

УДК 533.2: 534.1

© 2005 г. И. Ш. Ахатов, С. И. Коновалова

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА

Рассматривается трансляционное движение и колебания радиуса сферического газового пузырька в сферической колбе, заполненной слабосжимаемой жидкостью, при вынужденном радиальном возбуждении стенки колбы. Трансляционное движение представляет собой поступательное движение пузырька под воздействием акустического поля при наличии сопротивления жидкости и эффекта присоединенной массы. Предложена система дифференциальных уравнений, описывающая совместные колебания радиуса и трансляционное движение пузырька. Эта система включает обыкновенное дифференциальное уравнение типа Херринга–Флинна–Гилмора, описывающее эволюцию радиуса пузырька. Построены бифуркационные диаграммы для радиуса пузырька, раскрывающие повторяющуюся структуру бифуркационного множества в пределах гармонических резонансов системы, и численно исследованы динамические характеристики пузырька при различных равновесных радиусах в связи с анализом устойчивости его положения в пространстве.

Динамика кавитационных пузырьков в акустическом поле включает в себя как колебания радиуса пузырька, так и трансляционное движение, т.е. перемещение пузырька в пространстве.

Кавитационные пузырьки в достаточно сильном акустическом поле осциллируют нелинейно и представляют собой одну из типичных систем, в которых проявляется детерминированный хаос [1–3]. Нелинейные аспекты радиальных колебаний поверхности пузырька исследовались во многих работах. Численно исследовались [4] вынужденные нелинейные осцилляции сферического газового пузырька в несжимаемой вязкой жидкости, подвергающегося воздействию акустического поля с разными амплитудами давления и частотами, сравнимыми с резонансными частотами пузырьков. Результаты представлены в виде резонансных кривых, показывающих зависимость максимального радиуса пузырька от частоты действующего акустического поля. Обнаружено, что для равновесного радиуса $R_0 = 10$ мкм при амплитудах давления, превышающих статический порог Блейка $P_b = 0.997$ атм, происходят скачкообразные переходы между возможными резонансами, постепенное разрушение гармоник и их замена ультрагармониками. В результате исследования нелинейных осцилляций пузырька фиксированного равновесного радиуса методами хаотической динамики показано, что переход к хаотическим и возврат к регулярным колебаниям происходит посредством прямых и обратных бифуркаций удвоения периода, а также касательных (седло-узловых) бифуркаций и что с ростом амплитуды давления акустического поля области возникновения странных аттракторов увеличиваются [5, 6]. Исследованы резонансные кривые, показывающие зависимость максимального радиуса пузырька от его равновесного радиуса при разных амплитудах давления [7]. Резонансные кривые имеют сходство как с полученными ранее резонансными кривыми [4], так и с бифуркационными диаграммами [5]. Показано, что при достаточно высоких амплитудах давления акустического поля ($P_a > 1.2$ атм) в области микронных пузырьков возникает так называемый “гигантский отклик”, когда радиус пузырька в процессе колебаний увеличивается на порядок и выше [7–9]. Во всех упомянутых работах предполагалось, что пузырек находится в безграничном объеме жидкости, трансляционное движение пузырька не рассматривалось.

Если радиальные колебания поверхности одиночного пузырька активно исследовались многими авторами, то трансляционному движению пузырька уделялось меньше внимания. Тем не менее нелинейные эффекты могут проявить себя и в трансляционном движении, поэтому исследование позиционной устойчивости пузырька – важная задача, особенно при моделировании явления сонолюминесценции, когда пузырек подвергается воздействию сильного акустического поля. Так, экспериментальное исследование динамики пузырька в бегущей акустической волне показывает, что пузырек с равновесным радиусом $R_0 \approx 50$ мкм совершает хаотическое зигзагообразное движение в направлении изменения акустического поля, если интенсивность звука достаточно велика ($I = 50$ мВт/см², $f = 70$ кГц) [10]. Неустойчивое “танцующее” движение пузырька было экспериментально зафиксировано также и в стоячей акустической волне [11]. Один из возможных механизмов возникновения “танцующего” движения пузырька основан на предположении о нарушении его сферической формы [11–13]. Трансляционное движение сферического пузырька, близкого к своему резонансному размеру, в поле стоячей акустической волны исследовалось численно [14]. Для описания осцилляционного движения использовалось уравнение Релея–Лэмба–Плессета для несжимаемой жидкости [15–17]. Показано, что пузырек с равновесным радиусом, ненамного меньшим своего резонансного радиуса, совершает хаотическое как радиальное, так и трансляционное движения. Позже [18] для описания осцилляционного движения использовалось уравнение Херринга–Флинна–Гилмора [19], учитывающее сжимаемость жидкости. Для тех же равновесных радиусов имело место не хаотическое, а периодическое трансляционное движение пузырька. Таким образом, достаточное затухание для развития устойчивых решений обеспечивается сжимаемостью жидкости.

Ниже представлено численное исследование динамики газового пузырька, намного меньшего своего резонансного размера, совершающего как радиальные колебания, так и трансляционное движение в сферической колбе, заполненной вязкой слабосжимаемой жидкостью, в которой сформирована стоячая акустическая волна с амплитудой $P_a = 1.8$ атм и частотой $f = 20$ кГц. Предполагается, что сферическая форма пузырька не нарушается.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сферическую колбу, заполненную вязкой слабосжимаемой жидкостью, в которой создано акустическое поле в виде сферической стоячей волны. Считаем, что лучность акустического поля находится в центре колбы, а ближайшие узлы – на ее границе. Заметим, что такая упрощенная постановка задачи часто используется для моделирования динамики одиночного пузырька [20–24]. Распределение акустического давления в жидкости, являющееся решением линейного волнового уравнения слабосжимаемой жидкости, может быть представлено в виде

$$p(r, t) = P_0 + p_a \frac{\sin kr}{kr}$$

где r – трансляционная координата, t – время, P_0 – атмосферное давление, $p_a = -P_a \sin \omega t$ – акустическое давление в центре колбы с амплитудой P_a , $k = \omega/c$ – волновое число, c – скорость звука в жидкости, ω – циклическая частота акустического поля.

Соответствующее поле скоростей в жидкости определяется формулой

$$\mathbf{v}_l = v_l \mathbf{e}_r = -\frac{P_a}{\rho_l \omega} \cos \omega t \left(\frac{\cos kr}{r} - \frac{\sin kr}{kr^2} \right) \mathbf{e}_r$$

где \mathbf{e}_r – единичный вектор в радиальном направлении, ρ_l – плотность, v_l – скорость жидкости.

2. Математическая модель. Для моделирования эволюции радиуса пузырька обычно использовались модели сферически-симметричных колебаний поверхности одиночного пузырька в безграничном объеме как несжимаемой (уравнение Релея–Лэмба–Плессета), так и слабосжимаемой жидкости (уравнение Херринга – Флинна – Гилмора и схожие с ним [25, 26]). В случае ограниченного объема жидкости используется математическая модель, описывающая радиальные колебания поверхности пузырька в сферической колбе, заполненной слабосжимаемой жидкостью, когда стенка колбы

служит источником возбуждения колебаний в жидкости [22–24]. Она включает обыкновенное дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению Херринга–Флинна–Гилмора, и уравнение с запаздыванием, связывающее давление на стенке колбы с изменением радиуса пузырька. В настоящей работе считается, что колебания пузырька не оказывают влияния на распределение акустического давления в жидкости, поэтому радиальные колебания поверхности пузырька моделируются уравнением Херринга–Флинна–Гилмора в виде

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right)\frac{p_w - p(r, t)}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l c} \frac{d}{dt}(p_w - p(r, t)) \quad (2.1)$$

Здесь $R = R(t)$ – переменный радиус пузырька, p_w – давление в жидкости у поверхности пузырька. Предполагая, что газ в пузырьке расширяется по адиабатическому закону и, пренебрегая давлением пара в пузырьке, давление в жидкости у поверхности пузырька можно представить в виде

$$p_w = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu\dot{R}}{R}$$

где R_0 – равновесный радиус пузырька, σ – коэффициент поверхностного натяжения, γ – показатель адиабаты, μ – вязкость жидкости.

Трансляционное движение представляет собой поступательное движение пузырька под воздействием переменного акустического и гравитационного полей при наличии сопротивления жидкости и эффекта присоединенной массы

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_g \dot{\mathbf{v}}_b = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_s \quad (2.2)$$

где ρ_g – плотность газа в невозмущенном пузырьке, \mathbf{v}_b – скорость пузырька; \mathbf{F}_g – сила плавучести, \mathbf{F}_b – сила Бьеркнеса, действующая со стороны акустического поля и обуславливающая притяжение пузырька к пучности или узлу волны акустического поля, \mathbf{F}_m – сила, обусловленная эффектом присоединенной массы, \mathbf{F}_s – сила вязкого сопротивления.

Сила плавучести. Определим силу плавучести как сумму силы тяжести и выталкивающей силы

$$\mathbf{F}_g = -\frac{4}{3}\pi R^3 \left[\rho_l - \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \rho_g \right] \mathbf{g} \quad (2.3)$$

где \mathbf{g} – ускорение свободного падения.

Сила Бьеркнеса. Известно, что на тело объема V в жидкости с градиентом давления ∇p действует сила $\mathbf{F} = -V\nabla p$. Обычно осредненную по времени силу F называют силой Бьеркнеса. В данной работе движение пузырьков исследуется в масштабе времени изменения акустического поля. Таким образом, определяем силу Бьеркнеса как мгновенную величину этой силы

$$\mathbf{F}_b = -\frac{4}{3}\pi R^3 \nabla p(r, t) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_l \dot{\mathbf{v}}_l \quad (2.4)$$

Отметим, что сила Бьеркнеса и сила плавучести имеют одинаковую природу: обе силы обусловлены градиентом давления, или разницей давления на противоположных стенках пузырька. Однако в случае силы плавучести это градиент гидростатического давления $\rho_l \mathbf{g}$, в случае же силы Бьеркнеса это градиент акустического дав-

ления. По этой причине силу Бьеркнеса иногда называют акустической силой плавучести.

Сила, обусловленная эффектом присоединенной массы. В предположении, что имеет место потенциальное обтекание пузырька несжимаемой жидкостью, дополнительный импульс жидкости, вовлекаемой в движение пузырьком, запишем в виде

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} V_b \rho_l (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_l)$$

где V_b – объем пузырька. Изменение этого импульса со временем приводит к появлению дополнительной силы реакции, действующей на пузырек,

$$\mathbf{F}_m = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_l (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_l) \right) \quad (2.5)$$

Сила вязкого сопротивления. На движущийся пузырек со стороны жидкости действует сила сопротивления, обусловленная вязкостью жидкости. При малых числах Рейнольдса ($Re = 2R\rho_l |\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_b|/\mu \ll 1$) в пренебрежении вязкостью газа внутри пузырька по сравнению с вязкостью окружающей его жидкости эта сила равна (см., например, [17, 27])

$$\mathbf{F}_s = 4\pi\mu R (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_b) \quad (2.6)$$

Подставляя в уравнение (2.2) выражения для сил (2.3) – (2.6), получим векторное дифференциальное уравнение для скорости пузырька

$$\dot{\mathbf{v}}_b = \left(\frac{1}{3} + \alpha \right)^{-1} \left[\dot{\mathbf{v}}_l + \left(\frac{\dot{R}}{R} + 2 \frac{v}{R^2} \right) (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_b) - \left(\frac{2}{3} - \alpha \right) \mathbf{g} \right], \quad \alpha = \frac{2\rho_g}{3\rho_l} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (2.7)$$

где $v = \mu/\rho_l$ – кинематическая вязкость жидкости.

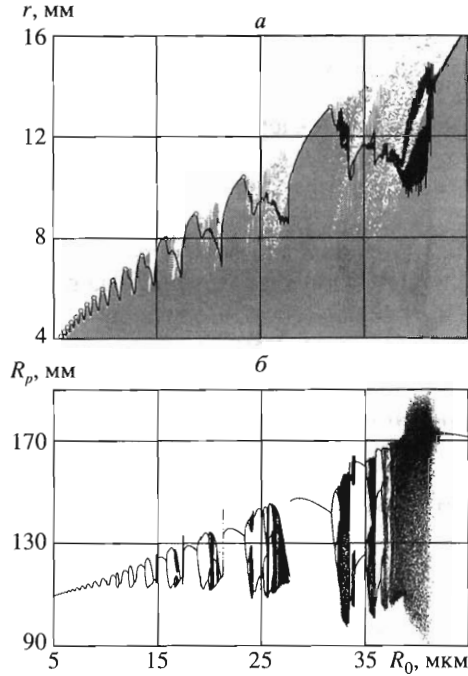
Аналогичное уравнение использовалось рядом авторов ([14, 28] и др.) при решении задач, связанных с движением пузырьков.

В полярной системе координат (r, θ) с полюсом в центре колбы уравнение (2.7) сводится к следующей системе скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{3} + \alpha \right)^{-1} \left[\dot{v}_l + \left(\frac{\dot{R}}{R} + 2 \frac{v}{R^2} \right) (v_l - \dot{r}) + \left(\frac{2}{3} - \alpha \right) g \sin \theta \right] \\ \ddot{\theta} &= -2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \left(\frac{1}{3} + \alpha \right)^{-1} \left[\left(\frac{\dot{R}}{R} + 2 \frac{v}{R^2} \right) \dot{\theta} + \left(\frac{2}{3} - \alpha \right) g \frac{\cos \theta}{r} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Результаты численных расчетов. Система нелинейных дифференциальных уравнений (2.1), (2.8), описывающая совместные радиальные колебания и трансляционное движение пузырька, исследована численно. Использовался метод Рунге–Кутты пятого порядка, позволяющий автоматически подбирать длину шага так, чтобы локальная погрешность не превышала предписанной допустимой величины [29]. Это свойство метода особенно важно, так как в момент коллапса схлопывание пузырьков происходит очень быстро. Расчеты проводились при следующих значениях физических параметров: $P_0 = 1$ атм, $P_a = 1.8$ атм, $\omega = 2\pi \times 20$ кГц, $c = 1500$ м/с, $\rho_l = 998$ кг/м³, $\rho_g = 1$ кг/м³, $\sigma = 0.0725$ Н/м, $\mu = 10^{-3}$ кг/(м · с), $\gamma = 1.4$ и $g = 9.8$ м/с².

Направление трансляционного движения пузырька определяется силами Бьеркнеса и плавучести. Трансляционное движение в радиальном направлении обусловлено силой Бьеркнеса, которая на два порядка больше силы плавучести. В зависимости от равновесного радиуса R_0 и радиальной трансляционной координаты r пузырек



Фиг. 1

может отталкиваться от пучности ($F_{bl_r} > 0$) или притягиваться к ней ($F_{bl_r} < 0$). Так как $F_{bl_\theta} = 0$, движение пузырька в полярном направлении определяется только силой плавучести. Полярная трансляционная координата $\theta(t)$ монотонно возрастает: $\theta \rightarrow \pi/2$. Это означает, что пузырек стремится к вертикальной оси, проходящей через пучность акустического поля.

На фиг. 1, *a* приведена диаграмма направлений осредненной силы Бьеркнеса для пузырька с равновесным радиусом R_0 и радиальной трансляционной координатой r . Вычисления осредненной за период акустического поля силы Бьеркнеса проводились для неподвижного пузырька при $5 \leq R_0 \leq 45$ мкм и $4 \leq r \leq 16$ мм. Серым цветом обозначен диапазон значений (R_0, r) , при которых $F_{bl_r} > 0$, белым — $F_{bl_r} < 0$. Так, пузырек с $R_0 = 15$ мкм будет притягиваться к пучности при $r(t)|_{t=0} > 7.5$ мм; если же $r(t)|_{t=0} < 7.5$ мм, то пузырек будет отталкиваться от пучности и двигаться к узлу. В любом случае он займет устойчивое положение на границе областей притяжения и отталкивания на расстоянии $r \approx 7.5$ мм от пучности. В действительности осцилляции радиуса пузырька вызывают высокочастотные колебания около этого устойчивого положения с периодом акустического поля $T = 50$ и амплитудой порядка 10 мкм, сравнимой с размерами пузырька. Решение такого типа можно назвать квазистационарным.

На фиг. 1, *a* представлен также характер установившегося трансляционного движения пузырька с начальными координатами (7.5 мм, $\pi/3$), время установления бра-лось равным 500 периодам акустического поля. Вычисленные максимальные и минимальные значения $r(t)$ для каждого $R_0 \in [5, 45]$ мкм за 200 периодов акустического поля показаны жирными кривыми. Точками обозначены локальные максимумы, соответствующие гармоническим резонансам радиуса пузырька. Для R_0 , при которых кривые $r_{\max}(R_0)$ и $r_{\min}(R_0)$ совпадают, реализуется квазистационарное решение для

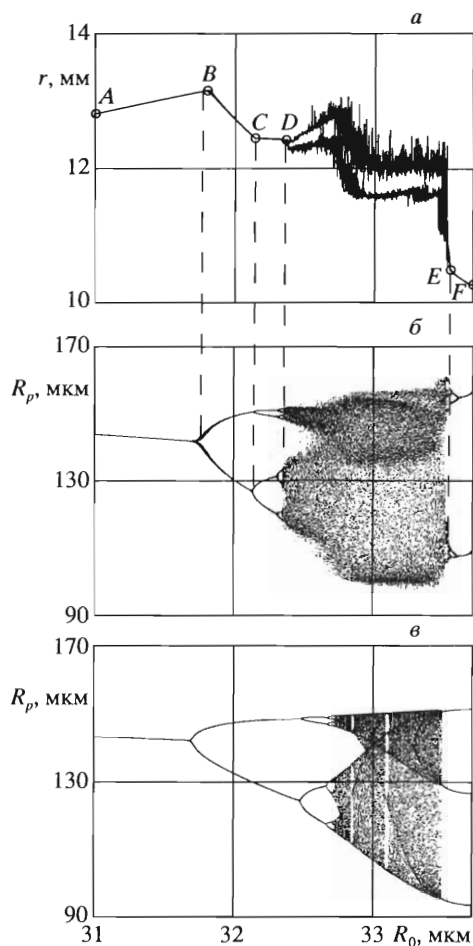
трансляционной координаты. Высокочастотные колебания пузырька с малой амплитудой в масштабе рисунка не видны; при этом кривые также совпадают с границей между областями притяжения и отталкивания. Для R_0 , при которых между областями притяжения и отталкивания не прослеживается четкой границы, кривые $r_{\max}(R_0)$ и $r_{\min}(R_0)$ не совпадают. Это означает, что пузырек совершает хаотические низкочастотные колебания в радиальном направлении с амплитудой, в среднем на два порядка большей амплитуды высокочастотных колебаний.

На фиг. 1, б приведена бифуркационная диаграмма для радиуса пузырька. Каждому значению управляющего параметра R_0 поставлены в соответствие 100 значений радиуса пузырька $R(t)$ в последовательные моменты времени установившегося движения пузырька $t = nT$. Совокупность таких значений $R_p = R(t)$, $t = nT$ представляет собой одну из проекций сечения Пуанкаре. В случаях, когда все точки накладываются друг на друга, аттрактор (притягивающая траектория в фазовом пространстве) представляет собой предельный цикл единичного периода. Это означает, что период осцилляционного движения пузырька равен T . При изменении управляющего параметра система может выйти из устойчивого состояния, происходит бифуркация – качественное изменение характера наблюдаемого режима. Если присущая системе нелинейность такова, что на пороге потери устойчивости при однократном обходе предельного цикла возмущение меняет знак, то для того, чтобы траектория замкнулась, требуется совершить еще один обход, так что период вновь возникшего движения оказывается вдвое больше, чем период исходного. Результатом бифуркации будет рождение цикла с периодом, вдвое большим исходного. Это бифуркация удвоения периода. Очень часто при дальнейшем изменении параметра за ней вновь следуют бифуркации такой же природы. Последовательность бифуркационных значений параметра накапливается к определенному пределу, критической точке, которая является границей хаоса. Переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода – это сценарий Фейгенбаума [30].

Может встретиться другая ситуация, когда по мере приближения к точке бифуркации к устойчивому предельному циклу приближается неустойчивый цикл; в точке бифуркации оба цикла сливаются и исчезают. Таким образом, в рассматриваемой области фазового пространства вообще не остается устойчивых периодических орбит. Это обратная касательная, или седло-узловая, бифуркация. Простым примером служит окно в хаотическом режиме периода 3 на фиг. 2, в, где касательная бифуркация при $R_0 \approx 33.5$ мкм порождает устойчивый цикл периода 3 и неустойчивый цикл периода 3 (не видный на рисунке). Следует отметить, что касательные бифуркации присущи сценарию Фейгенбаума и представляют единственный механизм, при котором может появиться цикл нечетного периода (в противоположность бифуркации удвоения периода). Окна в хаотическом режиме периода 3 и 4, порожденные касательными бифуркациями, видны на фиг. 1, б в пределах трех последних гармоник.

Наблюдается подобие участков бифуркационной диаграммы в пределах гармонических резонансов: происходят последовательные бифуркации удвоения периода, приводящие к хаотическим осцилляциям радиуса пузырька, и возврат к периодическим осцилляциям через обратные бифуркации удвоения периода и касательные (седло-узловые) бифуркации. С увеличением R_0 картина усложняется, области хаотических колебаний радиуса пузырька расширяются, но подобие кривых сохраняется. Аналогичное подобие в пределах гармонических резонансов сохраняет и трансляционная характеристика $r(t)$.

Связь трансляционных и радиальных характеристик пузырька отчетливо видна на фиг. 2 для $R_0 \in [31, 33.75]$ мкм. На участке $ABCD$ фиг. 2, а реализуется квазистационарное решение для трансляционной координаты $r(t)$. Точка B соответствует первой бифуркации удвоения периода осцилляций радиуса пузырька, в точке C происходит вторая бифуркация, а в критической точке D – как переход к хаотическим осцилляциям радиуса, так и изменение вида трансляционной координаты от квазистационар-

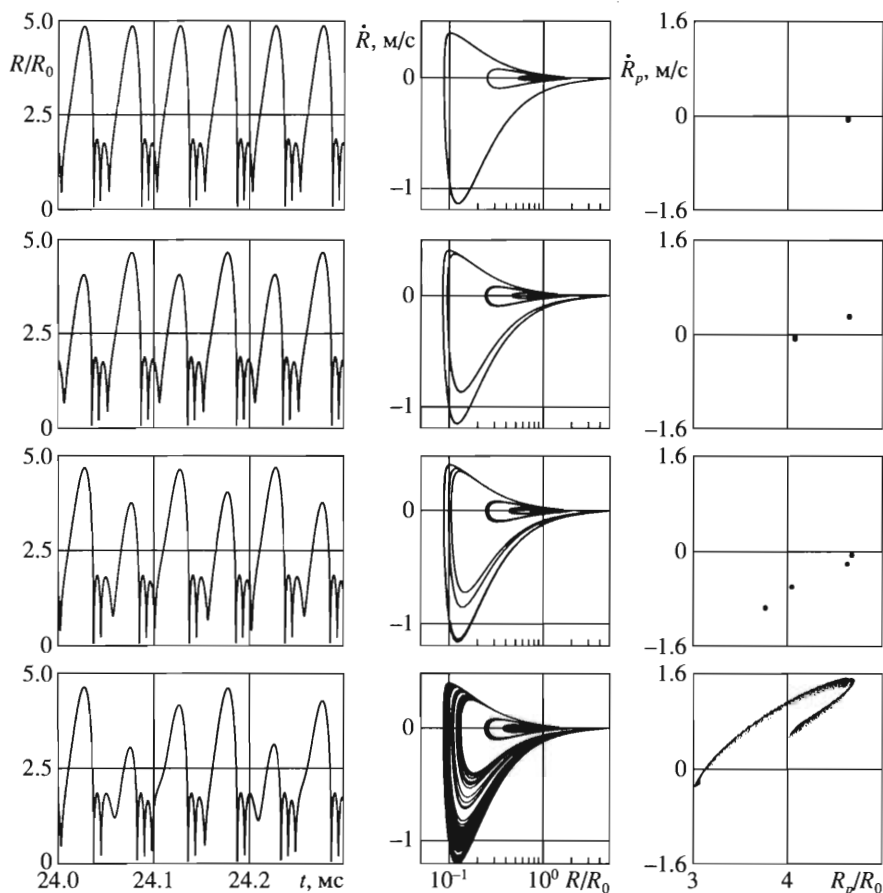


Фиг. 2

ного к хаотическому. На участке DE кривые r_{\max} и r_{\min} становятся нерегулярными, причем амплитуда хаотических трансляционных колебаний (около 1 мм) велика по сравнению с квазистационарным случаем. В точке E происходит возврат к квазистационарному решению для трансляционной координаты $r(t)$ и периодическим осцилляциям радиуса, и на участке EF реализуется регулярная динамика пузырька. Таким образом, квазистационарное решение для трансляционной координаты реализуется для значений R_0 , при которых наблюдаются периодические осцилляции радиуса пузырька; в случаях, когда эти осцилляции становятся хаотическими, трансляционная координата также изменяется нерегулярно.

На фиг. 2, *в* приведена бифуркационная диаграмма без учета трансляционного движения пузырька при фиксированном расстоянии от пучности $r = 13$ мм. Видно, что переход к хаосу происходит по сценарию Фейгенбаума. На фиг. 2, *б* тонкая структура бифуркаций оказывается размытой из-за наличия трансляционного движения.

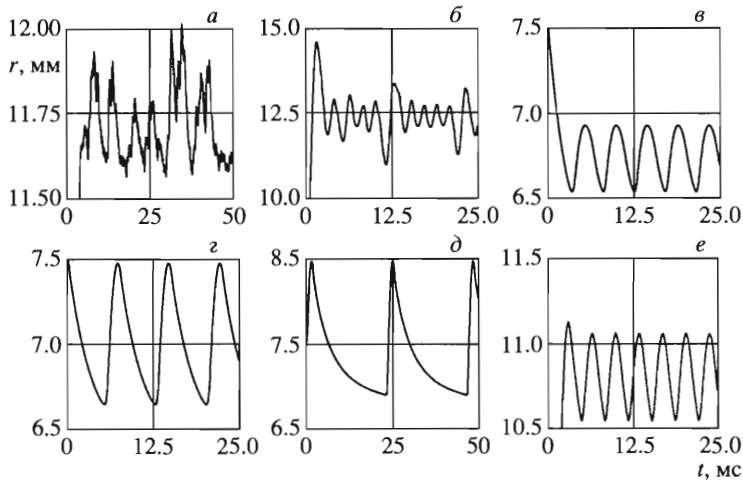
На фиг. 3 проиллюстрирован переход к хаосу на участке $R_0 \in [31, 33]$ мкм. В левой колонке изображены осцилляции радиуса пузырька, в центральной – фазовые



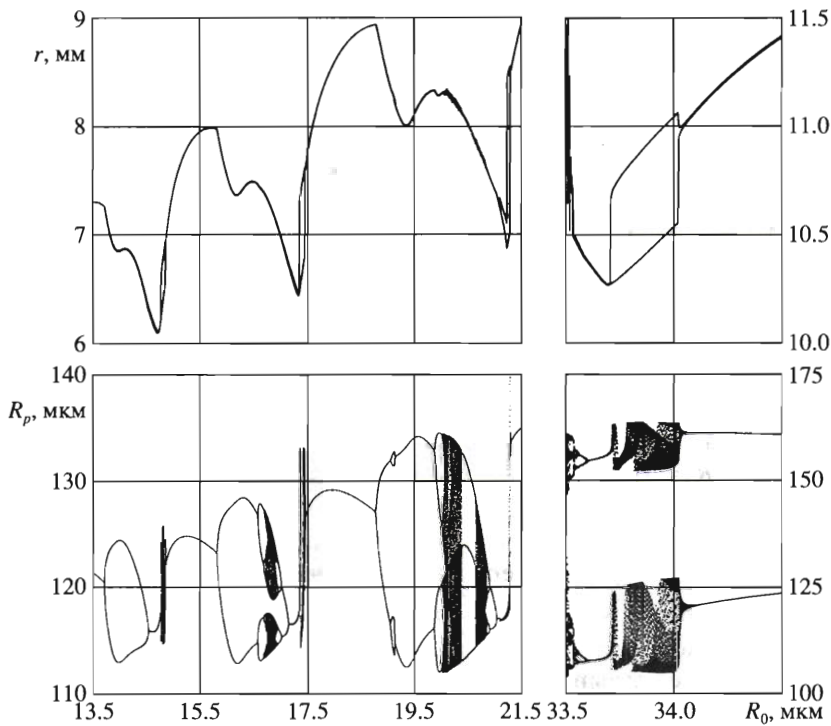
Фиг. 3

траектории, в правой – сечения Пуанкаре. Сверху вниз приведены радиальные характеристики для $R_0 = 31$ мкм (из участка AB фиг. 2а, б), $R_0 = 32$ мкм (из участка BC), $R_0 = 32.3$ мкм (из участка CD), $R_0 = 33$ мкм (из участка DE). В первом ряду период колебаний радиуса пузырька равен периоду акустического поля T . Аттрактор представляет собой предельный цикл периода T , все точки пересечения с фазовой траекторией накладываются друг на друга, так как R_p/R_0 и \dot{R}_p принимают одни и те же значения через период T и сечение Пуанкаре состоит из одной точки. Во втором ряду осцилляции радиуса пузырька повторяются через два периода акустического поля. Фазовая траектория – предельный цикл периода $2T$, что соответствует появлению еще одной точки на сечении Пуанкаре: происходит бифуркация удвоения периода. В третьем ряду демонстрируется следующая бифуркация удвоения периода, приводящая к возникновению предельного цикла периода $4T$. Осцилляции радиуса пузырька в нижнем ряду носят хаотический характер, фазовая траектория представляет собой странный аттрактор, структура которого также прослеживается и на сечении Пуанкаре – никакие две точки не совпадают друг с другом.

На фиг. 4, а, б приведено изменение трансляционной координаты в процессе длительного воздействия акустического поля для иллюстрации хаотического “танцую-



Фиг. 4



Фиг. 5

щего" движения пузырька при $R_0 = 33$ мкм и $R_0 = 40$ мкм из двух окон нерегулярного изменения трансляционной координаты ($R_0 \in [32.4, 33.5]$ мкм и $R_0 \in [37.5, 42]$ мкм, см. фиг. 1, а и 2, а). Этим областям параметра R_0 соответствуют хаотические осцилляции радиуса пузырька (см. фиг. 1, б и 2, б). Видно, что амплитуда огибающей трансляционной координаты $r(t)$ может достигать 3.5 мм.

Помимо хаотического было обнаружено также и периодическое “танцующее” движение пузырька. На фиг. 5 изображены четыре области изменения параметра R_0 (“окна периодичности”), в которых реализуются низкочастотное квазипериодическое решение $r(t)$ и соответствующие им участки бифуркационной диаграммы для радиуса пузырька. Заметим, что имеет место подобие участков кривых для трансляционных и радиальных характеристик в пределах гармонических резонансов. “Окнам периодичности” соответствуют окна хаотических радиальных осцилляций на бифуркационной диаграмме для радиуса пузырька, возникающие в граничных ламинарных областях между гармоническими резонансами.

На фиг. 4, ϵ – ϵ показано изменение трансляционной координаты пузырька для каждой из четырех областей соответственно для $R_0 = 14.8, 17.4, 21.2, 34.0$ мкм. Максимальные амплитуда огибающей трансляционной координаты ($A_{\text{mod}} = r_{\text{max}} - r_{\text{min}} = 1.6$ мм) и период низкочастотной модуляции ($T_{\text{mod}} = 24$ мс, $T_{\text{mod}} \approx 500 \times T$) наблюдаются при $R_0 \in [21.1, 21.3]$ мкм. Приведем основные характеристики “танцующего” движения пузырька:

	Хаотическое движение			Периодическое движение		
R_0 , мкм	32.4–33.5	37.5–42	14.77–14.86	17.35–17.46	21.1–21.3	33.7–34
A_{mod} , мм	0.5	3.5	0.4	0.8	1.6	0.5
T_{mod} , мс	–	2	4.5	8	24	3.5

Отметим, что с увеличением равновесного радиуса возникающие “окна периодичности” становятся шире. Кроме того, амплитуда и период колебаний огибающей трансляционной координаты пузырька из каждого последовательного “окна периодичности” (кроме последнего при $R_0 \in [33.7, 34]$ мкм) также возрастают.

4. Заключение. Построенные бифуркационные диаграммы для радиуса пузырька в зависимости от его равновесного радиуса показывают, что в пределах гармонических резонансов происходит переход к хаотическим и возврат к периодическим осцилляциям по сценарию Фейгенбаума. Таким образом, имеет место подобие участков бифуркационных диаграмм в областях гармонических резонансов, причем с увеличением равновесного радиуса возникают каскады бифуркаций и области хаотических осцилляций увеличиваются.

Аналогичное подобие сохраняет и трансляционная характеристика. Показано, что в зависимости от характера радиальных осцилляций реализуются три режима для трансляционной координаты: квазистационарный, квазипериодический и хаотический. С другой стороны, характер радиальных осцилляций определяется не только равновесным радиусом пузырька, но и его положением в пространстве. Таким образом, при исследовании динамики пузырька не достаточно рассмотрения только радиальных колебаний его поверхности, необходимо учитывать перемещение пузырька в пространстве.

Квазистационарный режим реализуется для тех равновесных радиусов, при которых осцилляции пузырька носят периодический характер периода $T, 2T$ и т.д. Там же, где радиальные осцилляции хаотичны, трансляционная координата изменяется нерегулярно и возникает хаотическое “танцующее” движение пузырька, при этом амплитуда огибающей трансляционной координаты может достигать 3.5 мм. Помимо хаотического “танцующего” движения пузырька при определенных равновесных радиусах реализуется и квазипериодическое трансляционное движение, представляющее собой суперпозицию регулярных низкочастотных колебаний достаточно большой амплитуды с высокочастотными колебаниями малой амплитуды. “Окнам периодичности” соответствуют окна хаотических радиальных осцилляций на бифуркационной диаграм-

ме для радиуса пузырька, возникающие в граничных ламинарных областях между гармоническими резонансами при $R_0 > 13$ мкм.

При этом максимальные амплитуда огибающей трансляционной координаты $A_{\text{mod}} = 16$ мм и период низкочастотной модуляции $T_{\text{mod}} = 24$ мс ($T_{\text{mod}} \approx 500 \times T$) наблюдаются при $R_0 \in [21.1, 21.3]$ мкм.

Полученный результат может быть интерпретирован как возможный механизм возникновения хаотического “танцующего” движения пузырька, который не предполагает нарушения сферической формы пузырька.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-97912).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lauterborn W., Parlitz U., Holzfuss J., Billo A., Akhatov I.* Acoustic Chaos // Chaotic, Fractal, and Nonlinear Signal Processing: Proc. 3rd Techn. Conf. Nonlinear Dynamics (Chaos) and Full Spectrum Processing. Mystic, Connecticut, USA, 1995 / Ed. R.A. Katz. N. Y.: Woodbury, 1996. V. 375. P. 217–230.
2. *Lauterborn W.* Cavitation // Encyclopedia of Acoustics / Ed. M.J. Crocker. N. Y.: Wiley, 1997. V. 1. P. 263–270.
3. *Lauterborn W., Kurz T., Parlitz U.* Experimental nonlinear physics // Intern. J. Bifurc. Chaos. 1997. V. 7. № 9–10. P. 2003–2033.
4. *Lauterborn W.* Numerical investigation of nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids // J. Acoust. Soc. America. 1976. V. 59. № 2. P. 283–293.
5. *Parlitz U., Englisch V., Scheffczyk C., Lauterborn W.* Bifurcation structure of bubble oscillators // J. Acoust. Soc. America. 1990. V. 88. № 2. P. 1061–1077.
6. *Lauterborn W., Parlitz U.* Methods of chaos physics and their application to acoustics // J. Acoust. Soc. America. 1988. V. 84. № 6. P. 1975–1993.
7. *Lauterborn W., Mettin R.* Nonlinear bubble dynamics: response curves and more // Sonochemistry and Sonoluminescence / Eds L.A. Crum et al., Dordrecht: Kluwer, 1999. P. 63–72.
8. *Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.D., Parlitz U., Lauterborn W.* The role of surface tension in stable single-bubble sonoluminescence // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. № 2. P. 227–230.
9. *Akhatov I., Ohl C.D., Mettin R., Lauterborn W.* Giant response in dynamics of small bubbles // Proc. 16th Intern. Congr. Acoustics and 135th Meeting of the ASA. Seattle, 1998. P. 2285–2286.
10. *Yosioka K., Kawasima Y., Hirano H.* Acoustic radiation pressure on bubbles and their logarithmic decrement // Acustica. 1955. V. 5. № 3. P. 173–178.
11. *Eller A.I., Crum L.A.* Instability of the motion of a pulsating bubble in a sound field // J. Acoust. Soc. America. 1970. V. 47. № 3. Pt 2. P. 762–767.
12. *Benjamin T.B., Ellis A.T.* Self-propulsion of asymmetrically vibrating bubbles // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. P. 65–80.
13. *Zardi D., Seminara G.* Chaotic mode competition in the shape oscillations of pulsating bubbles // J. Fluid Mech. 1995. V. 286. P. 257–276.
14. *Watanabe T., Kukita Y.* Translational and radial motions of a bubble in an acoustic standing wave field // Phys. Fluids A. 1993. V. 5. № 11. P. 2682–2688.
15. *Rayleigh, Lord.* On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // Phil. Mag. 1917. V. 34. № 200. P. 94–97.
16. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1924 = Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гос-техиздат, 1947. 928 с.
17. *Нугматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
18. *Cordry S.M.* Bjerknes forces and temperature effects in single-bubble sonoluminescence. PhD Thesis. The University of Mississippi, 1995. 102 p.

19. Knapp R.T., Daily J.W., Hammit F.G. Cavitation. N. Y., etc.: McGraw-Hill, 1970 = Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
20. Akhatov I., Mettin R., Ohl C.D., Parlitz U., Lauterborn W. Bjerknæs force threshold for stable single bubble sonoluminescence // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. № 3. P. 3747–3750.
21. Mettin R., Akhatov I., Parlitz U., Ohl C.D., Lauterborn W. Bjerknæs forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. № 3. P. 2924–2931.
22. Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К., Галева Г.Я., Нигматулин Р.И., Хисматуллин Д.Б. О слабых колебаниях газового пузырька в сферическом объеме сжимаемой жидкости // ПММ. 1997. Т. 61. № 6. С. 952–962.
23. Nigmatulin R., Akhatov I., Vakhitova N., Lahey R. The resonant supercompression and sonoluminescence of a gas bubble in a liquid-filled flask // Chem. Eng. Comm. 1998. V. 168. P. 145–169.
24. Nigmatulin R., Akhatov I., Vakhitova N., Lahey R.T. On the forced oscillations of a small gas bubble in a spherical liquid-filled flask // J. Fluid Mech. 2000. V. 414. P. 47–73.
25. Prosperetti A., Lezzi A. Bubble dynamics in a compressible liquid. 1. First-order theory // J. Fluid Mech. 1986. V. 168. P. 457–478.
26. Lezzi A., Prosperetti A. Bubble dynamics in a compressible liquid. 2. Second-order theory // J. Fluid Mech. 1987. V. 185. P. 289–321.
27. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
28. Kameda M., Matsumoto Y. Shock waves in liquids containing small gas bubbles // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 2. P. 322–335.
29. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Berlin: Springer, 1987 = Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
30. Schuster H. Deterministic Chaos. An Introduction. Weinheim: Physik-Verlag, 1984 = Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 237 с.

Фарго, шт. Сев. Дакота (США), Уфа
e-mail: Iskander.Akhatov@NDSU.NoDak.edu
sveta@imech.anrb.ru

Поступила в редакцию
13.III.2003