УДК 532.529

© 2005 г. С. С. Медведев, В. Н. Утесинов, О. М. Чурмаев

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ РАЗМЫВА И ЗАИЛЕНИЯ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ ДЛЯ НЕСВЯЗАННЫХ ГРУНТОВ

В одномерном приближении рассматриваются потоки воды и взвешенных в них твердых частиц, даются постановка и решение задачи по определению размыва и заиления в открытых руслах для несвязанных грунтов. Эффекты трения в гидродинамических уравнениях представлены на основе классического подхода без привлечения понятия гидравлического радиуса и коэффициента Шези. Интенсивность процесса размыва и заиления связана с параметрами потока, показано влияние размыва и заиления на гидродинамические параметры потока. Дано теоретическое описание этого явления, обусловленного выносом с поверхности дна твердых частиц в поток и их осаждением из потока на дно. Приводится пример численного расчета размыва и заиления при соответствующих параметрах потока. Полученные соотношения позволяют проводить анализ явлений размыва и заиления как в одномерном приближении, так и в двумерном случае.

Задача о размыве и заилении русел рек и водоемов имеет большое практическое значение, например, для анализа процессов размыва и заиления русел и водоемов при работе гидротехнических сооружений, что может быть причиной частичного или полного оголения гидротехнических сооружений. Существуют и экологические аспекты данного явления, связанные с обмелением рек, выносом взвешенных в потоке твердых частиц (твердым стоком).

Решение данной проблемы состоит в определении гидродинамических характеристик потока, на основе которых оценивается интенсивность выноса и осаждения (массообмена) твердых частиц. Это, в свою очередь, приводит к изменению гидродинамических характеристик потока.

Рассматриваются участки русел, которые имеют малый средний уклон поверхности дна, обычно не превышающий значения $5 \cdot 10^{-4}$. Изменение абсолютной вертикальной координаты свободной поверхности потока соизмеримо с глубиной русла. Модуль вертикальной составляющей вектора скорости существенно меньше модуля вектора скорости. Для описания гидродинамики потока применяется приближение теории "мелкой воды". Особое внимание следует уделить в уравнении движения описанию члена, связанного с влиянием трения. Часто используется выражение, связанное с гидравлическим радиусом, который определен только в одномерном случае и только для простых форм поперечного сечения русла [1]. Лучшие результаты получаются при использовании коэффициента Шези [2]. Однако на практике он определяется на основе натурных измерений гидродинамических величин. Это означает, что исследователь вынужден решать поставленную задачу по определению гидродинамических характеристик экспериментально. Другой недостаток – привязка значения коэффициента Шези к определенному узкому диапазону значений скорости руслового потока.

Иногда влияние трения описывается членом, связанным с учетом уклона свободной поверхности потока [3, 4]. Данный подход верен при постоянном значении расхода по времени, постоянной по продольной координате площади поперечного сечения и ряде других условий.

Для определения интенсивности выноса со дна твердых частиц в поток используются эмпирические соотношения или рекомендации, созданные на этой основе [5]. Теоретическое описание этого процесса в научной литературе не обнаружено. Отметим, что для стационарного случая есть уравнение баланса массы твердых частиц, движущихся в потоке, без учета их размеров [6]. Для одномерного случая будут записаны уравнения, описывающие гидродинамику потока в открытом русле. На основе экспериментов из классической гидродинамики определяется член, описывающий влияние трения на движение потока; показано, как трение зависит от размыва и заиления поверхности дна. Предлагаются основы теории размыва и заиления в открытых руслах.

1. Объект исследования. Основные предположения. Рассматривается смесь воды и взвешенных твердых частиц на участке открытого русла длиной L. Введем декартову систему координат. Ось z направлена вверх, ось x – по потоку, ось y дополняет систему координат. Глубина потока $h = z_+ - z_-$, где $z_- = z_-(x, y)$ – абсолютная вертикальная координата поверхности дна, $z_+ = z_+(x, y)$ – абсолютная вертикальная координата свободной поверхности потока.

Средняя скорость потока, равная отношению расхода Q к площади поперечного сечения S, как правило, имеет значение порядка 1 м/с. Установившаяся скорость осаждения частиц в покоящейся воде (гидравлическая крупность частиц w) обычно не превышает 0.01 м/с и может служить для оценки диффузионной скорости. В русловых потоках относительная объемная концентрация частиц обычно не превышает 2%. Учитывая это, при рассмотрении движения двухфазной среды принимаем диффузионное приближение, при котором скорости двухфазного течения и твердых частиц совпадают.

Из сделанных оценок следует, что плотность потока можно считать постоянной и равной плотности воды ρ. Считаем, что твердые частицы не взаимодействуют друг с другом ни в потоке смеси, ни на дне (приближения несвязанного грунта дна). Для частиц ниже поверхности дна задана функция распределения по диаметру. Кроме того, считаем, что величина касательного напряжения на поверхности потока много меньше, чем на дне.

Обычно для многофазных сред выписываются уравнения для каждой фазы отдельно. Для всей смеси в целом уравнения получаются путем суммирования по фазам. Здесь будут записаны уравнения для смеси в целом и отдельно для твердых частиц.

Предполагается, что эффекты трения связаны только с шероховатостью поверхности дна и чисто турбулентным режимом течения. Процессы выноса частиц в поток со дна и их осаждение на дно рассматриваются без учета “донных” течений, при которых происходит перемещение частиц по поверхности дна без их выноса в поток.

2. Общий вид основных уравнений гидродинамики. Уравнение неразрывности для смеси в отсутствие источников и стоков массы имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (2.1)$$

Уравнение движения смеси в диффузионном приближении будет верно и для каждой фазы. Оно получается путем интегрирования одномерного уравнения теории “мелкой воды” не по глубине, как это обычно делается, а по всей площади поперечного сечения русла S. Это связано с тем, что поперечное сечение не всегда имеет простую форму (прямоугольника и т.п.). Первые два члена, описывающие ускорение, примут вид, указанный ранее [7]. Вид членов, описывающих влияние давления и среднего по сечению уклона поверхности дна, будет отличаться от общепринятого. Тогда уравнение движения смеси представим следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{Q^2}{S} + g\frac{\partial}{\partial x}\oiint\limits_S (z_+ - z_-)ds = -g\oiint\limits_S \frac{\partial z_-}{\partial x}ds - \frac{\operatorname{sign} Q}{\rho}\oint\limits_l \tau dl; \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (2.2)$$

Здесь g – ускорение свободного падения, τ – величина касательного напряжения, l – смоченный периметр.

3. Определение величины касательного напряжения. В классической одномерной постановке задачи в рамках теории “мелкой воды” последний член в правой части уравнения (2.2) невозможно определить. Для его идентификации расширим границы одномерного подхода. Обратимся к натурным условиям.

Среднее значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = Vh/\nu$ (V – средняя по глубине скорость потока, ν – коэффициент кинематической вязкости воды) имеет величину порядка 10^6. Выражение для коэффициента сопротивления с учетом шероховатости дна (среднестатистического диаметра частиц $\bar{d}_b$ непосредственно на поверхности дна) для турбулентного режима берется в виде [8]

$$\lambda = 0.01375\alpha\left(\frac{\bar{d}_b}{2h} + \frac{34}{\mathrm{Re}}\right)^{0.25} \tag{3.1}$$

Коэффициент α отражает тот факт, что небольшая часть потока (вблизи границ русла) находится в ламинарном режиме. Модуль касательного напряжения τ связан с коэффициентом сопротивления λ [9] следующим образом:

$$\frac{|\tau|}{\rho} = u_\tau^2 = \lambda\left(\mathrm{Re}, \frac{\bar{d}_b}{h}\right)V^2 \tag{3.2}$$

где u_τ – модуль скорости касательного напряжения.

Согласно экспериментальным данным, принимаем следующую зависимость средней по глубине скорости от глубины:

$$V = \alpha_V h^n, \quad \alpha_V = Q/\oint\!\!\oint_S (z_+ - z_-)^n ds \tag{3.3}$$

Значение n может быть определено на основе обработки натурных данных или из существующих зависимостей (обычно $0.2 \le n \le 0.35$).

В итоге подстановка выражений (3.2) и (3.3) в уравнение (2.2) дает окончательный вид уравнения движения

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{Q^2}{S} + g\frac{\partial}{\partial x}\oint\!\!\oint_S (z_+ - z_-)ds = -g\oint\!\!\oint_S \frac{\partial z_-}{\partial x}ds - \operatorname{sign}Q\oint_l \lambda\left(\mathrm{Re}, \frac{\bar{d}_p}{h}\right)V^2 dl \tag{3.4}$$

Система уравнений (2.1), (3.4) полностью определяет динамику руслового потока. Отметим, что, зная значения z_+, можно найти площадь поперечного сечения русла S.

Начальные и краевые условия имеют вид

$$\begin{gathered} z_+(t = 0) = \varphi_z(x), \quad Q(t = 0) = \varphi_Q(x); \\ R_1(z_+, Q, t, x = 0) = 0, \quad R_2(z_+, Q, t, x = L) = 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

На практике на краях участка русла наиболее точно можно определить абсолютные значения уровня потока смеси, поэтому в качестве краевых условий можно взять следующие:

$$z_+(x = 0) = \gamma_1(t), \quad z_+(x = L) = \gamma_2(t) \tag{3.6}$$

Предложенный подход, в отличие от одномерного, позволяет найти значение средней скорости V и получить более точные результаты.

4. Основы теории размыва и заиления несвязанных грунтов дна. Остановимся на описании процессов, связанных с оседанием и выносом твердых частиц. С поверхности несвязанного грунта дна некоторые частицы выносятся в поток и одновременно из потока частицы могут осаждаться на дно. В случае, когда интенсивность осаждения частиц выше интенсивности выноса, происходит процесс заиления, в противном случае говорят о размыве.

На основе натурных исследований диаметры d всех частиц в несвязанных грунтах дна и в потоке, участвующих в процессе массообмена, разделим на три группы. К первой группе относятся самые мелкие частицы, которые в потоке распределены по всей его глубине и все выносятся с поверхности дна в поток. Натурные данные определяют максимальный диаметр d_1 этих частиц из условия [10]

$$w_1 = w(d_1) = k_1 u_\tau, \quad 0.3 \le k_1 \le 0.4 \tag{4.1}$$

Вторая группа состоит из более крупных частиц, диаметром большим, чем d_1, но меньшим, чем d_2. Диаметр d_2 определяется из условия

$$w_2 = w(d_2) = k_2 u_\tau, \quad 0.9 \le k_2 \le 1.1 \tag{4.2}$$

Частицы второй группы отличаются от частиц первой группы только тем, что в потоке они распределены не по всей глубине, составляя "придонный" слой. Третья группа – частицы с диаметром бóльшим, чем d_2. Эти частицы не выносятся с поверхности дна, а если они находились в потоке, то мгновенно осаждаются на дно.

Поскольку описанные процессы тесно связаны с величиной диаметра частиц d, необходимо при их описании использовать аппарат теории вероятностей и математической статистики. Процесс массобмена в потоке описывается уравнением неразрывности для твердых частиц вблизи дна и определяется источниковыми членами.

Движение смеси сопровождается диффузией твердых частиц. Функция распределения частиц в потоке $G(d)$ стремится принять вид равновесной функции распределения $G_p(d)$. Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, это распределение будет близко к нормальному. Уравнение баланса для твердой фазы можно записать так:

$$\frac{\partial(G\rho_p)}{\partial t} + V\frac{\partial(G\rho_p)}{\partial x} = -\frac{\rho_p(G - G_p)}{T(d)} + j_+ - j_- \tag{4.3}$$

Здесь ρ_p – приведенная плотность частиц, j_+, – интенсивность выноса частиц с поверхности дна, j_- – интенсивность осаждения частиц из потока.

Время установления процесса будет

$$T(d) = \frac{1}{G(d)}\int_0^d t_p \bar{g}(b)db;\ \bar{g}(b) = \frac{\partial G(b)}{\partial b},\ t_p = \begin{cases} \dfrac{h}{w_2 - w}, & d \le d_1 \\ \dfrac{h_2(d)}{w_2 - w}, & d_1 \le d \le d_2 \end{cases},\ h_2(d) = h\left[\frac{w_2 - w(d)}{w_2 - w_1}\right]^2$$

где $\bar{g}(b)$ – плотность вероятности распределения частиц в потоке, t_p – время установления процесса для частицы диаметра d, $h_2(d)$ – глубина, отсчитываемая от поверхности дна, на которую поднимаются частицы второй группы.

Считаем, что частицы осаждаются из потока на дно мгновенно, что допустимо ввиду малости $h_2(d)$. Тогда

$$j_- = \rho_p \chi(d - d_2)[G - G(d_2)]\delta(t) \tag{4.4}$$

$\chi(d)$ – функция Хевисайда, $\delta(t)$ – дельта-функция.

Определим интенсивность выноса j_+ твердых частиц с поверхности дна. Пусть $\bar{h}$ – изменение вертикальной координаты поверхности дна за счет выноса частиц. Плотность вероятности распределения частиц на поверхности дна равна $f(d)$. Если толщина пограничного слоя равна δ_n, интенсивность изменения вертикальной координаты будет

$$\frac{\partial\bar{h}}{\partial t} = -\frac{m\delta_n}{(1-p)h}\int\limits_0^{d_2}[w_2 - w(\xi)]f(\xi)d\xi \times$$

$$\times\left\{1 + (1-p)\int\limits_0^{-\bar{h}}\chi(d^*_{\max} - d_2)[1 - F(d_2)]\frac{da}{\bar{d}_p} + (1-p)\int\limits_0^{A}[1 - G(d_2)]\frac{da}{\bar{d}_p}\right\}^{-1}, \qquad (4.5)$$

$$\bar{d}_p = \int\limits_0^{d^b_{\max}}\xi f(\xi)d\xi$$

p – пористость грунта дна, $\bar{d}_p$ – среднестатистический диаметр частиц на дне, $d^b_{\max}$ – максимальный диаметр частиц на дне, A – приращение вертикальной координаты дна, вызванное осаждением частиц из потока смеси, m – коэффициент перемежаемости, определяющий долю времени процесса, когда наблюдаются крупномасштабные турбулентные вихри, в общем случае зависящий от числа Рейнольдса Re.

Согласно натурным наблюдениям, m принимает значение, близкое к 0.5. В соотношении (4.5) учтено явление самоотмостки, смысл которого состоит в том, что с течением времени доля крупных частиц на дне может увеличиваться. Будем различать два вида самоотмостки: внутреннюю, обусловленную тем, что не все частицы выносятся в поток (крупные частицы остаются на дне, где с течением времени их доля в функции распределения растет), и внешнюю, связанную с тем, что из потока на дно осаждаются преимущественно крупные частицы, что также ведет к увеличению их доли на дне. В равенстве (4.5) первый интеграл в фигурных скобках описывает влияние на вынос частиц внутренней самоотмостки, второй – внешней самоотмостки. После каждого этапа выноса частиц с поверхности дна на глубину $\bar{h}$ в соотношении (4.5) вместо функции распределения $F(d)$ следует брать функцию распределения частиц непосредственно на дне, которая учитывает возможное появление самоотмостки:

$$\Theta(d) = \frac{F(d) + I_1(d) + I_2(d)}{1 + I_1(d) + I_2(d)}$$

$$I_1(d) = (1-p)\int\limits_0^{-\bar{h}}\chi(d - d_2)[F(d) - F(d_2)]\frac{da}{\bar{d}_b},\ \ I_2(d) = (1-p)\int\limits_0^{A}\chi(d - d_2)[G(d) - G(d_2)]\frac{da}{\bar{d}_b} \qquad (4.6)$$

где $I_i(d)$ – члены, отвечающие за внутреннюю ($i = 1$) и внешнюю ($i = 2$) самоотмостку, поэтому вместо $f(d)$ в равенство (4.5) следует подставить производную $\partial\Theta/\partial d$.

Из соотношения (4.5) при учете выражения (4.6) и сделанных замечаний получаем уравнение для определения координаты поверхности дна

$$\frac{\partial z_-}{\partial t} = \frac{\partial\bar{h}}{\partial t} + A\delta(t),$$

$$A = \frac{\rho_p}{\bar{\rho}_p(1-p)[1 - G(d_2)]}\int\limits_{d_2}^{d_{\max}}\chi(b - d_2)db\int\limits_0^{H_2}dz\{\exp[-\alpha_\rho(z - z_-)]\bar{g}_b\} \qquad (4.7)$$

где $\bar{\rho}_p$ – истинная плотность частиц, $H_2 = h_2(d_2)$.

Выражение для A получается на основе многочисленных экспериментов, из которых известно, что распределение приведенной плотности частиц в потоке смеси имеет экспоненциальный характер с

$$\rho_p \sim \exp\lfloor -\alpha_\rho(z - z_-) \rfloor$$

Кроме того, определяется интенсивность притока массы частиц в поток за счет их выноса со дна с учетом распределения частиц по диаметру

$$j_+ = -\frac{\bar{\rho}_p \alpha_\rho (1-p)[\Theta(d) - \Theta(d_2)]}{[1 - \exp(-\alpha_\rho h)]\Theta(d_2)} \frac{\partial h}{\partial t} \tag{4.8}$$

Таким образом, выражения (4.4) и (4.8) полностью определяют уравнение массообмена (4.3). На практике следует в уравнение (4.3) для функции распределения подставить диаметр $d_{\max}$ – получается уравнение относительно плотности частиц в потоке. Затем продифференцировать левую часть равенства (4.3) и, с учетом полученного уравнения для плотности частиц, получить отдельно уравнение для функции распределения.

Для решения задачи массопереноса начальные и краевые условия будут следующие:

$$\rho_p(t=0) = R_0(x), \quad G(t=0) = G_0(d,x); \; \rho_p(x=0) = R_x(t), \quad G(x=0) = G_x(d,t) \tag{4.9}$$

Сформулируем этапы решения задачи по определению размыва и заиления в открытых руслах.

1°. Решается система уравнений (2.1), (3.4). Определяются величины Q, z_+, S, V, u_τ.

2°. Определяется влияние потока на размыв и заиление из соотношений (4.1) и (4.2).

3°. При решении уравнений массообмена (4.3) и уравнений (4.5) , (4.7) определяются

а) изменение плотности частиц в потоке и их функции распределения по диаметру,

б) функция распределения частиц по диаметру на поверхности дна из-за их выноса и осаждения,

в) новые координаты z_- поверхности дна из-за размыва и заиления,

г) суммарный перенос твердых частиц потоком.

4°. Определяются значения S из-за изменения z_- (влияние размыва и заиления на площадь поперечного сечения русла).

5°. Определяется новый среднестатистический диаметр частиц $\bar{d}_b$ на поверхности дна.

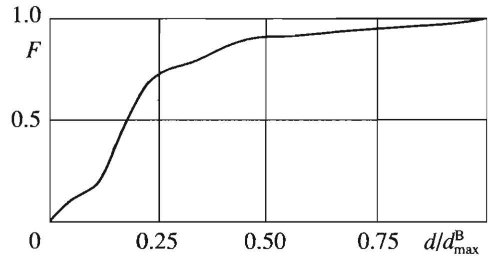
Рассмотрим в качестве примера участок русла длиной $L = 10000$ м в форме прямоугольника шириной В = 500м. В начальный момент времени $t = 0$

$$z_-(0,0) = 0, \quad z_-(0,L) = -2 \text{ м}$$

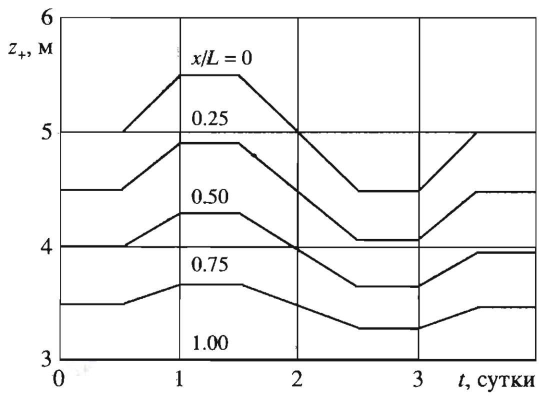
По всей длине участка начальная вертикальная координата поверхности дна z_- монотонно изменяется от 0 до –2 м. Считаем, что средняя скорость потока не зависит от глубины. Начальный расход равен 2500 м^3/с. Все точки дна имеют одинаковые характеристики по максимальному диаметру образующих дно частиц, равному 2.17 мм. Истинная плотность частиц 2650 кг/м^3. Функция распределения частиц дна $F(d/d^b_{\max})$ по диаметру, отнесенному к максимальному, показана на фиг. 1.

На фиг. 2 показаны изменения величины z_+ по времени t при разных значениях x/L с шагом 0.25. Начальное значение $z_+ = 5$ м соответствует $x/L = 0$; $z_+ = 3$м – $x/L = 1$. Остальные значения z_+ для других x/L расположены между ними.

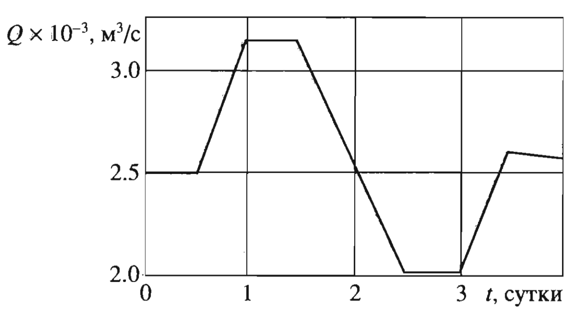
Приведенная плотность твердых частиц ρ_p при $x = 0$ принята равной нулю. Вычисленные значения расхода Q для $x = 0$ даны на фиг. 3, так как при разных значениях x отличие в величине Q было незначительным.



Фиг. 1



Фиг. 2



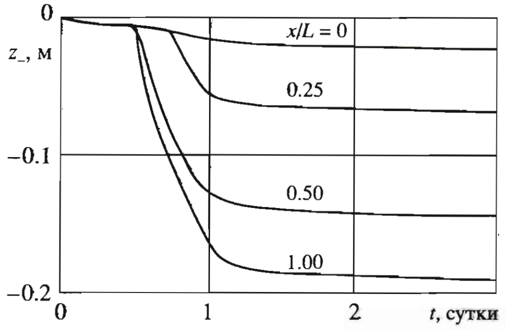
Фиг. 3

На фиг. 4 показаны вычисленные значения изменения вертикальной координаты z_- точек поверхности дна; уменьшение z_- значения соответствует размыву, увеличение – заилению. Нижняя кривая соответствует $x/L = 1$, верхняя – $x/L = 0$. Для других x/L кривые расположены между этими двумя.

5. Выводы и результаты.

1. Предложен способ учета влияния трения, повышающий точность определения гидродинамических характеристик потока.

2. На основе диффузионного приближения для одномерной задачи записаны уравнения, описывающие процессы в открытых руслах. В отличие от классической модели она позволяет определить продольную скорость движения потока.



Фиг. 4

3. Выведены уравнения массообмена между частицами на поверхности дна и частицами, находящимися в потоке смеси. Определены интенсивность выноса частиц с поверхности дна и интенсивность осаждения частиц из потока на дно в зависимости от расхода, абсолютной координаты уровня воды и абсолютной координаты поверхности дна.

4. Определено влияние интенсивности выноса и осаждения частиц на статистические характеристики частиц и на изменение координаты на поверхности дна. Показано влияние выноса и осаждения частиц на величину расхода и площадь поперечного сечения.

5. Дано теоретическое описание явления самоотмостки.

6. Показана последовательность решения поставленной задачи.

7. Представлен пример численного расчета параметров при размыве и заилении.

Работа выполнена в ООО "Эконг-ком".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев О.Ф., Годунов С.К., Притвиц Н.А., Темноева Т.А., Фрязинова И.А., Шургин С.М.* Численный метод расчета распространения и длинных волн в открытых руслах и приложение его к задаче о паводке // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3, С. 525–527.
2. *Taylor C., Davis J.* Tidal and long wave propagation. A finite element approach // Comput. and Fluids. 1975. V. 3. № 2/3. P. 125–148.
3. *Некрасов Б.Б.* Гидравлика. М.: Воен. издат., 1960. 264 с.
4. *Есьман И.Г.* Гидравлика. М.; Л.: ГОНТИ, Ред. энергетич. лит., 1938. 372 с.
5. *Климович В.И., Прокофьев В.А.* Численное исследование заносимости морских водозаборных сооружений на основе решения плановой задачи гидродинамики открытого потока и транспорта наносов // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 2002. Вып. 240. С. 134–145.
6. *Медведев С.С., Вербицкий В.С.* Рациональное распределение твердого стока по элементам оросительной системы // Юбилейный сборник научных трудов ВНИИГиМ. 1999. Т. 2. С. 220–233.
7. *Алалыкин Г.Б., Годунов С.К., Киреева И.Л., Плинер Л.А.* Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970. 112 с.
8. *Альтшуль А.Д., Киселев П.Г.* Гидравлика и аэродинамика (Основы механики жидкости). М.: Стройиздат, 1975. 327 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. *Шапиро Х.Ш.* Регулирование твердого стока при водозаборе в оросительные системы. М.: Колос, 1983. 272 с.

Москва
e-mail: slutsl@rambler.ru

Поступила в редакцию
9.XII.2003