

УДК 532.5 : 534.26

© 2005 г. В. Д. Лукьянов, Г. Л. Никитин

ОБ ОТРАЖЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ОТ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕГОРОДОК В ВОЛНОВОДЕ

Исследуется стационарное отражение акустических волн от полубесконечной системы равноотстоящих перегородок в волноводе. Каждая перегородка представляет собой жесткую диафрагму с отверстием, которое закрыто жестким подвижным клапаном. Клапан упруго связан с диафрагмой и способен совершать малые колебания. Получено точное аналитическое решение для случая волновода произвольного сечения, а для случая плоской задачи приведены результаты численного исследования зависимостей коэффициентов отражения нормальных волн от частоты падающего поля. Для сравнения даны аналитические выражения и графики частотных зависимостей для коэффициентов отражения и прохождения нормальных волн через одну и две аналогичные перегородки в волноводе.

Распространение волн различной природы в периодических одномерных, двумерных и трехмерных структурах, состоящих либо из точечных масс, соединенных упругой связью, либо из их электрических или акустических эквивалентов, рассматривалось ранее [1, 2].

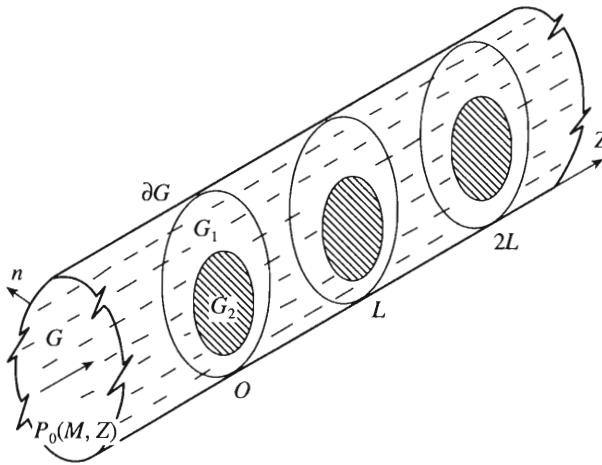
Как известно, при исследовании распространения звука в акустических устройствах (звукопроводах, акустических фильтрах), выполненных в виде труб (волноводов) с различными сочленениями (камерами, расширениями, заглушками и т.д.), рассматривают эти элементы как неоднородности с сосредоточенными параметрами. Акустические свойства неоднородностей характеризуют акустической массой и акустической податливостью [3]. Простейшая механическая модель, которую можно использовать для описания распространения и рассеяния звука на неоднородностях в подобных акустических устройствах – это поршень, подкрепленный упругой пружиной. Были рассмотрены [4] колебания одного поршня, полностью перекрывающего канал круглого трубопровода. Исследовалось рассеяние волн на поршне, расположенном на стыке двух волноводов с различными стенками жесткими и мягкими [5].

Ниже получено точное решение задачи об отражении нормальных волн акустического волновода от одной или двух перегородок, а также от полубесконечной системы равноотстоящих перегородок в нем. Перегородки представляют собой жесткие экраны с отверстиями, которые перекрыты подкрепленными упругими пружинами подвижными поршнями (фиг. 1). Рассмотренная задача является математической моделью при изучении проблемы отражения звука от акустических фильтров с большим числом элементов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим акустический волновод, представляющий собой заполненное идеальной сжимаемой средой цилиндрическое тело с произвольным поперечным сечением G , имеющим границу ∂G . Геометрия задачи и выбор системы координат показаны на фиг. 1. Ось z параллельна образующей цилиндрического тела. Акустическое давление $P(M, z)$ в среде заполняющей волновод, удовлетворяет одному уравнению Гельмгольца

$$\left(\Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P(M, z) + k^2 P(M, z) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Точка M расположена в поперечном сечении волновода с координатой z , Δ_{\perp} – двумерный оператор Лапласа в поперечном сечении волновода, k – волновое число, c –



Фиг. 1

скорость звука в среде, ω – круговая частота. Множитель $\exp(-i\omega t)$, задающий гармоническую зависимость волновых процессов от времени t , здесь и всюду далее в выражениях для давления опущен.

На абсолютно жесткой стенке волновода выполнено граничное условие Неймана

$$\frac{\partial P}{\partial n}(M, z) = 0 \text{ при } M \in \partial G, \quad -\infty < z < \infty$$

где n – нормаль к боковой поверхности волновода.

Исследуется стационарное рассеяние нормальных волн на полубесконечной системе поперечных перегородок в волноводе. Перегородки расположены в сечениях волновода $z = jL$; здесь и везде далее $j = 0, 1, 2, \dots$. Каждая перегородка представляет собой жесткую диафрагму, занимающая область G_1 . Отверстие в диафрагме перекрыто жестким подвижным клапаном произвольной формы, который занимает область G_2 , причем $G_1 \cup G_2 = G$ и $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. На поверхности диафрагмы выполнено граничное условие Неймана

$$\frac{\partial P}{\partial z}(M, jL \pm 0) = 0 \text{ при } M \in G_1 \tag{1.1}$$

Клапан массой m подкреплён упругой пружиной жесткостью g и совершает малые колебания около положения равновесия. Уравнение движения клапана с учетом гармонической зависимости волновых процессов от времени запишем в виде

$$(g - m\omega^2)U_j = \iint_{G_2} (P(M, jL - 0) - P(M, jL + 0))dS \tag{1.2}$$

где U_j – величина смещения клапана, расположенного в сечении $z = jL$, от положения равновесия.

Кинематическое условие контакта клапана со средой, заключающееся в равенстве смещения клапана и нормальной к нему составляющей смещения среды вблизи клапана, имеет вид

$$U_j = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial P}{\partial z}(M, jL \pm 0) = 0 \text{ при } M \in G_2 \tag{1.3}$$

Рассеянное на перегородках акустическое поле должно удовлетворять принципу предельного поглощения, а в окрестности точек сочленения диафрагм со стенками волновода и клапанами – условиям Мейкснера.

В качестве источника возбуждения колебаний в волноводе с перегородками будет выбираться распространяющаяся нормальная волна $Q_0(M, z)$, набегающая на перегородки со стороны отрицательных значений z .

2. Связь между величиной смещения клапана и амплитудами нормальных волн. В акустическом волноводе с жесткими стенками без перегородок имеется набор решений однородной задачи, называемых нормальными волнами

$$p_s^\pm(M, z) = A\varphi_s(M)\exp(\pm i\gamma_s z), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Постоянная A имеет размерность давления. Функции $\varphi_s(M)$, которые описывают распределение акустического давления у нормальной волны в сечении волновода – собственные функции, а $\mu_s = -\lambda_s^2$ – собственные числа задачи Неймана для оператора Лапласа Δ_\perp в области G с границей ∂G :

$$\Delta_\perp \varphi_s(M) = \mu_s \varphi_s(M) \text{ при } M \in G \text{ и } \frac{\partial \varphi_s}{\partial n}(M) = 0 \text{ при } M \in \partial G.$$

Собственные числа $\mu_s \leq 0$ занумерованы в порядке их убывания, собственные функции $\varphi_s(M)$ образуют ортогональный базис в пространстве $L_2(G)$.

Постоянная распространения γ_s нормальной волны $p_s^\pm(M, z)$ связана с собственным числом μ_s соотношением $\gamma_s^2 = k^2 + \mu_s$. Частоты $\tilde{\omega}_s$, на которых постоянная распространения γ_s обращается в нуль, называются частотами зарождения нормальных волн. На частотах выше частоты зарождения при $k > \lambda_s$ нормальная волна $p_s^+(M, z)$ является распространяющейся и переносит колебательную энергию в положительном, а волна $p_s^-(M, z)$ в отрицательном направлении оси Oz .

Нормировка собственных функций $\varphi_s(M)$ для распространяющихся волн выбирается в виде

$$\frac{\gamma_s}{\sigma k} \iint_G \varphi_s^2(M) dS = 1 \quad (2.2)$$

где σ – площадь поперечного сечения волновода, выбранная так, что все распространяющиеся нормальные волны $p_s^\pm(M, z)$ переносят через поперечное сечение волновода одинаковые средние за период потоки энергии

$$E = \pm \frac{1}{2\rho\omega} \operatorname{Im} \iint_G \overline{p_s^\pm(M, z)} \frac{\partial p_s^\pm}{\partial z}(M, z) dS = \frac{A^2}{2\rho c}$$

Здесь одновременно берутся индексы либо плюс, либо минус, черта означает комплексное сопряжение.

В частности, из условия (2.2) следует, что собственному числу $\mu_0 = 0$ отвечает в области G собственная функция $\varphi_0(M) = 1$, задающая равномерное распределение давления в поперечном сечении волновода. Эту волну назовем поршневой волной, она является распространяющейся при всех частотах возбуждения.

Для неоднородных волн волновода условие “нормировки” выбирается также согласно соотношению (2.2).

Отметим, что в задачах, где имеет место разделение переменных в области G , под номером собственной функции s следует понимать мультииндекс $s = (s_1, s_2)$.

Будем характеризовать смещение клапана, расположенного в сечении $z = jL$, безразмерной величиной u_j , связанной со смещением этого клапана U_j соотношением

$$U_j = \frac{Au_j}{-i\omega\rho c} \tag{2.3}$$

Пусть со стороны отрицательных значений z на препятствия набегают одна из распространяющихся нормальных волн с номером s

$$Q_0(M, z) = p_s^+(M, z) \tag{2.4}$$

Полное акустическое поле в волноводе слева от первой перегородки ищем в виде разложения по нормальным волнам (всюду далее суммирование ведется по n от нуля до бесконечности)

$$P(M, z) = Q_0(M, z) + \sum r_{ns} p_s^-(M, z) \tag{2.5}$$

Ряд в формуле (2.5) описывает отраженное поле от первой перегородки в волноводе, расположенной в сечении $z = 0$, r_{ss} – коэффициент отражения волны $p_s^+(M, z)$, r_{ns} – коэффициент трансформации падающей волны в n -ю отраженную нормальную волну ($n \neq s$).

Покажем, что искомые величины r_{ns} в представлении (2.5) однозначно определяются по амплитуде колебания клапана U_0 . Для этого, привлекая характеристическую функцию $\chi(M)$ области G_2 ($\chi(M) = 1$, если $M \in G_2$, и $\chi(M) = 0$, если $M \in G_1$), перепишем граничные условия (1.1) и (1.3) в виде одного условия

$$\chi(M)U_0 = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial P}{\partial z}(M, -0) \text{ при } M \in G \tag{2.6}$$

Условие (2.6) при учете представления (2.5) приводит к равенству

$$\rho\omega^2 U_0 = i\gamma_s p_s^+(M, 0) + \sum (-i\gamma_n) r_{ns} p_n^-(M, 0) \tag{2.7}$$

Умножая равенство (2.7) на функцию $\varphi_n(M)/(\sigma k)$ при $n' = 0, 1, 2, \dots$ и интегрируя полученное равенство по всей поверхности перегородки G , с учетом нормировки (2.2) и соотношения (2.3) получим

$$r_{ns} = \delta_{ns} - \eta_n u_0; \quad \eta_n = \frac{1}{\sigma} \iint_G \chi(M) \varphi_n(M) dS = \frac{1}{\sigma} \iint_{G_2} \varphi_n(M) dS \tag{2.8}$$

где δ_{ns} – символ Кронекера, η_n – коэффициенты Фурье характеристической функции $\chi(M)$: $\chi(M) = \sum \eta_n \varphi_n(M)$. Отметим, что $\eta_0 = \sigma_2/\sigma$, где σ_2 – площадь области G_2 , которую занимает клапан.

Акустическое давление $P_j(M, z)$ на участке волновода между соседними перегородками, расположенными в сечениях $z = jL$ и $z = (j + 1)L$, ищем в виде разложения в ряд по стоячим волнам

$$P_j(M, z) = \sum a_n^{(j)} q_n^{(s)}(M, z - z_c^{(j)}) + b_n^{(j)} q_n^{(a)}(M, z - z_c^{(j)}) \tag{2.9}$$

где

$$q_n^{(s)}(M, z) = (p_n^+(M, z) + p_n^-(M, z))/2 = A\varphi_n(M)\cos(\gamma_n z)$$

$$q_n^{(a)}(M, z) = i(p_n^+(M, z) - p_n^-(M, z))/2 = A\varphi_n(M)\sin(\gamma_n z)$$

$a_n^{(j)}$ и $b_n^{(j)}$ – амплитуды стоячих волн, $q_n^{(s)}(M, z)$ – стоячая волна в камере, симметричная относительно поперечного сечения $z = z_c^{(j)} = \left(j + \frac{1}{2}\right)L$, $q_n^{(a)}(M, z)$ – стоячая волна, антисимметричная относительно этого сечения.

Из граничного условия (2.6) для каждого клапана с учетом представления (2.9) получим

$$\rho\omega^2 U_{j+k}\chi(M) = \sum \gamma_n (-1)^k \left(a_n^{(j)} q_n^{(a)}\left(M, \frac{L}{2}\right) + b_n^{(j)} q_n^{(s)}(M, L/2) \right), \quad k = 0, 1 \quad (2.10)$$

Как и при выводе формулы (2.8), из уравнений (2.10) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$a_n^{(j)} \sin(\gamma_n L/2) + b_n^{(j)} \cos(\gamma_n L/2) = i\eta_n u_j$$

$$-a_n^{(j)} \sin(\gamma_n L/2) + b_n^{(j)} \cos(\gamma_n L/2) = i\eta_n u_{j+1}$$

из которой находим величины $a_n^{(j)}$ и $b_n^{(j)}$. Если $\sin(\gamma_n L) \neq 0$, то получим

$$a_n^{(j)} = \frac{i\eta_n}{2\sin(\gamma_n L/2)} (u_j - u_{j+1}) \quad (2.11)$$

$$b_n^{(j)} = \frac{i\eta_n}{2\cos(\gamma_n L/2)} (u_j + u_{j+1}) \quad (2.12)$$

Случаю $\sin(\gamma_n L/2) = 0$ соответствует равенство смещений клапанов $u_j = u_{j+1}$, тогда $a_n^{(j)} = 0$, а величина $b_n^{(j)}$ определяется формулой (2.12). В случае $\cos(\gamma_n L/2) = 0$ имеем равенство $u_j = -u_{j+1}$, тогда $b_n^{(j)} = 0$, а величина $a_n^{(j)}$ определяется формулой (2.11).

3. О рассеянии нормальных волн на полубесконечной системе перегородок в волноводе. Для окончательного решения задачи о рассеянии нормальных волн на перегородках в волноводе следует определить амплитуды смещений клапанов. Искомые амплитуды найдем, используя уравнения их движения (1.2), откуда получим для этих амплитуд бесконечную систему линейных алгебраических уравнений.

Уравнение движения клапана в сечении $z = 0$ имеет вид

$$(g - m\omega^2)U_0 = \iint_{G_2} (p_s^+(M, 0) + \sum r_{ns} p_n^-(M, 0)) dS - \iint_{G_2} (\sum a_n^{(0)} q_n^{(s)}(M, L/2) - b_n^{(0)} q_n^{(a)}(M, L/2)) dS \quad (3.1)$$

Выполняя интегрирование в правой части равенства (3.1) и учитывая соотношение (2.3) и формулы (2.11), (2.12) имеем

$$u_0 \left(Z_* + \sum Z_n + \frac{1}{2} \sum (Z_n^+ + Z_n^-) \right) = \frac{u_1}{2} \sum (Z_n^+ + Z_n^-) + 2\eta_s \quad (3.2)$$

$$Z_* = -\frac{i\omega m_0}{\rho c} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right), \quad Z_n = \frac{k\eta_n^2}{\gamma_n}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{m}}, \quad m_0 = \frac{m}{\sigma_2}$$

$$Z_n^+ = iZ_n \operatorname{ctg}(\gamma_n L/2), \quad Z_n^- = -iZ_n \operatorname{tg}(\gamma_n L/2)$$

Здесь Z_* – импеданс клапана в вакууме нормированный, как и все импедансы в дальнейшем, на импеданс ρc , ω_0 – собственная частота клапана в вакууме, m_0 – поверхностная плотность клапана, Z_n – нормированный импеданс взаимодействия клапана, расположенного в сечении $z = 0$, и n -й нормальной волны, Z_n^\pm – нормированный импеданс камеры с жесткими стенками и двумя подвижными клапанами для симметричной (индекс плюс) и для антисимметричной (индекс минус) n -й стоячей волны.

Уравнение движения клапана, расположенного в сечении с координатой $z = (j+1)L$, имеет вид

$$(g - m\omega^2)U_{j+1} = \iint_{G_2} (P_j(M, (j+1)L) - P_{j+1}(M, (j+1)L))dS \quad (3.3)$$

Используя представление (2.10), соотношение (2.3) и формулы (2.11), (2.12), перепишем уравнение движения клапана (3.3) в виде

$$u_{j+1}(Z_* + \sum (Z_n^+ + Z_n^-)) = \frac{1}{2}(u_j + u_{j+1})\sum (Z_n^+ - Z_n^-) \quad (3.4)$$

Для этого линейного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами нужно решить краевую задачу с условием (3.3) при $j = 0$ и с учетом принципа предельного поглощения – условием убывания u_j при $j \rightarrow \infty$.

Последовательность величин u_j ищем в виде

$$u_j = \exp(ij\Gamma) \quad (3.5)$$

где Γ – постоянная распространения волн в волноводе с периодической системой перегородок.

Для определения постоянной распространения Γ из уравнения (3.4) с учетом представления (3.5) имеем дисперсионное уравнение

$$\cos \Gamma = W; \quad W = (Z_* + \sum (Z_n^+ + Z_n^-))(\sum (Z_n^+ - Z_n^-))^{-1} \quad (3.6)$$

Отметим, что $W(\omega)$ – вещественная величина при любом значении частоты ω .

Уравнение (3.6) имеет вещественные корни при условии $|W(\omega)| < 1$, которое определяет частотные области – полосы пропускания периодической системы перегородок в волноводе, когда одинаковые перегородки расположены на равном расстоянии L . При этом условии уравнение (3.6) имеет на интервале $(-\pi, \pi)$ два простых вещественных корня $\Gamma_{1,2} = \pm \arccos W$, которым соответствуют два линейно независимых ограниченных решения $u_j^{(1)} = \exp(ij\Gamma_1)$ и $u_j^{(2)} = \exp(ij\Gamma_2)$. В волноводе с

полубесконечным набором перегородок им соответствуют два гармонических процесса, которые будем называть бегущими волнами. Решение $u_j^{(1)}$ соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении оси Oz , а $u_j^{(2)}$ – в отрицательном. Если $|W(\omega)| = 1$, то уравнение (3.6) имеет кратные корни. В этом случае при $W = 1$ одно решение разностного уравнения имеет вид $u_j^{(1)} = u_0$, и клапаны колеблются синфазно, а при $W = -1$ выполняются соотношения $u_j^{(1)} = (-1)^j u_0$, и соседние клапаны колеблются противофазно. Другое линейно независимое решение имеет вид $u_j^{(2)} = ju_j^{(1)}$ и не является ограниченным.

При $|W(\omega)| > 1$ в волноводе с периодической системой перегородок отсутствуют распространяющиеся волны, поскольку корни уравнения (3.6) чисто мнимые и им соответствуют экспоненциально растущие или экспоненциально убывающие неоднородные волны.

После нахождения величины постоянной распространения Γ значение амплитуды смещения u_0 определим из уравнения (3.2) с учетом соотношения (3.5)

$$u_0 = 2\eta_s \left(Z_* + \sum Z_n + \frac{1}{2} \sum (Z_n^+ + Z_n^-) - \frac{1}{2} \exp(i\Gamma) \sum (Z_n^+ - Z_n^-) \right)^{-1} \quad (3.7)$$

Используя формулу Эйлера для экспоненты с мнимым показателем и уравнение (3.6), выразим величину $\exp(i\Gamma)$ через импедансы системы и запишем выражение (3.7) в виде

$$u_0 = 2\eta_s / Z; \quad Z = Z_* + \sum Z_n + \tilde{Z}, \quad \tilde{Z} = (Z_*/2 + \sum Z_n^+)^{1/2} (Z_*/2 + \sum Z_n^-)^{1/2} - Z_*/2 \quad (3.8)$$

где Z – импеданс полубесконечной системы перегородок в волноводе, $\sum Z_n$ – импеданс левого канала волновода $z < 0$, \tilde{Z} – импеданс правого канала полубесконечной системы перегородок при $z > 0$.

Коэффициенты r_{ns} согласно равенству (2.8) с учетом полученного выражения (3.8) вычисляются по формуле

$$r_{ns} = \delta_{ns} - 2\sqrt{Z_n Z_s} / Z \quad (3.9)$$

Отметим, что выбор нормировки нормальных волн в соотношении (2.1) позволил выразить принцип взаимности в наиболее простой форме – здесь имеется симметрия матрицы рассеяния $r_{ns} = r_{sn}$.

4. Отражение волны от одной и двух перегородок. Для анализа результатов, полученных выше, приведем решения задач об отражении волны типа (2.4) от одной и двух перегородок в волноводе.

Пусть две одинаковые перегородки с клапанами расположены в сечениях $z = 0$ и $z = L$. Акустические давления в левой части волновода, где $-\infty < z < 0$, ищем в виде разложения

$$P(M, z) = Q_0(M, z) + \sum r_{ns}^{(2)} P_s^-(M, z)$$

в правой части волновода при $z > L$ – в виде

$$P(M, z) = \sum t_{ns}^{(2)} P_n^+(M, z - L)$$

где $r_{ss}^{(2)}, t_{ss}^{(2)}$ – коэффициенты отражения и прохождения, а $r_{ns}^{(2)}$ и $t_{ns}^{(2)}$ при $n \neq s$ – коэффициенты трансформации падающей волны в n -ю отраженную и прошедшую нормальную волну. Для акустического давления между перегородками при $0 < z < L$ имеем представление (2.9).

Как и при получении формулы (2.8), имеем $t_{ns} = \eta_n u_1$, где u_1 – смещение клапана, расположенного в сечении $z = L$.

Окончательные выражения для коэффициентов отражения, прохождения и трансформации в случае двух перегородок имеют вид

$$r_{ns}^{(2)} = \delta_{ns} - 2\sqrt{Z_n Z_s} / Z^{(2)}, \quad t_{ns}^{(2)} = 2\sqrt{Z_n Z_s} / Z^{(2)} \quad (4.1)$$

$$Z^{(2)} = Z_* + \sum Z_n + \hat{Z}, \quad \hat{Z} = ((Z_* + \sum Z_n)^{-1} + 2(\sum (Z_n^+ + Z_n^-))^{-1})^{-1}$$

где $Z^{(2)}$ – импеданс системы двух клапанов и камеры между ними в волноводе, \hat{Z} – импеданс системы, состоящей из камеры ($0 < z < L$), находящейся справа от первой перегородки ($z = 0$), второй перегородки ($z = L$) и полубесконечного канала волновода ($z > L$), расположенного справа от второй перегородки.

Если в волноводе только одна перегородка в сечении $z = 0$, то выражения для коэффициентов отражения от одной перегородки ($r_{ss}^{(1)}$), прохождения ($t_{ss}^{(1)}$) и трансформации ($r_{ns}^{(1)}$ и $t_{ns}^{(1)}$) получим из формул (4.1), выполняя в них предельный переход $L \rightarrow 0$ и уменьшая массу клапана вдвое. Будем иметь

$$r_{ns}^{(1)} = \delta_{ns} - 2\sqrt{Z_n Z_s} / Z^{(1)}, \quad t_{ns}^{(1)} = 2\sqrt{Z_n Z_s} / Z^{(1)}, \quad Z^{(1)} = Z_* + 2\sum Z_n \quad (4.2)$$

где $Z^{(1)}$ – импеданс одного клапана в волноводе.

Первое выражение (4.2) можно также получить, если в первой формуле (4.1) считать, что импедансы каналов волновода справа и слева от перегородки одинаковы и $\hat{Z} = \sum Z_n$. Смещение клапана u_0 находится тогда согласно первой формуле (3.8), в которой следует заменить импеданс Z на $Z^{(1)}$.

Отметим, что если в первой формуле (4.2) считать $Z^{(1)} = Z_* + \sum Z_n$, то получим выражение для коэффициента отражения от одной перегородки в волноводе, справа от которой в волноводе находится вакуум.

5. Обсуждение результатов. Исследуем зависимости коэффициентов отражения нормальной волны поршневого типа ($s = 0$) от частоты падающего поля ω .

В случае одной перегородки из первой формулы (4.2) следует, что

$$r_{00}^{(1)} = (Z_* + 2(Z_1 + Z_2 + \dots))(Z_* + 2(Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots))^{-1} \quad (5.1)$$

При стремлении частоты падающего поля ω к частоте зарождения $\tilde{\omega}_n$ n -й моды волновода ($n > 0$) имеем $\gamma_n \rightarrow 0$ и $Z_n \rightarrow \infty$. Выполняя этот предельный переход в формуле (5.1), получим, что $\lim r_{00}^{(1)} = 1$ при $\omega \rightarrow \tilde{\omega}_n$.

Частота полного прохождения падающей нулевой нормальной волны, на которой $r_{00}^{(1)} = 0$, а $t_{00}^{(1)} = 1$, согласно выражению (5.1) определяется из уравнения $Z_* + 2(Z_1 + Z_2 + \dots) = 0$. Оно всегда имеет единственное решение. Во-первых, искомая частота меньше частоты зарождения первой нормальной волны $\tilde{\omega}_1$, так как при этом условии входящие в уравнение импедансы – чисто мнимые величины. Во-вто-

рых, она меньше собственной частоты клапана ω_0 , так как здесь с возрастанием частоты от нуля до собственной частоты клапана значение $\text{Im}(-Z_*)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до нуля, а величина $\text{Im}(Z_1 + Z_2 + \dots)$ монотонно убывает от нуля до некоторого конечного значения.

На частоте полного прохождения падающего поля $p_0^+(M, z)$ имеет место соотношение $\sigma_2|u_0| = \sigma|u|$, где u_0 – смещение клапана, u – смещение жидкости в падающей волне в сечении $z = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда клапан полностью перекрывает сечение волновода, т.е. область G_2 совпадает с областью G . Интерес представляет рассеяние на клапане только нормальной волны $p_0^+(M, z)$, прочие нормальные волны отражаются от клапана как от абсолютно жесткой стенки, так как среднее давление этих волн на клапан равно нулю и поршень неподвижен. В случае падения на перегородку нормальной волны $p_0^+(M, z)$ отражается только волна $r_{00}^{(1)} p_0^-(M, z)$. Формула (5.1) для коэффициента отражения переписывается в виде

$$r_{00}^{(2)} = 1 - 2Z_0/Z^{(2)} \quad (5.2)$$

в то время как $r_{n0}^{(1)} = 0$ при $n > 0$. В этом случае равенство $r_{00}^{(1)} = 0$ выполняется на собственной частоте клапана ω_0 .

Коэффициент отражения поршневой волны в случае, когда два одинаковых клапана полностью перекрывают канал волновода, согласно соотношениям (4.1) определяется формулой

$$r_{00}^{(2)} = 1 - 2Z_0/Z^{(2)}; \quad Z^{(2)} = Z_* + Z_0 + \hat{Z}, \quad \hat{Z} = ((Z_* + Z_n)^{-1} + (Z_n^+ + Z_n^+)^{-1})^{-1} \quad (5.3)$$

Коэффициенты трансформации $r_{n0}^{(2)} = 0$ при $n = 1, 2, \dots$

Из формулы (5.3) следует, что на определяемых формулой $\omega_n' = \pi n c/L$ собственных частотах камеры с жесткими стенками и длиной L один из импедансов Z_0^+ или Z_0^- равен нулю, а другой бесконечности. На этих частотах выражение для коэффициента отражения принимает вид

$$r_{00}^{(2)} = Z_*/(Z_* + Z_0) \quad (5.4)$$

Сравнение выражений (5.2) и (5.4) показывает, что на частотах ω_n' происходит совпадение коэффициентов отражения от двух клапанов с импедансами Z_* и от одного клапана с импедансом $2Z_*$.

Другая серия частот ω_n'' , на которых совпадают модули коэффициентов отражения $r_{00}^{(1)}$ и $r_{00}^{(2)}$, определяется из уравнений

$$Z_*/2 + Z_0^+ = 0 \quad \text{или} \quad Z_*/2 + Z_0^- = 0 \quad (5.5)$$

Отметим, что $r_{00}^{(2)} = 0$ на собственной частоте клапана в вакууме ($\omega = \omega_0$) и на частотах ω_n' , которые определяются из уравнения

$$Z_* + Z_0^+ + Z_0^- = 0 \quad (5.6)$$

При достаточно больших частотах уравнения (5.5) и (5.6) можно заменить приближенными уравнениями, соответственно $\text{cth}(kL) = mk/(4\rho)$ и $\text{cth}(kL) = mk/(2\rho)$. Анализ корней приближенных уравнений показывает, что они удовлетворяют неравенствам $\omega_n' < \omega_n^* < \omega_n''$.

Анализ частотной зависимости коэффициента отражения от полубесконечной системы перегородок начнем со случая, когда клапаны полностью перекрывают канал волновода. Для коэффициента отражения поршневой волны получим

$$r_{00} = 1 - 2Z_0/Z; \quad Z = Z_* + Z + \tilde{Z}, \quad \tilde{Z} = (Z_*/2 + Z_0^+)^{1/2} (Z_*/2 + Z_0^-)^{1/2} - Z_*/2 \quad (5.7)$$

где Z – импеданс полубесконечной системы перегородок, каждая из которых полностью перекрывает канал волновода.

Из формулы (5.7) следует, что на частоте падающего поля $\omega = \omega_0$, равной собственной частоте клапана, выполнены соотношения $\tilde{Z} = Z_0$, $Z = 2Z_0$ и коэффициент отражения r_{00} равен нулю.

При стремлении частоты падающего поля к собственным частотам камеры, которую образуют соседние перегородки в волноводе, $r_{00} \rightarrow 1$.

Если клапаны полностью перекрывают сечение волновода, то выражение для W из второй формулы (3.6) принимает вид

$$W = (Z_* + Z_0^+ + Z_0^-)/(Z_0^+ - Z_0^-)$$

Границы полос пропускания для полубесконечной системы клапанов, полностью перегородивающих канал волновода, определяются из уравнений $W = \pm 1$. Эти уравнения в свою очередь приводят к уравнениям вида (5.5), откуда следует, что границы полос пропускания, на которых $r_{00} = 1$, соответствуют частотам ω_n' и ω_n'' .

Численные расчеты зависимостей коэффициентов отражения по энергии квадратов модулей коэффициентов отражения от безразмерной частоты $\Omega = kH$ проводились для случая в одной, двух и полубесконечного набора перегородок в плоском волноводе $0 < x < H$, $-\infty < z < \infty$. Считая, что отсутствует зависимость волновых процессов от переменной y , имеем: область G – прямоугольник с высотой H и единичной шириной. Прямоугольный клапан занимает на этом прямоугольнике часть, такую, что $h_1 \leq x \leq h_2$. Нормированные согласно формуле (2.2) собственные функции $\varphi_n(x)$ оператора $\Delta_{\perp} = d^2/dx^2$, удовлетворяющие граничным условиям $\varphi_n'(0) = \varphi_n'(H) = 0$, задаются формулой

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2k/\varepsilon_n \gamma_n} \cos(\pi n x / H), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = 1$$

а собственные числа

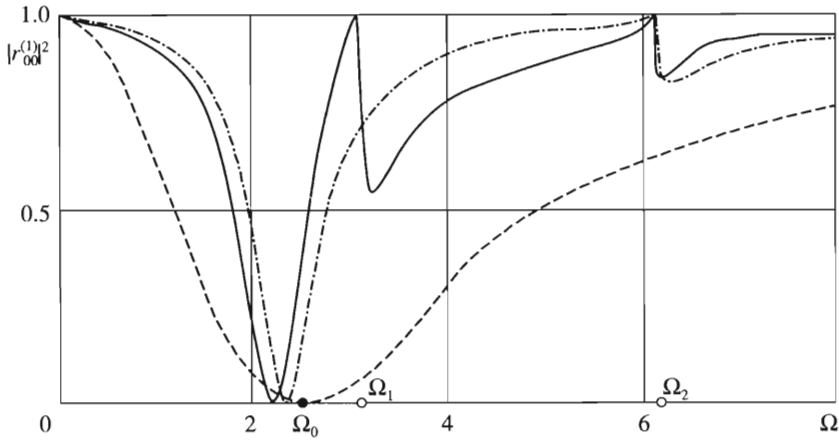
$$\mu_n = -(\pi n / H)^2$$

Для коэффициентов Фурье характеристической функции отрезка $[h_1, h_2]$ согласно равенству (2.7) имеем

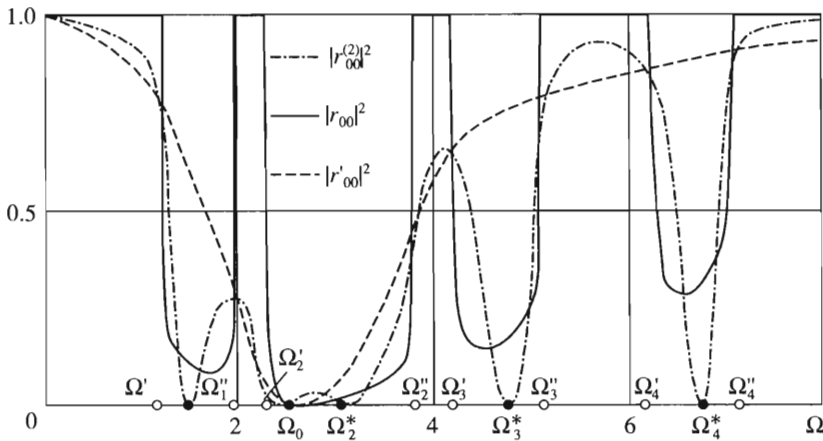
$$\eta_0 = \frac{h_2 - h_1}{H}, \quad \eta_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \left(\sin \frac{\pi n h_2}{H} - \sin \frac{\pi n h_1}{H} \right) \quad \text{при } n = 1, 2, \dots$$

При расчетах было принято, что безразмерная собственная частота клапана в вакууме $\Omega_0 = \omega_0 H / c = 2.5$ и отношение $m / (\rho H) = 0.5$.

На фиг. 2 показаны зависимости квадрата модуля коэффициентов отражения $r_{00}^{(1)}$ для одного клапана при различном перекрытии им сечения волновода. Здесь отмечены следующие безразмерные частоты: собственная частота клапана Ω_0 и частоты



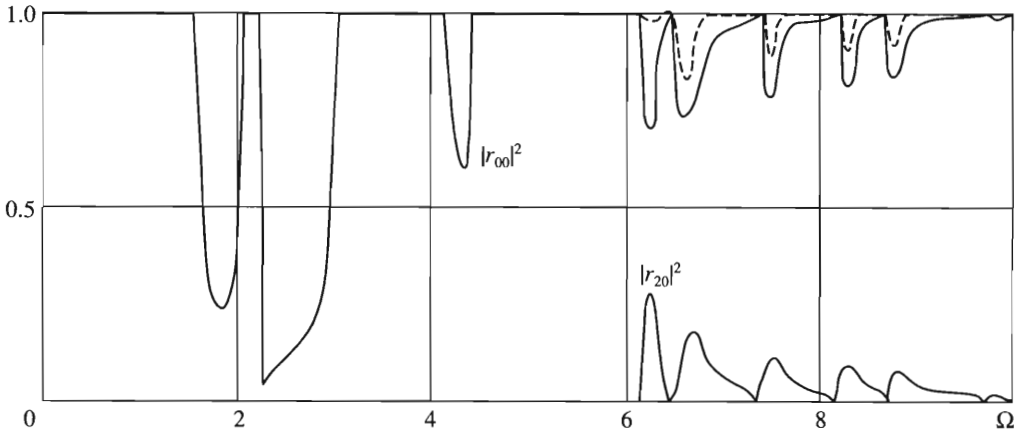
Фиг. 2



Фиг. 3

зарождения нормальных волн $\Omega_n = \pi l$. Симметричным относительно оси волновода нормальным волнам соответствуют четные значения n , а антисимметричным нечетные. Штриховая линия соответствует случаю, когда клапан полностью перекрывает сечение волновода, штрихпунктирная – клапан расположен по центру волновода и его ширина в два раза меньше ширины волновода, сплошная – при тех же размерах клапан прижат к стенке волновода. С уменьшением поверхности клапана и соответственно увеличением поверхности жесткой диафрагмы модуль коэффициента отражения увеличивается, за исключением небольшой области частот вблизи Ω_0 . В волноводе при симметричном размещении клапана в диафрагме возбуждаются только симметричные нормальные волны.

На фиг. 3 показаны зависимости от частоты квадрата модуля коэффициентов отражения $r_{00}^{(2)}$ (штрихпунктирная линия) и r_{00} (сплошная линия) соответственно для двух и полубесконечной системы одинаковых перегородок в волноводе. Здесь же нанесена зависимость от частоты квадрата модуля коэффициента отражения r'_{00} от одного клапана, но с удвоенной массой (штриховая линия), причем $r'_{00} = Z_*/(Z_* + Z_0)$. Во всех этих случаях клапаны полностью перекрывают канал волновода, а расстоя-



Фиг. 4

ние между соседними перегородками выбрано так, чтобы $L/H = 1.5$. На оси абсцисс отмечены безразмерные частоты $\Omega'_n = \omega'_n H/c$ и $\Omega''_n = \omega''_n H/c$. На этих частотах совпадают значения квадрата модулей $r_{00}^{(2)}$ и r'_{00} , и эти частоты одновременно являются границами полос пропускания, где $|r_{00}| < 1$, и полос запираения, где $|r_{00}| = 1$. Через $\Omega_n^* = \omega_n^* H/c$ обозначены безразмерные частоты, на которых $r_{00}^{(2)} = 0$.

Отметим, что при достаточно больших частотах максимумы модуля коэффициента отражения для двух перегородок находятся в полосах запираения для случая полубесконечного набора перегородок, а минимумы – в полосах пропускания.

На фиг. 4 приведены зависимости квадрата модуля r_{00} и r_{20} для случая, когда клапаны, занимающие половину ширины волновода, расположены посередине перегородки. Для определения частот в полосе запираения по данным отражения заметим, что на этих частотах из закона сохранения энергии следует, что сумма квадрата модуля коэффициента отражения набегающей нормальной волны и квадратов модулей коэффициентов трансформации этой волны во все распространяющиеся нормальные волны равна единице. В полосе запираения на частотах, меньших частоты зарождения первой нормальной волны, выполняется тождество $|r_{00}| = 1$. При частотах, больших частоты зарождения первой нормальной волны, но меньших частоты зарождения второй нормальной волны, в полосе запираения выполняется тождество $|r_{00}|^2 + |r_{20}|^2 = 1$. Штриховая линия на фиг. 4 показывает зависимость полной отраженной энергии $W_* = |r_{00}|^2 + |r_{20}|^2$ от величины Ω в полосах пропускания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brillouin L., Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux periodiques. Paris: Masson-Dunod, 1956 = Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С. 457.
2. Кандидов В.П., Капцов Л.Н., Харламов А.А. Решение и анализ задач линейной теории колебаний. М., Изд-во МГУ, 1976. С. 271.
3. Лепендин Л.Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. С. 448.
4. Борисов Л.П., Гужас Д.Р. Звукоизоляция в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990. С. 214.
5. Лукьянов В.Д., Никитин Г.Л. Рассеяние акустических волн на перегородке, разделяющей волновода с различными стенками // Акуст. журн. 1995. Т. 40. № 5. С. 822–828.