слоистых анизотропных, без априорных предположений о структуре перемещений и деформаций в пластине. Решение этой проблемы позволяет обоснованно свести численное решение трехмерных нестационарных задач к численному решению двумерных или одномерных нестационарных задач, что существенно уменьшает объем вычислительной работы.

Приближенные двумерные уравнения различной степени точности для тонких пластин выводились многими авторами (см. обзор работ, посвященных уточненным уравнениям колебаний стержней и пластин [1]). Существующие работы можно условно разбить на две группы. В работах первой группы делаются некоторые априорные предположения о процессе деформирования пластины. При простейших предположениях получаются широко известные классические уравнения Кирхгофа [2], а при учете дополнительных возможных эффектов получаются так называемые уточненные (неклассические) уравнения, в частности уравнения типа Тимошенко [1, 3, 4]. Работы второй группы основаны на предположении, что перемещения могут быть представлены в виде рядов (или с некоторой точностью многочленов) по степеням координаты, перпендикулярной к срединной плоскости пластины. Этот подход был, в частности, использован И.Т. Селезовым [5] для вывода уравнений высокого порядка точности для изгибных колебаний плоских однородных изотропных пластин.

Ниже выводятся двумерные уравнения высокого порядка точности с помощью метода двухмасштабных разложений в форме, используемой в теории осреднения процессов в периодических средах [6–9]. При таком подходе никаких априорных предположений о характере деформирования или о виде зависимости перемещений от нормальной координаты не делается. Вместо этого используется предположение, что перемещения можно представить в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра ε, равного отношению типичной толщины пластины к типичной длине волны. При наложении дополнительных ограничений на данные задачи это предположение можно строго обосновать (см. разд. 11).

На этом пути можно получить двумерные уравнения любой точности по ε, а также распределение перемещений внутри пластины. В случае плоской однородной пластины перемещения, действительно, представляются с любой точностью в виде многочлена по степеням нормальной координаты. Однако в случае неоднородных пластин вектор перемещений может зависеть от пространственных переменных более сложным образом. Предлагаемый подход применим в общем случае неоднородных по толщине и периодических в продольных направлениях пластин.

1. Постановка трехмерной задачи о колебаниях упругой пластины. Бесконечной периодической пластиной назовем некоторое связное множество П пространства R_3 с липшицевой границей $\partial\Pi$, лежащее в полосе $|x_3| \le H_3/2$ и периодическое по переменным x_1, x_2 с периодами H_1, H_2 соответственно. Отсутствие требования односвязности означает возможность наличия в пластине пор. Предполагается также, что плотность $\rho(x_1, x_2, x_3)$ и матрицы упругих модулей $A_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ – измеримые, ограниченные, периодические по переменным x_1, x_2 с периодами H_1, H_2, соответственно. Далее предполагаем, что все величины H_j одного порядка.

Трехмерная система уравнений колебаний пластины П имеет вид

$$Lu = -\rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}\right) = -\mathbf{F} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{F}$ – плотность объемных сил, по повторяющимся индексам производится суммирование в пределах от 1 до 3.

На поверхности пластины задано распределение сил

$$A_{ij}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}n_i\bigg|_{\partial\Pi} = \mathbf{g} \tag{1.2}$$

Здесь n_i – компоненты вектора $\mathbf{n}$ нормали к поверхности пластины.

Пусть $\hat{\rho}$, $\hat{c}$ – средние значения плотности ρ и скорости распространения волн в компонентах, составляющих среду, $\hat{U}$ – типичная величина перемещения, L – типичная длина распространяющейся по пластине волны. Дальнейшие построения проводятся в предположении, что

$$\varepsilon = \frac{H_3}{L} \ll 1$$

Введя безразмерные переменные с помощью соотношений

$$t' = \frac{t\hat{c}}{L}, \quad x'_j = \frac{x_j H_3}{L H_j}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\hat{U}} \tag{1.3}$$

получим систему уравнений и граничные условия, отличающиеся от системы (1.1) с условиями (1.2) заменой величин без штрихов соответствующими величинами со штрихами, определяемыми формулами (1.3) и следующими выражениями:

$$A'_{ij} = \frac{A_{ij}\varepsilon^2 L^2}{\hat{\rho} H_i H_j \hat{c}^2}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\hat{\rho}}, \quad \mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F}L^2}{\hat{\rho}\hat{U}\hat{c}^2}, \quad \mathbf{g}' = \frac{\mathbf{g}L^2\varepsilon}{\hat{\rho}\hat{U}\hat{c}^2\sqrt{n_k^2 H_k^2}}, \quad n'_j = \frac{n_j H_j}{\sqrt{n_k^2 H_k^2}} \tag{1.4}$$

В дальнейшем штрих опускается и для ссылок на постановку задачи используются соотношения (1.1), (1.2). После замены переменных функции ρ, A_{ij} будут периодическими по новым переменным x_1, x_2 с периодом ε, причем пластина находится в полосе $|x_3| \le \varepsilon/2$.

Если функции ρ, A_{ij}, $\mathbf{F}$ не обладают достаточной гладкостью, удовлетворение соотношениям (1.2), (1.2) будем понимать в смысле С.Л. Соболева, а именно имеем в виду, что $\mathbf{u}$ – вектор-функция из H^1_{loc}, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Pi}\left(-\left(\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \left(A_{ij}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) - (\mathbf{F}, \varphi)\right)dx\,dt = \int_{\partial\Pi}(\mathbf{g}, \varphi)ds \tag{1.5}$$

для любой финитной бесконечно-дифференцируемой вектор-функции $\varphi(t, x)$.

Цель дальнейших построений – переход от трехмерной задачи (1.1), (1.2) к двумерным уравнениям колебаний пластин высокого порядка точности по безразмерному параметру ε.

2. Применение процедуры осреднения процессов в периодических средах для вывода двумерных уравнений колебаний пластин. Для получения приближенных двумерных уравнений колебаний пластины высокого порядка точности будет использована формальная процедура метода осреднения процессов в периодических средах [6–8] с явным использованием условия отсутствия сил, приложенных к поверхности пластины [9, 10]:

$$A_{ij}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}n_i\Big|_{\partial\Pi} = 0 \tag{2.1}$$

Для вывода уравнений бесконечного порядка точности по ε в случае граничных условий (2.1) асимптотическое разложение для перемещений $\mathbf{u}$ ищем в виде

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{v} + \sideset{}{'}\sum_{0 < q + l_1 + l_2} \varepsilon^{q + l_1 + l_2} N^q_{l_1 l_2}(y_1, y_2, y_3)\big|_{y_j = x_j/\varepsilon}\frac{\partial^{q + l_1 + l_2}\mathbf{v}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x_1, x_2)$ – гладкая функция медленных переменных t, x_1, x_2 с характерным масштабом изменения порядка единицы, $N^q_{l_1 l_2}(y_1, y_2, y_3)$ – (3×3)-матрицы, периодические, с периодом единица, по быстрым переменным y_1, y_2; $y_j = x_j/\varepsilon$. Характерный масштаб изменения $N^q_{l_1 l_2}$ по переменным x_j порядка ε. Штрих в обозначении суммы здесь и ниже означает, что в суммировании участвуют все целые неотрицательные q, l_1, l_2, принадлежащие указанным под знаком суммы пределам; если такие пределы не указываются, то суммирование производится по всем целым неотрицательным индексам q, l_1, l_2.

Знак ~ в соотношении (2.2) означает, что правая и левая части различаются на величину $O(\varepsilon^n)$ при любом значении n. Ниже этот знак иногда означает близость порядка ε^n при конкретном значении n, ясном из контекста. Далее $N^0_{00} = E$ – единичная матрица (или единичный оператор), $N^q_{l_1 l_2} = 0$, если хотя бы один из индексов отрицателен.

После подстановки ряда (2.2) в систему (1.1) в случае гладких ρ, A_{ij}, $N^q_{l_1 l_2}$ имеем

$$L\mathbf{u} \sim \sideset{}{'}\sum \varepsilon^{q + l_1 + l_2 - 2} N^q_{l_1 l_2}\frac{\partial^{q + l_1 + l_2}\mathbf{v}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}} \sim -\mathbf{F}$$

где

$$H^q_{l_1 l_2} = L_{yy}N^q_{l_1 l_2} + T^q_{l_1 l_2}, \quad L_{yy}N = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(A_{ij}\frac{\partial N}{\partial y_j}\right)$$

$$T^q_{l_1 l_2} = \delta(j)\frac{\partial}{\partial y_i}(A_{ij}N^q_{l_1 - \delta_{j1}, l_2 - \delta_{j2}}) + \delta(i)A_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}N^q_{l_1 - \delta_{i1}, l_2 - \delta_{i2}} + \tag{2.3}$$

$$+ \delta(i)\delta(j)A_{ij}N^q_{l_1 - \delta_{i1} - \delta_{j1}, l_2 - \delta_{i2} - \delta_{j2}} - \rho N^{q-2}_{l_1 l_2}, \quad \delta(i) = 1 - \delta_{i3}$$

После подстановки ряда (2.2) в условие (2.1) имеем

$$A_{ij}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}n_i\bigg|_{\partial\Pi} \sim {\sum}' \varepsilon^{q+l_1+l_2-2}\hat{H}^q_{l_1l_2}\frac{\partial^{q+l_1+l_2}\mathbf{v}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}} \sim 0$$

$$\hat{H}^q_{l_1l_2} = \left(A_{ij}\frac{\partial N^q_{l_1l_2}}{\partial y_j} + \delta(j)A_{ij}N^q_{l_1-\delta_{j1},\, l_2-\delta_{j2}}\right)n_i\bigg|_{\partial\Pi}$$

Из соотношений (2.3) следует, что коэффициент H^0_{00} при ε^{-2} равен нулю. Найдем $N^q_{l_1l_2}$, такие, чтобы коэффициенты H^0_{10}, H^0_{01} при слагаемых порядка ε^{-1} были нулевыми, каждое из выражений $H^q_{l_1l_2}$ равнялось некоторой постоянной матрице $h^q_{l_1l_2}$, т.е.

$$H^q_{l_1l_2} = h^q_{l_1l_2} = \text{const}\ \forall q, l_1, l_2 \tag{2.4}$$

и, кроме того, выполнялись равенства

$$\hat{H}^q_{l_1l_2} = 0\ \forall q, l_1, l_2 \tag{2.5}$$

Обозначим через Ω множество точек $y = (y_1, y_2, y_3)$, удовлетворяющих условиям $(y_1\varepsilon, y_2\varepsilon, y_3\varepsilon) \in \Pi$, через Ω_y – ячейку периодичности, т.е. множество точек y, удовлетворяющих условиям

$$0 < y_1 \le 1, \quad 0 < y_2 \le 1, \quad y \in \Omega$$

Вместо выполнения равенств (2.4), (2.5) можно потребовать выполнения интегрального тождества

$$\int\limits_{\Omega_y}\Bigg(-\left(A_{ij}\frac{\partial [N^q_{l_1l_2}]_m}{\partial y_j} + \delta(i)A_{ij}[N^q_{l_1-\delta_{j1},\, l_2-\delta_{j2}}]_m, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y_i}\right) -$$
$$-\Bigg(\delta(j)A_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}[N^q_{l_1-\delta_{i1},\, l_2-\delta_{i2}}]_m + \delta(i)\delta(j)A_{ij}[N^q_{l_1-\delta_{i1}-\delta_{j1},\, l_2-\delta_{i2}-\delta_{j2}}]_m - \tag{2.6}$$
$$-\rho[N^{q-2}_{l_1l_2}]_m, \boldsymbol{\varphi}\Bigg)\Bigg)dy = \int\limits_{\Omega_y}([h^q_{l_1l_2}]_m, \boldsymbol{\varphi})\Bigg)dy\ \forall m$$

при произвольной вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(y) \in H^1(\Omega)$, периодической, с периодом единица, по переменным y_1, y_2. Здесь $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3$ – обычное скалярное произведение, $[A]_m$ – обозначение m-го столбца (3×3)-матрицы A. В случае негладких, в частности разрывных, ρ и A_{ij} использование интегрального тождества (2.6) связано с существом дела, поскольку тогда решение $\mathbf{u}$ определяется в обобщенном смысле, как удовлетворяющее тождеству (1.5).

Если соотношения (2.4), (2.5) будут выполнены, то получим систему уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\tilde{L}\mathbf{v} \sim {\sum_{q+l_1+l_2\ge 2}}' \varepsilon^{q+l_1+l_2-2}h^q_{l_1l_2}\frac{\partial^{q+l_1+l_2}\mathbf{v}}{\partial^q t\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}} \sim -\mathbf{F} \tag{2.7}$$

которую можно использовать вместо системы (1.1) с условием (2.1). Имеется в виду следующее: если $\mathbf{v}$ – асимптотическое решение системы (2.7), то перемещение $\mathbf{u}$, определяемое соотношением (2.2), удовлетворяет асимптотически соотношениям (1.1), (2.1). Все сказанное выше имеет смысл при бесконечно дифференцируемых $\mathbf{v}(t, x_1, x_2)$ и $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x_1, x_2)$. Случай, когда $\mathbf{F}$ зависит также от $y_j = x_j/\varepsilon$, рассматривается в разд. 10. В разд. 11 обосновываются уравнения конечного порядка точности по ε в предположении конечной гладкости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{F}$ по t, x_1, x_2.

Далее при $Q = Q(t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ используем обозначение

$$\langle Q\rangle = \int\limits_{\Omega_y} Q(t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)dy_1dy_2dy_3$$

где t, x_1, x_2, x_3 фиксированы. Интегрируя равенство (2.4) по периоду с учетом соотношений (2.3) и (2.5), получаем

$$\begin{aligned}\mu h^q_{l_1l_2} &= \langle T^q_{l_1l_2}\rangle = \\ &= \left\langle \delta(i)A_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}N^q_{l_1-\delta_{i1},\, l_2-\delta_{i2}} + \delta(j)N^q_{l_1-\delta_{i1}-\delta_{j1},\, l_2-\delta_{i2}-\delta_{j2}}\right) - \rho N^{q-2}_{l_1l_2}\right\rangle\end{aligned} \tag{2.8}$$

где μ – мера множества Ω_y. Отметим, что при обычных для теории упругости предположениях выполнение равенства $\mu h^q_{l_1l_2} = T^q_{l_1l_2}$ оказывается и достаточным для разрешимости системы (2.4), (2.5) относительно $N^q_{l_1l_2}$.

Построение $N^q_{l_1l_2}$ можно осуществить последовательно, предварительно упорядочив совокупности индексов (q, l_1, l_2), соблюдая порядок возрастания $q + l_1 + l_2$. Матрицы $N^q_{l_1l_2}$ определяются из уравнений (2.4), (2.5) или из интегрального тождества (2.6) неоднозначно, с точностью до слагаемого, равного некоторой постоянной матрице. Будем выбирать это слагаемое всякий раз так, чтобы выполнялось равенство $\langle N^q_{l_1l_2}\rangle = 0$. Тогда из структуры соотношений (2.3), (2.8) видно, что $h^q_{l_1l_2} = 0$ при q нечетном. Кроме того, как следует из построений работы [8], матрицы $h^q_{l_1l_2}$ удовлетворяют соотношению

$$(h^q_{l_1l_2})^T = (-1)^{(l_1+l_2)}h^q_{l_1l_2}$$

Если плоская пластина неоднородна только по толщине, т.е. свойства материала зависят только от одной пространственной переменной $y_3 = x_3/\varepsilon$: $\rho = \rho(y_3)$, $A_{ij} = A_{ij}(y_3)$, то матрицы $N^q_{l_1l_2}$ зависят только от y_3. В этом случае все $N^q_{l_1l_2}$ и $h^q_{l_1l_2}$ вычисляются в квадратурах. Частным случаем такой пластины служит пластина, состоящая из плоских однородных, в общем случае анизотропных слоев. Для таких пластин было проведено [11, 12] исследование коэффициентов $h^q_{l_1l_2}$ в уравнениях (2.7), в которых сохранены лишь члены с производными не выше четвертого порядка. Члены с производными третьего и четвертого порядков представляют собой главные члены, ответственные за дисперсию волн. Изучены типы дисперсии волн в пластинах с различным количеством слоев, обладающих различными типами анизотропии.

3. Уравнения колебаний плоской однородной изотропной пластины. Далее рассматриваем плоскую однородную изотропную пластину, занимающую объем $|x_3| \le H_3/2$. Для размерных компонент $(A_{ij})_{kl}$ матриц A_{ij} имеем формулы

$$(A_{ij})_{kl} = \lambda\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

λ, μ – модули упругости. Положим

$$\hat{\rho} = \rho, \quad \hat{c} = \sqrt{\mu/\rho} \tag{3.1}$$

Поскольку свойства плоской однородной пластины периодичны с любым периодом, можно взять $H_1 = H_2 = H_3 = H$. Формулы (1.4) для безразмерных величин в этом случае принимают вид

$$\begin{gathered} A'_{ij} = \frac{A_{ij}}{\mu}, \quad \rho' = 1, \quad \mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F}L^2}{\mu\hat{U}}, \quad \mathbf{g}' = \frac{\mathbf{g}L}{\mu\hat{U}}, \quad n'_j = n_j \\ (A'_{ij})_{kl} = \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} \end{gathered} \tag{3.2}$$

(ν – коэффициент Пуассона).

Будем изучать изгибные колебания, которые описываются третьей компонентой v_3 вектора $\mathbf{v}$. Далее используем следующие обозначения: D_t – оператор дифференцирования по t, Δ – оператор Лапласа по переменным x_1, x_2. Вычисления показали, что система (2.7) распадается на систему уравнений относительно неизвестных v_1 и v_2 и уравнение относительно v_3, имеющее вид

$$D_t^2 v_3 = \bar{L}v_3 + F_3 + O(\varepsilon^8); \quad \bar{L}v_3 = \sum_{2 \le q+l \le 4}{}' \varepsilon^{2q+2l-2} A_{2l}^{2q} D_t^{2q} \Delta^l v_3 \tag{3.3}$$

где

$$\begin{gathered} A_0^{2q} = 0 \text{ при } q > 1, \quad A_2^2 = \frac{1}{12}, \quad A_4^0 = -\frac{1}{6(1-\nu)} \\ A_2^4 = -\frac{1}{120}, \quad A_4^2 = \frac{\nu^2 - 26\nu + 24}{720(1-\nu)^2}, \quad A_6^0 = \frac{\nu - 6}{180(1-\nu)^2} \\ A_2^6 = \frac{17}{20160}, \quad A_4^4 = \frac{18\nu^3 - 360\nu^2 + 646\nu - 305}{60480(1-\nu)^3} \\ A_6^2 = \frac{-\nu^3 + 57\nu^2 - 374\nu + 304}{30240(1-\nu)^3}, \quad A_8^0 = \frac{-3\nu^2 + 34\nu - 101}{15120(1-\nu)^3} \end{gathered} \tag{3.4}$$

В случае чисто изгибных колебаний, когда $v_1 = v_2 = 0$, третья компонента u_3 вектора перемещений $\mathbf{u}$ связана с v_3 соотношением

$$u_3 \sim v_3 + Sv_3; \quad Sv_3 \sim \sum_{1 \le q+l}{}' \varepsilon^{2(q+l)} n_{2l}^{2q}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right) D_t^{2q} \Delta^l v_3 \tag{3.5}$$

где

$$n_0^2(y) = 0, \quad n_2^0(y) = \frac{\nu(12y^2 - 1)}{24(1-\nu)}, \quad n_0^4(y) = 0$$

$$n_2^2(y) = \frac{240(1-2\nu^2)y^4 + 120(6\nu^2 - 4\nu - 1)y^2 - 54\nu^2 + 40\nu + 7}{11520(1-\nu)^2}$$

$$n_4^0(y) = \frac{240(\nu^2 - 1)y^4 - 120(\nu^2 - 4\nu - 1)y^2 + 7\nu^2 - 40\nu - 7}{5760(1-\nu)^2}$$

Далее при $Q = Q(t, x_1, x_2, x_3)$ используется следующее обозначение среднего значения Q по толщине пластины:

$$\{Q\} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} Q(t, x_1, x_2, x_3)dx_3$$

Если $Q = Q_1(x_3/\varepsilon)Q_2(t, x_1, x_2)$, то $\{Q\} = \langle Q_1\rangle Q_2$. В соотношении (3.5) множители $\dfrac{\partial^{q+l_1+l_2}v_3}{\partial t^q \partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}}$ не зависят от переменных y_3, x_3, а множители $n_{2l}^{2q}(x_3/\varepsilon)$ не зависят от переменных x_1, x_2. Кроме того, $\{n_{2l}^{2q}\} = \langle n_{2l}^{2q}\rangle = 0$ вследствие того, что $\langle N_{l_1 l_2}^q\rangle = 0$ при $q + l_1 + l_2 > 0$. Поэтому

$$\{Sv_3\} \sim 0, \quad V \equiv \{u_3\} \sim v_3 \tag{3.6}$$

Здесь знак ~ означает равенство с точностью $O(\varepsilon^n)$ при любом n, а через V обозначено среднее по толщине значение перемещения u_3.

Заметим, что соотношение (3.6) справедливо для любой плоской неоднородной только по толщине пластины как изотропной, так и анизотропной.

4. Сведение задачи о колебании пластины с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями. Выше была описана процедура получения двумерных уравнений колебаний пластины в случае, когда поверхность пластины свободна от нагрузки; теперь рассмотрим общий случай, когда не обязательно $\mathbf{g} = 0$. Решение исходной задачи является суммой решений следующих задач.

Задача F. Поверхность пластины свободна от нагрузки: выполнено условие (2.1).

Задача G. Массовые силы отсутствуют ($\mathbf{F} = 0$), а на поверхности пластины задано распределение сил согласно условию (1.2).

Для плоской однородной изотропной пластины будут получены уравнения изгибных колебаний для задач F и G относительно значения V, которые будем называть уравнениями FV и GV, а также относительно перемещения срединной плоскости $U = u_3(t, x_1, x_2, 0)$, которые будем называть уравнениями FU и GU.

Рассмотрим случай, когда силы, приложенные к поверхности плоской пластины, направлены по нормали, т.е.

$$A_{3j}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}\bigg|_{x_3 = \pm\varepsilon/2} = g_{\pm}(t, x_1, x_2)\mathbf{e}_3 \tag{4.1}$$

Представим решение в виде суммы решений со значениями $\mathbf{g}_+^1 = -\mathbf{g}_-^1 = g\mathbf{e}_3/2$, где $g = g_+ - g_-$, и со значениями $\mathbf{g}_+^2 = \mathbf{g}_-^2 = (g_+ + g_-)\mathbf{e}_3/2$. Для пластин, обладающих определенной симметрией относительно плоскости $y_3 = 0$, в частности плоских однородных изотропных, во втором решении перемещение u_3 вдоль оси x_3 нечетно относительно плоскости $x_3 = 0$, и поэтому перемещение срединной плоскости пластины вдоль оси

x_3 равно нулю: $u_3(t, x_1, x_2, 0) = 0$. Точно так же равна нулю величина V – среднее по сечению значение u_3. Так как изучаются изгибные колебания, при построении уравнений GV, GU ограничимся рассмотрением решения при условии

$$\mathbf{g}_+ = -\mathbf{g}_- = g\mathbf{e}_3/2 \tag{4.2}$$

Построение специального частного решения задачи с неоднородными граничными условиями. Для сведения задачи с неоднородными граничными условиями к рассмотренной задаче с однородными граничными условиями достаточно при заданной вектор-функции $\mathbf{g}$ построить вектор-функцию $\bar{\mathbf{U}}$, удовлетворяющую соотношениям

$$L\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{f}(t, x_1, x_2), \quad A_{ij}\frac{\partial\bar{\mathbf{U}}}{\partial x_j}\bigg|_{\partial\Pi} = \mathbf{g} \tag{4.3}$$

с некоторой пока не известной вектор-функцией $\mathbf{f}(t, x_1, x_2)$. В случае плоской пластины, неоднородной только по толщине, эта задача имеет следующий конкретный вид: при заданных $\mathbf{g}_\pm(t, x_1, x_2)$ ищется вектор-функция $\bar{\mathbf{U}}(t, x_1, x_2, x_3/\varepsilon)$, удовлетворяющая соотношениям

$$L\bar{\mathbf{U}} = -\rho\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)D_t^2\bar{\mathbf{U}} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\bar{\mathbf{U}}}{\partial x_j}\right) = \mathbf{f}(t, x_1, x_2) \tag{4.4}$$

$$A_{3j}\frac{\partial\bar{\mathbf{U}}}{\partial x_j}\bigg|_{x_3 = \pm\varepsilon/2} = \mathbf{g}_\pm(t, x_1, x_2) \tag{4.5}$$

Уравнение (4.4) равносильно уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)D_t^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_i}\left(A_{ij}\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\bar{\mathbf{U}}}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{4.6}$$

Сделаем замену независимой переменной $x_3 = \varepsilon y$ в уравнении (4.6) и граничных условиях (4.5), и будем искать решение в виде ряда

$$\bar{\mathbf{U}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{U}^n(t, x_1, x_2, y)\varepsilon^n$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в получившихся уравнениях, получим систему уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A_{33}\frac{\partial\mathbf{U}^n}{\partial y}\right) + \sum_{l=1,2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A_{3l}\frac{\partial\mathbf{U}^{n-1}}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y\partial x_l}\left(A_{l3}\frac{\partial\mathbf{U}^{n-1}}{\partial y}\right)\right) +$$

$$+\sum_{k,l=1,2}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x_k}\left(A_{kl}\frac{\partial\mathbf{U}^{n-2}}{\partial x_l}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial^2\mathbf{U}^{n-2}}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{4.7}$$

и граничных условий

$$\left(A_{33}\frac{\partial\mathbf{U}^n}{\partial y} + A_{31}\frac{\partial\mathbf{U}^{n-1}}{\partial x_1} + A_{32}\frac{\partial\mathbf{U}^{n-1}}{\partial x_2}\right)\bigg|_{y=\pm1/2} = \delta_{n1}\mathbf{g}_\pm$$

Здесь $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^0 = 0$. Уравнения (4.7) – обыкновенные дифференциальные уравнения по переменной y относительно $\mathbf{U}^n$; переменные t, x входят в них как параметры. Последовательно, начиная с $n = 1$, можно найти в квадратурах вектор-функции $\mathbf{U}^n(y)$. Они определяются с точностью до постоянного слагаемого; будем его всякий раз выбирать так, чтобы выполнялось соотношение $\langle \mathbf{U}^n \rangle = 0$. После нахождения $\mathbf{U}^n$, пользуясь формулой (4.4), находим $\mathbf{f} \sim L\overline{\mathbf{U}}$. Аналогичный алгоритм построения требуемого частного решения $\overline{\mathbf{U}}$ может быть предложен и в общем случае (4.3); однако тогда функции $\mathbf{U}^n$, как правило, не обязательно находятся в квадратурах. В случае плоской однородной изотропной пластины при граничных условиях (4.2) значения компонент $\overline{U}_i$, f_i векторов $\overline{\mathbf{U}}$ и $\mathbf{f}$ были вычислены с высокой степенью точности. При этом

$$\overline{U}_1\big|_{y=0} \equiv 0, \quad \overline{U}_2\big|_{y=0} \equiv 0, \quad f_1 \equiv 0, \quad f_2 \equiv 0$$

Ниже приведены выражения для f_3 и $\overline{U}_3\big|_{y=0}$ с погрешностью $O(\varepsilon^5)$

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{g}{\varepsilon} + \varepsilon\frac{\nu\Delta g}{12(1-\nu)} + \varepsilon^3\frac{(12\nu^2 - 10\nu - 1)D_t^2 - 2(\nu^2 - 10\nu - 1)\Delta}{1440(1-\nu)^2}\Delta g \\ \overline{U}_3\big|_{y=0} &= \varepsilon\frac{(2\nu-1)g}{48(1-\nu)} + \varepsilon^3\frac{7(4\nu^2 - 4\nu + 1)D_t^2 + 4(13\nu^2 + 7\nu)\Delta}{23040(1-\nu)^2}g \end{aligned} \tag{4.8}$$

В случае разрывных ρ, A_{ij} вместо дифференциальных уравнений рассматриваются соответствующие интегральные соотношения вида (1.5).

Сведение задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями. Пусть уравнение FV получено и имеет вид

$$D_t^2 V \sim \hat{L}V + \hat{P}F_3 \tag{4.9}$$

с некоторыми дифференциальными операторами $\hat{L}$, $\hat{P}$. Покажем, как из уравнения (4.9) получить уравнения, соответствующие другим выше сформулированным задачам.

Уравнение GV. Пусть $\mathbf{u}$ – решение задачи G с $\mathbf{F} = 0$ и неоднородным граничным условием (4.1). Разность $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \overline{\mathbf{U}}$ удовлетворяет уравнению $L\mathbf{w} \sim -\mathbf{f}$ с $\mathbf{f} \sim L\overline{\mathbf{U}}$ и однородному граничному условию. Поэтому $V' \equiv \{w_3\}$ удовлетворяет уравнению (4.9) с $F_3 = f_3$. Равенства (3.5), (3.6) принимают вид

$$w_3 = u_3 - \overline{U}_3 \sim v_3' + Sv_3', \quad V' \equiv \{w_3\} \sim v_3' \tag{4.10}$$

Далее

$$V \equiv \{u_3\} = \{\overline{U}_3 + w_3\} = V' \tag{4.11}$$

поскольку $\{\overline{U}_3\} = 0$. Таким образом, получается следующее уравнение для V:

$$D_t^2 V \sim \hat{L}V + \hat{P}f_3 \tag{4.12}$$

Уравнение FU. Согласно соотношениям (3.5), (3.6) имеем

$$U \sim V + S_0 V, \quad S_0 V \sim \sum_{0<q+l}{}' \varepsilon^{2(q+l)} n_{2l}^{2q}(0) D_t^{2q} \Delta^l V \tag{4.13}$$

Применяя к уравнению (4.9) оператор $E + S_0$, получим уравнение

$$D_t^2 U \sim \hat{L} U + \hat{P}(E + S_0) F_3 \tag{4.14}$$

Уравнение GU. Положим $U_0(t, x_1, x_2) = \overline{U}_3(t, x_1, x_2, 0)$, а в первом из соотношений (4.10) $y_3 = 0$; с учетом второго из соотношений (4.10) и равенства (4.11) получим

$$U - U_0 \sim (E + S_0) V$$

Применим к уравнению (4.12) оператор $E + S_0$:

$$D_t^2 (E + S_0) V \sim \hat{L}(E + S_0) V + (E + S_0) \hat{P} f_3$$

Складывая это равенство с тождеством

$$D_t^2 U_0 = \hat{L} U_0 + (D_t^2 U_0 - \hat{L} U_0)$$

получаем уравнение

$$D_t^2 U \sim \hat{L} U + D_t^2 U_0 - \hat{L} U_0 + (E + S_0) \hat{P} f_3 \tag{4.15}$$

5. Уравнения точности $O(\varepsilon^3)$ и $O(\varepsilon^4)$. Далее под уравнениями точности $O(\varepsilon^n)$ понимаются уравнения, в которых отброшенные члены имеют порядок ε^n. При этом предполагается, что **F** и **g** порядка единицы. В действительности, в различных ситуациях **F** и **g** могут быть малыми различного порядка. Например, в типичных случаях **g** порядка ε. Тогда точность приведенных ниже уравнений, содержащих **g**, на единицу больше, чем указано в тексте.

Рассмотрим уравнения точности $O(\varepsilon^3)$ и $O(\varepsilon^4)$. Уравнение (3.3) с учетом формул (3.4) можно записать в виде

$$D_t^2 V = \varepsilon^2 \left(\frac{1}{12} D_t^2 \Delta - \frac{1}{6(1 - \nu)} \Delta^2 \right) V + F_3 + O(\varepsilon^4) \tag{5.1}$$

Проведем эквивалентные преобразования уравнения (5.1) с тем чтобы исключить смешанную производную от V по t, x. Дифференцируя уравнение (5.1), получаем

$$D_t^2 \Delta V = \Delta F_3 = O(\varepsilon^2)$$

Подставляя это выражение для $D_t^2 \Delta V$ в уравнение (5.1), получаем следующее уравнение вида FV точности $O(\varepsilon^4)$

$$D_t^2 V \sim -\varepsilon^2 \frac{1}{6(1 - \nu)} \Delta^2 V + F_3 + \varepsilon^2 \frac{1}{12} \Delta F_3 \tag{5.2}$$

Из уравнения (5.2), рассуждая так, как при выводе уравнений (4.12), (4.14), (4.15), и используя формулы (4.8), получаем уравнения вида GV точности $O(\varepsilon^3)$

$$D_t^2 V = \varepsilon^2 \frac{-1}{6(1 - \nu)} \Delta^2 V + \frac{1}{\varepsilon} g + \varepsilon \frac{1}{12(1 - \nu)} \Delta g$$

вида FU точности $O(\varepsilon^4)$

$$D_t^2 U = \varepsilon^2 \frac{-1}{6(1 - \nu)} \Delta^2 U + F_3 + \varepsilon^2 \frac{2 - 3\nu}{24(1 - \nu)} \Delta F_3$$

вида GU точности $O(\varepsilon^3)$

$$D_t^2 U = \varepsilon^2 \frac{-1}{6(1-\nu)}\Delta^2 U + \frac{1}{\varepsilon} g + \varepsilon \frac{(2\nu - 1)D_t^2 + 2(2-\nu)\Delta}{48(1-\nu)} g \tag{5.3}$$

Напомним, что это уравнение записано в безразмерных переменных. В размерных переменных оно принимает вид

$$\rho D_t^2 U = -\frac{H^2 E}{12(1-\nu^2)}\Delta^2 U + \frac{1}{H} g + H \frac{2(1+\nu)(2\nu-1)\rho D_t^2 + 2(2-\nu)E\Delta}{48(1-\nu)E} g$$

Здесь E – модуль Юнга. Это уравнение отличается от классического уравнения Кирхгофа [2] тем, что содержит дополнительное слагаемое, содержащее производные от g.

При $\mathbf{F} \neq 0$ и $\mathbf{g} \neq 0$ нужные уравнения получаются суммированием приведенных выше уравнений.

6. Уравнения точности $O(\varepsilon^5)$ и $O(\varepsilon^6)$. Прежде чем получать из уравнения (3.3) аналогичные уравнения точности $O(\varepsilon^5)$ и $O(\varepsilon^6)$, рассмотрим известные уравнения точности $O(\varepsilon^5)$.

Уравнения И.Т. Селезова. Для задачи G были получены [5] уравнения поперечных колебаний плоской однородной изотропной пластины точности $O(\varepsilon^5)$ относительно величины U в следующем виде:

$$\begin{aligned} D_t^2 U &= \varepsilon^2 (a_0^4 D_t^4 + a_2^2 D_t^2 \Delta + a_4^0 \Delta^2) U + \\ &+ \varepsilon^4 (a_0^6 D_t^6 + a_2^4 D_t^4 \Delta + a_4^2 D_t^2 \Delta^2 + a_6^0 \Delta^3) U + G \end{aligned} \tag{6.1}$$

где

$$\begin{aligned} a_0^4 &= \frac{8\nu - 7}{48(1-\nu)}, \quad a_2^2 = \frac{2-\nu}{6(1-\nu)}, \quad a_4^0 = -20 a_6^0 = \frac{-1}{6(1-\nu)} \\ a_0^6 &= \frac{-64\nu^2 + 104\nu - 41}{7680(1-\nu)^2}, \quad a_2^4 = \frac{16\nu^2 - 37\nu + 19}{960(1-\nu)^2}, \quad a_4^2 = \frac{-4\nu^2 + 16\nu - 11}{480(1-\nu)^2} \end{aligned} \tag{6.2}$$

G – величина, определяемая внешними силами, приложенными к поверхности пластины:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\varepsilon} g + \varepsilon \frac{(1-\nu)D_t^2 + (\nu-2)\Delta}{8(1-\nu)} g + \\ &+ \varepsilon^3 \frac{2(1-\nu)^2 D_t^4 - (4\nu^2 - 12\nu + 7) D_t^2 \Delta + 2(\nu^2 - 4\nu + 3)\Delta^2}{768(1-\nu)^2} g \end{aligned} \tag{6.3}$$

Покажем, что уравнение (6.1) с точностью до членов $O(\varepsilon^5)$ может быть преобразовано к следующему виду, не содержащему дифференцирования U выше второго порядка по времени и выше четвертого порядка по координатам:

$$D_t^2 U = \hat{L} U + \hat{P} g \tag{6.4}$$

Операторы $\hat{L}$, $\hat{P}$ определены формулами

$$\hat{L} = \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{6(1-\nu)}\Delta^2 + \frac{17 - 7\nu}{60(1-\nu)} D_t^2 \Delta \right) \tag{6.5}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\frac{5(2\nu-1)D_t^2 + 6(3\nu-8)\Delta}{240(1-\nu)} +$$
$$+\varepsilon^3\frac{7(2\nu-1)^2D_t^4 + 2(28\nu^2+2\nu-29)D_t^2\Delta - 4(21\nu^2+64\nu-78)\Delta^2}{23040(1-\nu)^2}$$

Такой вид может оказаться более предпочтительным, поскольку в этом случае для корректной постановки краевой задачи не требуется дополнительных начальных и краевых условий.

Проведем следующие преобразования. Применим к уравнению (6.1) оператор $E + \varepsilon^2\left(a_0^4D_t^2 - \frac{a_6^0}{a_4^0}\Delta\right)$ и прибавим результат к уравнению (6.1); получим

$$D_t^2U = \varepsilon^2\left(\left(a_2^2 + \frac{a_6^0}{a_4^0}\right)D_t^2\Delta + a_4^0\Delta^2\right)U + \varepsilon^4\left((a_0^6 + (a_0^4)^2)D_t^6 +\right.$$
$$+\left(a_2^4 + a_0^4a_2^2 - \frac{a_6^0a_4^0}{a_4^0}\right)D_t^4\Delta + \left.\left(a_4^2 + a_0^4a_4^0 - \frac{a_6^0a_4^0}{a_4^0}\right)D_t^2\Delta^2\right)U +$$
$$+G + \varepsilon^2\left(a_0^4D_t^2 - \frac{a_6^0}{a_4^0}\Delta\right)G + O(\varepsilon^5) \tag{6.6}$$

Далее, применяя к уравнению (6.1) операторы $\varepsilon^4D_t^4$, $\varepsilon^4D_t^2\Delta$, $\varepsilon^4\Delta^2$, получим соотношения

$$\varepsilon^4D_t^{6-2k}\Delta^kU = \varepsilon^4D_t^{4-2k}\Delta^kG + O(\varepsilon^6), \quad k = 0, 1, 2$$

с помощью которых можно избавиться от членов с производными шестого порядка от U в уравнении (6.6). В итоге, с учетом формул (6.2), (6.3), получим уравнение (6.4).

Уравнения точности $O(\varepsilon^5)$ и $O(\varepsilon^6)$, получаемые методом двухмасштабных асимптотических разложений. Из уравнения (3.3) имеем уравнение

$$D_t^2V = \varepsilon^2(A_2^2D_t^2\Delta + A_4^0\Delta^2)V +$$
$$+\varepsilon^4(A_2^4D_t^4\Delta + A_4^2D_t^2\Delta^2 + A_6^0\Delta^3)V + F_3 + O(\varepsilon^6)$$

по форме совпадающее с уравнением (6.1). С помощью преобразований, примененных для вывода уравнения (6.4), и с использованием выражений (3.4) для A_l^q получим следующее уравнение вида FV точности $O(\varepsilon^6)$ (всюду в этом разделе $\hat{L}$ – оператор, определенный формулой (6.5)):

$$D_t^2V = \hat{L}V + \hat{P}F_3 \tag{6.7}$$

где

$$\hat{P} = 1 + \varepsilon^2\frac{(\nu-6)\Delta}{30(1-\nu)} - \varepsilon^4\frac{6(1-\nu)^2D_t^2 + (\nu^2+12\nu-12)\Delta}{720(1-\nu)^2}\Delta \tag{6.8}$$

Отметим, что разность δ правых частей уравнений (6.7) и (5.2) – величина порядка ε^4. Действительно,

$$\delta = \varepsilon^2\frac{17-7\nu}{60(1-\nu)}\Delta(D_t^2V-F_3)+\varepsilon^4\frac{6(1-\nu)^2D_t^2-(\nu^2+12\nu-12)\Delta}{720(1-\nu)^2}\Delta F_3$$

Вследствие любого из уравнений (5.1), (5.2) имеем $D_t^2V-F_3=O(\varepsilon^2)$, поэтому $\delta = O(\varepsilon^4)$.

После преобразований, аналогичных проведенным в разд. 4, получим уравнение вида GV точности $O(\varepsilon^5)$

$$D_t^2V = \hat{L}V+\hat{P}g$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\frac{7\nu-12}{60(1-\nu)}\Delta+\varepsilon^3\frac{(14\nu-13)(D_t^2-2\Delta)}{1440(1-\nu)^2}\Delta$$

уравнение вида FU точности $O(\varepsilon^6)$

$$D_t^2U = \hat{L}U+\hat{P}F_3$$

$$\hat{P} = 1-\varepsilon^2\frac{\nu+24}{120(1-\nu)}\Delta-\varepsilon^4\frac{(150\nu^2-232\nu+89)D_t^2+2(9\nu^2+88\nu-89)\Delta}{11520(1-\nu)^2}\Delta$$

и уравнение вида GU точности $O(\varepsilon^5)$, совпадающее с уравнением (6.4), которое, как было показано выше, эквивалентно уравнению И.Т. Селезова с точностью до членов $O(\varepsilon^5)$.

Из соотношения (4.13) получаем соотношение вида

$$V\sim{\sum}'\varepsilon^{2(q+l)}b_{2l}^{2q}D_t^{2q}\Delta^lU$$

Затем, подставляя вектор $\mathbf{v}=(0, 0, V)$ в (3.5), получаем выражения компонент вектора $\mathbf{u}$ через U

$$u_i\sim-\varepsilon y\frac{\partial U}{\partial x_i}+\varepsilon^3y\frac{(4y^2-3)(\nu-1)D_t^2+2(2(2-\nu)y^2-3)\Delta}{24(1-\nu)}\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad i = 1,2$$

$$u_3\sim U+\varepsilon^2y^2\frac{\nu}{2(1-\nu)}\Delta U+$$
$$+\varepsilon^4y^2\frac{2y^2((1-2\nu^2)D_t^2-2(1-\nu^2)\Delta)+(6\nu^2-4\nu-1)D_t^2+2(4\nu+1)\Delta}{96(1-\nu)^2}\Delta U$$

Эти разложения наряду с известными [1] слагаемыми порядка 1, ε, ε^2 содержат слагаемые более высокого порядка по ε.

Отметим, что при выводе уравнений колебаний пластин получились существенно различные, хотя и асимптотически эквивалентные виды уравнений. Например, в случае свободных колебаний уравнения (3.3), (6.1), (6.4) имеют одну и ту же точность – $O(\varepsilon^6)$. В то же время можно проверить, что для задачи о распространении плоских волн уравнению (3.3) соответствует четыре характеристики, уравнению (6.1) – шесть, уравнению (6.4) – две. Выбор той или иной формы уравнений зависит от конкретной задачи и целей исследования.

7. Уравнения точности $O(\varepsilon^8)$. Преобразуем уравнение (3.3) к другой форме, в которой сохранены производные четвертого порядка по времени, но исключены производные более высокого порядка, т. е. к форме уравнений Тимошенко [1]. Перенесем в уравнении (3.3) $D_t^2 v_3$ в правую часть и применим к получившемуся уравнению операторы $\varepsilon^2\Delta$, $\varepsilon^2 D_t^2$, $\varepsilon^4\Delta^2$, $\varepsilon^4 D_t^2\Delta$. С учетом того, что $v_3 \sim V$, отбрасывая члены $O(\varepsilon^8)$, имеем соответственно

$$0 = -\varepsilon^2 D_t^2\Delta V + \varepsilon^4(A_2^2 D_t^2\Delta^2 + A_4^0\Delta^3)V + \\ + \varepsilon^6(A_2^4 D_t^4\Delta^2 + A_4^2 D_t^2\Delta^3 + A_6^0\Delta^4)V + \varepsilon^2\Delta F_3 \tag{7.1}$$

$$0 = -\varepsilon^2 D_t^4 V + \varepsilon^4(A_2^2 D_t^6\Delta + A_4^0 D_t^2\Delta^2)V + \\ + \varepsilon^6(A_2^4 D_t^6\Delta + A_4^2 D_t^4\Delta^2 + A_6^0 D_t^2\Delta^3)V + \varepsilon^2 D_t^2 F_3 \tag{7.2}$$

$$0 = -\varepsilon^4 D_t^2\Delta^2 V + \varepsilon^6(A_2^2 D_t^2\Delta^3 + A_4^0\Delta^4)V + \varepsilon^4\Delta^2 F_3 \tag{7.3}$$

$$0 = -\varepsilon^4 D_t^4\Delta V + \varepsilon^6(A_2^2 D_t^4\Delta^2 + A_4^0 D_t^2\Delta^3)V + \varepsilon^4 D_t^2\Delta F_3 \tag{7.4}$$

Домножим соотношения (7.1), (7.2), (7.3), (7.4) соответственно на неизвестные множители V_2^0, V_0^2, V_4^0, V_2^2 и сложим с соотношением (3.3); получим равенство

$$D_t^2 V = \varepsilon^2(Q_0^4 D_t^4 + Q_2^2 D_t^2\Delta + Q_4^0\Delta^2)V + \varepsilon^4(Q_2^4 D_t^4\Delta + Q_4^2 D_t^2\Delta^2 + Q_6^0\Delta^3)V + \\ + \varepsilon^6(Q_2^6 D_t^6\Delta + Q_4^4 D_t^6\Delta^2 + Q_6^2 D_t^2\Delta^3 + Q_8^0\Delta^4)V + f_8 \tag{7.5}$$

где

$$\begin{aligned} &Q_0^4 = -V_0^2, \quad Q_2^2 = A_2^2 - V_2^0, \quad Q_4^0 = A_4^0, \quad Q_2^4 = A_2^4 + V_0^2 A_2^2 - V_2^2 \\ &Q_4^2 = A_4^2 + V_2^0 A_2^2 + V_0^2 A_4^0 - V_4^0, \quad Q_6^0 = A_6^0 + V_2^0 A_4^0 \\ &Q_2^6 = A_2^6 + V_0^2 A_2^4, \quad Q_4^4 = A_4^4 + V_2^0 A_2^4 + V_0^2 A_4^2 + V_2^2 A_2^2 \\ &Q_6^2 = A_6^2 + V_2^0 A_4^2 + V_0^2 A_6^0 + V_4^0 A_2^2 + V_2^2 A_4^0, \quad Q_8^0 = A_8^0 + V_4^0 A_4^0 + V_2^0 A_6^0 \\ &f_8 = F_3 + \varepsilon^2(V_0^2 D_t^2 + V_2^0\Delta)F_3 + \varepsilon^4(V_2^2 D_t^2\Delta + V_4^0\Delta^2)F_3 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Из уравнения (5.1) следует, что

$$D_t^{2k+2}\Delta^l V = D_t^{2k}\Delta^l F_3 + O(\varepsilon^2)\ \forall k, l$$

Поэтому уравнение (7.5) с точностью $O(\varepsilon^8)$ может быть записано в виде

$$D_t^2 V = \varepsilon^2(Q_2^2 D_t^2\Delta + Q_0^4 D_t^4 + Q_4^0\Delta^2)V + \\ + \varepsilon^4(Q_2^4 D_t^4\Delta + Q_4^2 D_t^2\Delta^2 + Q_6^0\Delta^3)V + \varepsilon^6 Q_8^0\Delta^4 V + \hat{P}F_3 \tag{7.7}$$

Здесь

$$\hat{P}F_3 = f_8 + \varepsilon^6(Q_2^6 D_t^4\Delta + Q_4^4 D_t^2\Delta^2 + Q_6^2\Delta^3)F_3$$

ний свободных колебаний точности $O(\varepsilon^8)$ и уравнений вынужденных колебаний под действием сил, приложенных к поверхности пластины, точности $O(\varepsilon^3)$. В то же время уравнения (7.8) с коэффициентами (8.1) при $K = 5/6$ имеют точность $O(\varepsilon^2)$ в случае свободных колебаний и точность $O(\varepsilon)$ в случае вынужденных колебаний.

9. Исследование корректности уравнений изгибных колебаний. Для исследования корректности уравнений изгибных колебаний (5.3) точности $O(\varepsilon^4)$, (6.4) точности $O(\varepsilon^6)$, (7.7) при Q_{2l}^{2k}, определяемых (7.12), точности $O(\varepsilon^8)$ и (7.11) точности $O(\varepsilon^8)$ достаточно изучить случай свободных колебаний ($\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{g} = 0$). Рассмотрим первые три из этих уравнений

$$\begin{aligned} &1)\ D_t^2U = \varepsilon^2Q_4^0\Delta^2U, \quad 2)\ D_t^2U = \varepsilon^2Q_2^2D_t^2\Delta U + \varepsilon^2Q_4^0\Delta^2U, \\ &3)\ D_t^2U = \varepsilon^2Q_2^2D_t^2\Delta U + \varepsilon^2Q_4^0\Delta^2U + \varepsilon^4Q_4^2D_t^2\Delta^2U \end{aligned} \tag{9.1}$$

Q_4^0, Q_2^2 и Q_4^2 определяются формулами (7.10) и (7.12). Заметим, что при $0 \le \nu \le 0.5$ выполнены неравенства

$$Q_4^0 < 0, \quad Q_2^2 > 0, \quad Q_4^2 > 0 \tag{9.2}$$

Поскольку производные по переменным x_1 и x_2 входят в эти уравнения только в составе оператора Лапласа, для исследования вопроса о корректности задачи Коши достаточно рассмотреть частные решения вида $U = e^{\sigma t - ikx_1}$. Подставляя такие частные решения в соответствующие уравнения (9.1), получим равенства

$$\begin{aligned} &1)\ \sigma^2 = Q_4^0\varepsilon^2k^4, \quad 2)\ \sigma^2(1 + Q_2^2(\varepsilon k)^2) = Q_4^0\varepsilon^2k^4, \\ &3)\ \sigma^2(1 + Q_2^2(\varepsilon k)^2 - Q_4^2(\varepsilon k)^4) = Q_4^0\varepsilon^2k^4 \end{aligned}$$

Из неравенств (9.2) следует, что при $k \ge 0$ в первых двух случаях $\sigma^2 \le 0$ и, следовательно, σ – чисто мнимая величина, т.е. выполнено условие корректности. В третьем случае $\sigma^2 \to \infty$, если εk стремится к корню уравнения $1 + Q_2^2(\varepsilon k)^2 - Q_4^2(\varepsilon k)^4 = 0$ и следовательно, задача Коши некорректна.

Рассмотрим уравнение (7.11) в случае свободных колебаний. Оно имеет вид

$$D_t^2U = \varepsilon^2(Q_0^4D_t^4 + Q_2^2D_t^2\Delta + Q_4^0\Delta^2)U$$

Коэффициенты Q_0^0, Q_2^2 и Q_4^0 определяются формулами (7.10). При $0 \le \nu \le 0.5$ имеем

$$Q_0^4 < 0, \quad Q_2^2 > 0, \quad Q_4^0 < 0$$

Уравнение $Q_0^4\sigma^4 - (1 + Q_2^2(\varepsilon k)^2)\sigma^2 + Q_4^0\varepsilon^2k^4 = 0$ относительно σ при всех вещественных k имеет четыре чисто мнимых корня, и поэтому соответствующая задача Коши удовлетворяет необходимому условию корректности.

10. Преобразование уравнений к виду, где правая часть не зависит от быстрых переменных. Описанная в разд. 2 процедура построения уравнений (2.7) для задачи колебаний периодических пластин непосредственно применима при условии независимости правой части $\mathbf{F}$ от быстрых переменных y. За исключением случая однородной пластины, правая часть, как правило, зависит от быстрых переменных, например, $\mathbf{F} = \rho(y_1, y_2, y_3)g\mathbf{e}$, где g – ускорение силы тяжести, $\mathbf{e}$ – некоторый вектор.

Для сведения задачи с вектор-функцией $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3))|_{y_j = x_j/\varepsilon}$, гладкой по переменным t, x_1, x_2 и 1-периодической по переменным y_1, y_2, к задаче с вектор-функцией $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}(t, x_1, x_2)$, гладкой по переменным t, x_1, x_2, построим вектор-функцию $\bar{\mathbf{U}}$, такую, что

$$L\bar{\mathbf{U}} \sim \hat{\mathbf{F}}(t, x_1, x_2) - \mathbf{F}(t, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)|_{y_j = x_j/\varepsilon} \tag{10.1}$$

Для этого ищем одновременно асимптотические разложения

$$\hat{\mathbf{F}} \sim \sum_{n \ge 0} \mathbf{f}^n(t, x_1, x_2)|_{y_j = x_j/\varepsilon}\varepsilon^n, \quad \bar{\mathbf{U}} \sim \sum_{n \ge 0} \mathbf{U}^n(t, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)|_{y_j = x_j/\varepsilon}\varepsilon^n \tag{10.2}$$

с $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}^1 = 0$. Подставим ряды (10.2) в соотношение (10.1). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\begin{gathered} L_{yy}\mathbf{U}^2 = \mathbf{f}^0 - \mathbf{F}, \quad L_{yy}\mathbf{U}^{n+2} + L_1\mathbf{U}^{n+1} + L_0\mathbf{U}^n = \mathbf{f}^n \text{ при } n > 0 \\ L_1 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial}{\partial y_j}\right) + \frac{\partial}{\partial y_i}\left(A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad L_0 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \rho D_t^2 \end{gathered} \tag{10.3}$$

Оператор L_{yy} определен формулой (2.3).

При каждом n достаточно найти хотя бы одну пару $\mathbf{U}^{n+2}$, $\mathbf{f}^n$ удовлетворяющую соотношениям (10.3). Во многих случаях эта цепочка уравнений разрешима, если $\mathbf{f}^0 = \langle \mathbf{F} \rangle$ и $\mathbf{f}^n = \langle L_1\mathbf{U}^{n+1} + L_0\mathbf{U}^n \rangle$ при $n > 0$. Разность $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{U}}$ будет решением уравнения

$$L\mathbf{w} = -\hat{\mathbf{F}}(t, x_1, x_2)$$

11. Обоснование полученных уравнений. На примере уравнения (6.7) укажем основные моменты строгого обоснования правильности полученных уравнений.

Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений (1.1) в плоской однородной пластине при однородных граничных условиях (2.1) и начальных условиях

$$\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{u}_t|_{t=0} = 0$$

Обозначим через $\Omega(T)$ множество точек (t, x_1, x_2, x_3), лежащих в полосе $0 \le t \le T$, через $\Omega_0(T)$ – множество точек $(t, x_1, x_2, 0)$, лежащих в полосе $0 \le t \le T$. Далее предполагаем, что вектор-функция $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x_1, x_2)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $F_1 = F_2 \equiv 0$;

2) третья компонента F_3 вектора $\mathbf{F}$ финитна и после ее продолжения нулем при $t < 0$ принадлежит $H^8_{\text{loc}}(R_4)$.

Методом энергетических оценок можно показать, что для функции V, являющейся решением уравнения (6.7), верна оценка

$$\|V\|_{H^8(\Omega_0(T))} \le c_1(T)\|F_3\|_{H^8(\Omega_0(T))}$$

Здесь и далее $c_i(T)$ – некоторые величины, зависящие только от T.

Уравнение (6.7) можно рассматривать как получившееся из исходного уравнения (3.3) применением оператора $\hat{P}$ (6.8) и отбрасыванием членов высшего порядка. Можно проверить, что после применения к обеим частям уравнения (6.7) оператора $(\hat{P})^{-1}$ получится некоторое уравнение

$$\partial^2 V/\partial t^2 = L'V + F_3'$$

со следующими свойствами. Члены порядка ε^k ($k = 0, \ldots, 4$) в L' совпадают с соответствующими членами в уравнении (3.3), а $F_3' = F_3 + O(\varepsilon^6)$. Положим

$$\bar{\mathbf{V}} = (0, 0, V)^T, \quad \bar{\mathbf{F}} = (0, 0, f_3)^T$$

$$\bar{\mathbf{u}} \sim \sum_{q + l_1 + l_2 \le 6}{}' \varepsilon^{q + l_1 + l_2} N^q_{l_1 l_2}(y)|_{y = x/\varepsilon} \frac{\partial^{q + l_1 + l_2}\bar{\mathbf{V}}}{\partial t^q \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}}$$

Так как в случае плоской однородной пластины система уравнений (2.7) распадается на систему уравнений относительно v_1, v_2 и уравнение относительно v_3, то справедливо неравенство

$$\|L(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_{H^0(\Omega(T))} \le c_2(T)\varepsilon^{13/2}(\|V\|_{H^8(\Omega_0(T))} + \|F_3\|_{H^6(\Omega_0(T))})$$

С учетом оценки (11.1) это неравенство переписываем в виде

$$\|L(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_{H^0(\Omega(T))} \le c_3(T)\varepsilon^{13/2}\|F_3\|_{H^8(\Omega_0(T))}$$

Далее стандартным методом энергетических оценок получаем, что

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_{H^0(\Omega(T))} \le c_4(T)\varepsilon^{13/2}\|F_3\|_{H^8(\Omega_0(T))}$$

Отсюда получаем оценку близости u_3 и V

$$\|\{u_3\} - V\|_{H_0(\Omega_0(T))} = O(\varepsilon^6)c_5(T)\varepsilon^6\|F_3\|_{H^8(\Omega_0(T))}$$

Условие 2, наложенное на функцию F_3, может быть заменено на более слабое за счет проведения более детальной оценки.

Проведенные построения показывают, что априорное предположение о возможности асимптотического разложения решения $\mathbf{u}$ в ряд указанного вида по степеням ε является при определенных условиях обоснованным.

Работа выполнена по программе фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики” (проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”, госконтракт 10002-251/ОМН-01/018-020/090703-1027) при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00511, 05-01-00375) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1481.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
2. *Love A.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927 = *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.

3. *Уфлянд Я.С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12. № 3. С. 287–300.
4. *Mindlin R.D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 1. P. 31–38.
5. *Селезов І.Т.* Дослідження поперечних коливань пластини // Прикл. механіка, 1960. Т. 6. Вып. 3. С. 319–327.
6. *Бахвалов Н.С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 516–519.
7. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
8. *Бахвалов Н.С., Эглит М.Э.* Вариационные свойства осредненных уравнений периодических сред. // Тр. МИАН. 1990. Т. 192. С. 5–19.
9. *Panasenko G. P.* Asymptotic analysis of bar systems(I) // Russ. J. Math. Physics. 1994. V. 2. № 3. P. 325–352.
10. *Бахвалов Н.С., Эглит М. Э.* Осреднение уравнений статики и динамики пористой среды из несжимаемого материала // Труды семинара имени И.Г. Петровского. Вып. 19. Изд-во МГУ, 1996. С. 284–303.
11. *Бахвалов Н.С., Эглит М.Э.* Эффективные уравнения с дисперсией для распространения волн в периодических средах // Докл. РАН, 2000. Т. 370. № 1. С. 7–10.
12. *Бахвалов Н.С., Эглит М.Э.* Исследование эффективных уравнений с дисперсией, описывающих распространение волн в стратифицированных средах и тонких пластинах // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 6. С. 742–746.

Москва
e-mail: eglit@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
4.II.2004