ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 69. Вып. 4, 2005

УДК 531.36:534.1

© 2005 г. С. П. Сосницкий

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗМУЩАЕМЫХ СИСТЕМ

В рамках второго метода Ляпунова исследуются квазилинейные системы со многими степенями свободы при малой диссипации и периодическом возмущении. Последнее может быть как малым, так и большим по амплитуде. Приводятся критерии асимптотической устойчивости исследуемых систем, которые можно охарактеризовать как достаточные условия параметрической невозмущаемости последних при наличии слабого диссипативного фона. Предлагаемый подход позволяет рассматривать предельные случаи периодического возмущения, когда соответствующая частота может стремиться как к нулю, так и к бесконечности. Возможны обобщения на случай непериодических возмущений, меняющихся с течением времени очень медленно или очень быстро.

Известно [1, 2], что при периодическом возмущении малая диссипация не всегда выступает в качестве барьера, препятствующего параметрической "раскачке" системы. Поэтому практический интерес представляет установление порога диссипации, по достижении которого параметрический резонанс не влечет неустойчивости равновесия. Такой порог удается установить с помощью функции Ляпунова. В частности, в развитие предыдущего исследования [3] удается получить соотношение между амплитудами малых диссипативных и малых возмущающих периодических сил, гарантирующее асимптотическую устойчивость равновесия.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неавтономную систему с n степенями свободы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\alpha D(\omega t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{1.1}$$

лагранжиан которой определяется выражением

$$L(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L_2(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + L_0(\omega t, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T A(\omega t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + L_0(\omega t, \mathbf{q}) \tag{1.2}$$

$$L(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^{1,2,2}_{t\mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}}(R \times D_{\mathbf{q}} \times R^n_{\dot{\mathbf{q}}})$$

причем $L(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ $(2\pi/\omega)$-периодически зависит от t $(\omega > 0)$. Кроме того, предположим, что

$$\begin{gathered} A = A_0 + A^*(\omega t, \mathbf{q}), \quad A^T = A, \quad A^*(\omega t, \mathbf{0}) = 0 \\ L_0(\omega t, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T B(\omega t)\mathbf{q} + \tilde{L}_0(\omega t, \mathbf{q}), \quad \tilde{L}_0(\omega t, \mathbf{q}) = o(\|\mathbf{q}\|^2) \\ B(\omega t) = B_0 + \beta B_1(\omega t), \quad B^T = B \\ D(\omega t, \mathbf{q}) = D_0 + D^*(\omega t, \mathbf{q}), \quad D^*(\omega t, \mathbf{0}) = 0, \quad D_0^T = D_0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь A_0, B_0, D_0 – постоянные симметричные матрицы с положительными собственными значениями, $A^*(\omega t, \mathbf{q})$, $B_1(\omega t)$, $D^*(\omega t, \mathbf{q})$ – $(2\pi/\omega)$-периодические по t $(n \times n)$-матрицы. Малые параметры $\alpha > 0$, $\beta > 0$ характеризуют соответственно степень диссипации и параметрического возмущения.

Приняв во внимание выражения (1.3), уравнения (1.1) перепишем в виде

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D_0\dot{\mathbf{q}} + B(\omega t)\mathbf{q} = \mathbf{F}(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \|\mathbf{F}(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| = o(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|) \tag{1.4}$$

Как видим, точка $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ соответствует положению равновесия данной системы. Далее под словом "равновесие" всегда будем понимать именно тривиальное решение рассматриваемой системы.

Наряду с (1.4) рассмотрим укороченную систему

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + B_0\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{1.5}$$

получающуюся из системы (1.4) при $\alpha = \beta = 0$ и отбрасывании нелинейных членов. Пусть $\omega_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – собственные частоты системы (1.5). Как известно [4] (см. также [2]), выполнение соотношения

$$\omega = (\omega_i \pm \omega_j)/k, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

связывающего частоту ω периодического возмущения и собственные частоты ω_i укороченной системы (1.5) и называемого простым резонансом, когда $i = j$, и комбинационным в противном случае, может повлечь неустойчивость равновесия параметрически возмущаемых систем.

В дальнейшем представляется важным выяснить, при каких условиях диссипация может воспрепятствовать возникновению неустойчивости системы (1.4), наступающей вследствие резонанса.

Далее естественно полагать параметр β настолько малым, что собственные значения $b_i(t)$ матрицы $B(\omega t) = B_0 + \beta B_1(\omega t)$ положительны, причем $b_i(t) \geq \tilde{b}_i$, $0 < \tilde{b}_i = \mathrm{const}$.

2. Теорема об асимптотической устойчивости. Рассмотрим уравнения

$$|D_0 - \lambda A_0| = 0, \quad |\partial B_1/\partial(\omega t) - \lambda B(\omega t)| = 0 \tag{2.1}$$

которые отвечают характеристическим уравнениям соответствующих пучков квадратичных форм [5]. Корни уравнений (2.1) – характеристические числа этих пучков. Поскольку матрицы A_0 и $B(\omega t)$ положительно определены, каждое из уравнений (2.1) имеет n вещественных корней λ_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Пусть далее λ^+ и λ^- – наибольшее и наименьшее характеристические числа первого уравнения (2.1), а числа μ^+ и μ^- соответствуют $\sup(\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t))$ и $\inf(\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t))$, где $\mu_i(t)$ – характеристические числа второго уравнения (2.1).

Теорема 1. Если выполняется неравенство

$$\alpha\lambda^- > \beta\mu^+\omega/2 \tag{2.2}$$

то положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1.4) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Представляя систему (1.4) в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = A_0^{-1}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\alpha D_0\dot{\mathbf{q}} - B(\omega t)\mathbf{q} + \mathbf{F}^*(\omega t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{2.3}$$

рассматриваем функцию

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T A_0^{-1}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T B(\omega t)\mathbf{q} + \gamma\mathbf{q}\mathbf{p} + \frac{\alpha\gamma}{2}\mathbf{q}^T D_0\mathbf{q} \tag{2.4}$$

где γ – положительная постоянная, выбор которой осуществляется ниже. Производную по t функции V вдоль векторного поля, определяемого системой (2.3), удобно записать в виде

$$\frac{dV}{dt} = -[\dot{\mathbf{q}}^T(\alpha D_0)\dot{\mathbf{q}} - \gamma\dot{\mathbf{q}}^T A_0\dot{\mathbf{q}}] + \left\{\mathbf{q}^T\left(\frac{\beta\omega}{2}\frac{\partial B_1}{\partial(\omega t)}\right)\mathbf{q} - \gamma\mathbf{q}^T B(\omega t)\mathbf{q}\right\} + o(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|^2)$$

Видно, что правая часть этого равенства содержит два регулярных пучка квадратичных форм, связывающих соответственно обобщенные скорости и обобщенные координаты. Рассмотрим теперь характеристические уравнения этих пучков

$$|\alpha D_0 - \gamma A_0| = 0, \quad \left|\frac{\beta\omega}{2}\frac{\partial B_1}{\partial(\omega t)} - \gamma B(\omega t)\right| = 0$$

Полагая в первом уравнении $\gamma = \alpha\lambda$, а во втором $\gamma = \lambda\beta\omega/2$, приходим к уравнениям (2.1).

Исходя из экстремальных свойств характеристических чисел регулярного пучка квадратичных форм [5], получаем неравенства

$$\lambda^- \le \frac{\dot{\mathbf{q}}^T D_0\dot{\mathbf{q}}}{\dot{\mathbf{q}}^T A_0\dot{\mathbf{q}}} \le \lambda^+, \quad \mu^- \le \frac{\mathbf{q}^T\dfrac{\partial B_1}{\partial(\omega t)}\mathbf{q}}{\mathbf{q}^T B(\omega t)\mathbf{q}} \le \mu^+$$

на основании которых имеем

$$\lambda^-\dot{\mathbf{q}}^T A_0\dot{\mathbf{q}} \le \dot{\mathbf{q}}^T D_0\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q}^T\frac{\partial B_1}{\partial(\omega t)}\mathbf{q} \le \mu^+\mathbf{q}^T B(\omega t)\mathbf{q}$$

Вместе с тем из условия отрицательной определенности dV/dt получаем неравенства

$$\gamma\dot{\mathbf{q}}^T A_0\dot{\mathbf{q}} < \alpha\dot{\mathbf{q}}^T D_0\dot{\mathbf{q}}, \quad \forall\|\dot{\mathbf{q}}\| \ne 0; \quad \frac{\beta\omega}{2}\mathbf{q}^T\frac{\partial B_1}{\partial(\omega t)}\mathbf{q} < \gamma\mathbf{q}^T B(\omega t)\mathbf{q}, \quad \forall\|\mathbf{q}\| \ne 0$$

Стало быть, с учетом неравенства (2.2), выбирая постоянную γ согласно условию

$$\beta\mu^+\omega/2 < \gamma < \alpha\lambda^- \tag{2.5}$$

достигаем того, что производная dV/dt становится отрицательно определенной.

Чтобы доказать асимптотическую устойчивость равновесия, покажем, что функция V положительно определена.

Рассмотрим вспомогательную систему (систему сравнения)

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D_0\dot{\mathbf{q}} + b^- E\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

где $b^- = \min(\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n)$, E – единичная матрица. Представляя уравнения (2.6) в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = A_0^{-1}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\alpha D_0\dot{\mathbf{q}} - b^- E\mathbf{q} \tag{2.7}$$

рассматриваем функцию

$$V^* = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T A_0^{-1}\mathbf{p} + \frac{1}{2}b^-\mathbf{q}^T E\mathbf{q} + \gamma\mathbf{q}\mathbf{p} + \frac{\alpha\gamma}{2}\mathbf{q}^T D_0\mathbf{q} \tag{2.8}$$

Для ее производной в силу системы уравнений (2.7) имеем

$$\frac{dV^*}{dt} = -\alpha\dot{\mathbf{q}}^T D_0\dot{\mathbf{q}} + \gamma\dot{\mathbf{q}}^T A_0\dot{\mathbf{q}} - \gamma b^-\mathbf{q}^T E\mathbf{q}$$

и, таким образом, при выполнении второй части неравенства (2.5): $\gamma < \alpha\lambda^-$ производная dV^*/dt отрицательно определена.

В системе (2.6) диссипация является полной. Следовательно, при выполнении второй части неравенства (2.5) функция V^* не может быть знакопеременной, так как это противоречило бы асимптотической устойчивости равновесия системы (2.6). Она не может быть также вырожденной, так как это противоречило бы знакоопределенности dV^*/dt. Следовательно, функция V^* положительно определена.

Сравнивая выражения для V и V^*, определяемые соответственно равенствами (2.4) и (2.8), и принимая во внимание неравенство

$$\mathbf{q}^T B(\omega t)\mathbf{q} \geq b^- \mathbf{q}^T E\mathbf{q}$$

заключаем, что функция V положительно определена. Таким образом, положение равновесия системы (1.4) асимптотически устойчиво.

Замечание 1. Предлагаемый подход может оказаться эффективным не только в случае периодического возмущения, но и любого другого осциллирующего возмущения, медленно меняющегося с течением времени, в частности для систем вида

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D_0\dot{\mathbf{q}} + [B_0 + \beta B_1(\varepsilon t)]\mathbf{q} = \mathbf{F}(\varepsilon t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

где ε – малый параметр.

Следствие 1. Положение равновесия системы (1.4) асимптотически устойчиво, если выполняется одно из условий:

1) все собственные значения (СЗ) матрицы

$$\alpha D_0 - (\beta\mu^+\omega/2)A_0 \tag{2.9}$$

положительны;

2) нижняя грань СЗ матрицы

$$\alpha\lambda^- B(\omega t) - (\beta\omega/2)\partial B_1/\partial(\omega t) \tag{2.10}$$

является положительным числом.

Доказательство. Справедливость следствия вытекает из того факта, что ограничения, налагаемые на СЗ одной из матриц (2.9), (2.10), исключают выполнение равенства $\alpha\lambda^- = \beta\mu^+\omega/2$. Последнее, если учесть схему доказательства теоремы 1, обеспечивает лишь неотрицательность СЗ упомянутых матриц. Стало быть, при выполнении условий следствия неравенство (2.2) сохраняется и тем самым условие теоремы 1 выполняется.

Следствие 2. При фиксированных малых параметрах α и β существует такое пороговое значение частоты периодического возмущения

$$\omega_0 = \Omega, \quad \Omega = 2\frac{\alpha\lambda^-}{\beta\mu^+} \tag{2.11}$$

что при $\omega < \omega_0$ положение равновесия системы (1.4) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Равенство $\omega_0 = \Omega$ можно интерпретировать как предельное соотношение для неравенства (2.2). С другой стороны, на основании последнего имеем

$$\omega < \Omega \tag{2.12}$$

Так как неравенство (2.12) обеспечивает знакоопределенность dV/dt, то согласно соотношениям (2.12) и (2.11) заключаем, что при $\omega < \omega_0$ рассматриваемое положение равновесия асимптотически устойчиво.

Следствие 3. При фиксированных малых параметрах α и β колебания системы с критическими частотами (1.6) и большими значениями k гасятся диссипативными силами. В частности, предельное значение k_0 числа k, начиная с которого критическая частота (1.6) не влечет параметрической "раскачки" системы, определяется из неравенства

$$k_0 - (\omega_i \pm \omega_j)/\Omega > 0; \quad \omega_i - \omega_j > 0$$

Доказательство. Полагая в неравенстве (2.2)

$$\omega = (\omega_i \pm \omega_j)/k, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где $\omega_i - \omega_j > 0$, так как $\omega > 0$ согласно исходным предположениям, получаем для k оценку снизу

$$k > (\omega_i \pm \omega_j)/\Omega \tag{2.13}$$

Вычисляя теперь целую часть правой части неравенства (2.13) и добавляя единицу, определяем k_0.

Пример 1. Применим теорему 1 к задаче о колебаниях маятника в периодически меняющемся поле тяжести и сопротивляющейся среде ([6], с. 28). Уравнение движения с точностью до обозначений в этом случае имеет вид

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \gamma^2(1 + \beta\cos\omega t)x = o(\|(x, \dot{x})\|) \tag{2.14}$$

где α, β, γ положительные постоянные, причем, как и прежде, будем считать α и β малыми величинами. В соответствии с теоремой 1 условие асимптотической устойчивости тривиального решения $x = \dot{x} = 0$ имеет вид

$$\alpha > \frac{\beta\omega}{2}\max\left[-\frac{\sin\omega t}{1 + \beta\cos\omega t}\right] \tag{2.15}$$

Замечая, что выражение в квадратных скобках в правой части неравенства (2.15) принимает экстремальное значение, когда $\beta + \cos\omega t = 0$, приходим к условию асимптотической устойчивости

$$\alpha > \frac{\beta\omega}{2}\max\frac{\pm\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} = \frac{\omega}{2}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

совпадающему с условием, ранее полученным Старжинским [7].

Замечание 2. Как видно из уравнения (2.14) и характера входящих в него коэффициентов, размерности последних не совпадают. Это, однако, не сказывается на корректности итогового результата. Тем не менее в более сложных ситуациях, во избежание недоразумений, предпочтительнее перейти к безразмерному времени $\tau = \lambda t$, где $\lambda = 1c^{-1}$ – размерностная единица. В результате все коэффициенты становятся безразмерными и вместе с тем сохраняющими свою абсолютную величину.

3. Об асимптотической устойчивости равновесия при высокочастотном возмущении. Рассмотрим теперь периодическое возмущение с высокой частотой ω, включая и предельный случай, когда $\omega \to \infty$. Как убедимся ниже, при $\omega \to \infty$ асимптотическую устойчивость равновесия можно установить при менее ограничительных относительно периодического возмущения предположениях, не требуя, в частности, его малости. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать более общие уравнения

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D_0\dot{\mathbf{q}} + B(\omega t)\mathbf{q} = \mathbf{F}(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{3.1}$$

где

$$B(\omega t) \in C_t^0, \quad \mathbf{F}(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C_{t\mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}}^{0,1,1}(R \times D_{\mathbf{q}\dot{\mathbf{q}}}), \quad \|\mathbf{F}(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| = o(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|)$$

а постоянные матрицы A_0 и D_0, как и прежде, являются симметричными с положительными СЗ, α – малый положительный параметр.

Далее обозначим

$$B^0 = \langle B\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T B(\omega t)dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$B(\omega t) = B^0 + B - B^0 = B^0 + B_1(\omega t), \quad \langle B_1(\omega t)\rangle = 0$$

Как видим, в этом разделе в отличие от первых двух структура матрицы $B(\omega t)$ такова, что периодическое возмущение $B_1(\omega t)$ не умножается на малый параметр. Пусть $B_1^*(\omega t)$ – первообразная матрицы $B_1(\omega t)$ такая, что $\langle B_1^*(\omega t)\rangle = 0$. Поскольку первообразная $B_1^*(\omega t)$ содержит множителем величину $1/\omega$, то далее удобно представить ее в виде $B_1^*(\omega t) = \tilde{B}_1(\omega t)/\omega$, где $\tilde{B}_1(\omega t)$ – по-прежнему матрица с нулевым средним.

Теорема 2. Существует такое пороговое значение частоты $\omega = \omega_0$, что при $\omega > \omega_0$ положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (3.1) асимптотически устойчиво, если выполняются условия:

1) матрицы A_0, D_0, $B^0 = \langle B\rangle$ симметричны и положительно определены, причем элементы матрицы A_0 не зависят от ω, а нижние грани собственных чисел матриц D_0 и B^0 удовлетворяют соответственно неравенствам

$$d_0^- > d^*, \quad b^{0-} > b^*, \quad \forall\omega \in [\omega^*, \infty[\quad (0 < \omega^* = \text{const}) \tag{3.2}$$

где d^*, b^* – положительные постоянные;

2) $\lim B_1^* = 0, \quad \lim B_1^{*T} A_0^{-1} D_0 = 0, \quad \lim B_1^{*T} A_0^{-1} B = 0$ при $\omega \to \infty$.

Доказательство. Представим уравнения (3.1) в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = A_0^{-1}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\alpha D_0\dot{\mathbf{q}} - B(\omega t)\mathbf{q} + \mathbf{F}^*(\omega t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{3.3}$$

Рассмотрим функцию

$$V = V_0 + \frac{1}{\omega}\{\gamma\mathbf{q}^T\tilde{B}_1\mathbf{q} + \mathbf{q}^T\tilde{B}_1^T A_0^{-1}\mathbf{p}\} \tag{3.4}$$

где

$$V_0 = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T A_0^{-1}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T B^0\mathbf{q} + \gamma\mathbf{q}\mathbf{p} + \frac{\alpha\gamma}{2}\mathbf{q}^T D_0\mathbf{q} \tag{3.5}$$

а положительная постоянная γ удовлетворяет неравенству $\alpha d_0^- > \gamma a_0^+$, в котором a_0^+ – наибольшее СЗ матрицы A_0. Производная функции V по t вдоль векторного поля, определяемого системой (3.3), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_0}{dt} + \frac{1}{\omega}\{\mathbf{q}^T[\gamma(\tilde{B}_1^T + \tilde{B}_1) - \alpha\tilde{B}_1^T A_0^{-1}D_0]\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T\tilde{B}_1^T\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T\tilde{B}_1^T A_0^{-1}B\mathbf{q}\} + o(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|^2) \tag{3.6}$$

где

$$\frac{dV_0}{dt} = -\alpha\dot{\mathbf{q}}^T D_0\dot{\mathbf{q}} + \gamma\dot{\mathbf{q}}^T A_0\dot{\mathbf{q}} - \gamma\mathbf{q}^T B^0\mathbf{q} \tag{3.7}$$

Как видно из выражений (3.6), (3.7), при достаточно большой частоте периодического возмущения ω и выполнении условий 1, 2 теоремы производная dV/dt при учете возможности выбора постоянной γ, не зависящей от ω, определенно-отрицательна. Функция V при достаточно большом ω согласно равенству (3.4) определяется выражением (3.5) и является определенно-положительной. Чтобы убедиться в этом, достаточно, следуя доказательству теоремы 1, рассмотреть систему сравнения

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D_0\ddot{\mathbf{q}} + B^0\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Следовательно, есть все основания заключить, что исследуемое положение равновесия при выполнении условий теоремы асимптотически устойчиво.

Замечание 3. В частном случае, когда элементы матриц B^0 и D_0 не зависят от ω, вторую часть условия 1, связанную с неравенствами (3.2), опускаем.

Пример 2. Проиллюстрируем теорему 2 на системе с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} + \alpha d_0\dot{x} + (b_0 + \gamma\omega^\delta\cos\omega t)x = o(\|(x, \dot{x})\|)$$

где α, d_0, b_0, γ, δ – положительные постоянные, причем, как и прежде, α – малый параметр.

Выполнение условия *1* теоремы 2 для рассматриваемой системы очевидно, а условие *2* принимает вид

$$\lim\omega^{\delta-1}[\gamma\sin\omega t] = 0, \quad \lim\omega^{\delta-1}[d_0\gamma\sin\omega t] = 0$$

$$\lim\omega^{\delta-1}[\gamma\sin\omega t](b_0 + \gamma\omega^\delta\cos\omega t) = 0 \text{ при } \omega\to\infty$$

Стало быть, при достаточно большом значении ω равновесие $x = \dot{x} = 0$ асимптотически устойчиво, если $2\delta < 1$.

Из приведенного примера следует, что в рамках теоремы 2 существен характер зависимости матриц A_0, D_0 и $B(\omega t)$ от параметра ω. Как убедимся ниже (пример 5), это обстоятельство обусловлено не только конструкцией функции V, но и свойствами самих параметрически возмущаемых систем. В связи с этим представляется целесообразным выделить класс систем, для которых условия 1, 2 теоремы всегда выполняются.

Определение. Скажем, что периодическая функция (вектор-функция, матрица-функция) $\Phi(\omega t) \in C_t^0$ содержит параметр ω лишь под знаком аргумента, если параметр ω входит лишь в качестве множителя при t.

Функции такого класса будем выделять крышкой. Фактически принадлежность периодической функции к данному классу: $\Phi(\omega t) = \hat{\Phi}(\omega t)$ означает, что ее коэффициенты Фурье не зависят от ω.

В свете приведенного определения справедливо такое следствие теоремы 2.

Следствие. Пусть матрицы A_0, D_0, $B^0 = \langle B\rangle$ симметричны и положительно определены, причем элементы матриц A_0, D_0 не зависят от ω, а $B(\omega t) = \hat{B}(\omega t)$. Тогда существует такое пороговое значение частоты $\omega = \omega_0$, что при $\omega > \omega_0$ положение равновесия системы (3.1) асимптотически устойчиво.

Пример 3. При рассмотрении задачи В.В. Болотина о динамической устойчивости плоской формы изгиба упругой балки [8] было показано [2], что полезной может оказаться конечномерная линейная модель задачи, сводящаяся к системе вида

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D_0\dot{\mathbf{q}} + [B_0 + \beta\varphi(\omega t)B_1^*]\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

Здесь A_0, D_0, B_0 – постоянные положительно-определенные диагональные матрицы, не содержащие параметр ω, $\varphi(\omega t)$ – скалярная периодическая функция, B_1^* – несимметричная постоянная матрица, также не зависящая от ω; β – числовой параметр.

Согласно приведенному выше следствию положение равновесия системы (3.8) при достаточно большом значении ω асимптотически устойчиво, независимо от величины числового параметра β, если выполняются условия:

1) $\varphi(\omega t) = \hat{\varphi}(\omega t)$, 2) $\langle\varphi(\omega t)\rangle = 0$.

4. Обобщение на случай переменной диссипации. Предлагаемый подход позволяет рассматривать более общие уравнения

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D(\omega t)\dot{\mathbf{q}} + B(\omega t)\mathbf{q} = \mathbf{F}(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{4.1}$$

где в отличие от уравнений (3.1) матрица диссипативных сил $D(\omega t)$ – переменная, матрицы A_0 и $B(\omega t)$ такие же, как в разд. 3.

Далее, сохраняя обозначения разд. 3, дополнительно обозначим

$$D^0 = \langle D\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T D(\omega t)dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$D = D^0 + D - D^0 = D^0 + D_1(\omega t), \quad \langle D_1(\omega t)\rangle = 0$$

Пусть $D_1^*(\omega t)$ – первообразная матрицы $D_1(\omega t)$, где $\langle D_1^*(\omega t)\rangle = 0$, причем, аналогично изложенному выше, справедливо представление $D_1^*(\omega t) = \tilde{D}_1(\omega t)/\omega$, $\langle \tilde{D}_1(\omega t)\rangle = 0$.

Теорема 3. Пусть матрицы $D^0 = \langle D(\omega t)\rangle$ и $B^0 = \langle B(\omega t)\rangle$ симметричны и, кроме того, все СЗ матрицы D^0 положительны, а элементы матриц A_0, $D(\omega t)$, $B(\omega t)$ удовлетворяют соответственно оценкам

$$a_{0ij}^- \le a_{0ij} \le a_{0ij}^+, \quad d_{ij}^- \le d_{ij} \le d_{ij}^+, \quad b_{ij}^- \le b_{ij} \le b_{ij}^+, \quad \forall\omega \in [\omega^*, \infty[, \quad 0 < \omega^* = \text{const} \tag{4.2}$$

где постоянные a_{0ij}^-, a_{0ij}^+, d_{ij}^-, d_{ij}^+, b_{ij}^-, b_{ij}^+ не зависят от ω.

Тогда существует такое пороговое значение частоты $\omega = \omega_0$, что при $\omega > \omega_0$ положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (4.1) асимптотически устойчиво, если все СЗ матрицы $B^0 = \langle B(\omega t)\rangle$ положительны, и наоборот, неустойчиво, если все они отрицательны.

Доказательство. Представив уравнения (4.1) в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = A_0^{-1}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\alpha D(\omega t)A_0^{-1}\mathbf{p} - B(\omega t)\mathbf{q} + \mathbf{F}^*(\omega t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{4.3}$$

рассмотрим функцию

$$V = V^* + \frac{1}{\omega}\{\gamma\mathbf{q}^T\tilde{B}_1\mathbf{q} + \mathbf{q}^T(\tilde{B}_1^T + \alpha\gamma\tilde{D}_1)A_0^{-1}\mathbf{p} + \alpha\mathbf{p}^TA_0^{-1}\tilde{D}_1A_0^{-1}\mathbf{p}\} \tag{4.4}$$

Функция V^* определяется правой частью равенства (3.5) с заменой в нем D_0 на D^0, а постоянная γ удовлетворяет неравенству $\alpha d^{0-} > \gamma a_0^+$; d^{0-} – наименьшее СЗ матрицы D^0, a_0^+ – наибольшее СЗ матрицы A_0.

Производная по t функции V вдоль векторного поля, определяемого системой (4.3), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV^*}{dt} + \frac{1}{\omega}\{\dot{\mathbf{q}}^T[\gamma(\tilde{B}_1^T + \tilde{B}_1) - \alpha(\tilde{D}_1^T + \tilde{D}_1)A_0^{-1}B]\mathbf{q} - \alpha\mathbf{q}^T(\tilde{B}_1^T + \alpha\gamma\tilde{D}_1)A_0^{-1}D\dot{\mathbf{q}} + \\ + \dot{\mathbf{q}}^T[\tilde{B}_1^T + \alpha\gamma\tilde{D}_1 - \alpha^2(\tilde{D}_1^T + \tilde{D}_1)A_0^{-1}D]\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T(\tilde{B}_1^T + \alpha\gamma\tilde{D}_1)A_0^{-1}B\mathbf{q}\} + o(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|^2) \tag{4.5}$$

Производная dV^*/dt определяется правой частью равенства (3.7) с заменой в нем D_0 на D^0.

Если все СЗ матрицы B^0 положительны, то, как следует из выражения (4.5), если учесть оценки (4.2) и выбор постоянной γ, при достаточно большом значении ω производная dV/dt отрицательно определена. При этом знак самой функции V определяется знаком функции V^*. Последняя в рассматриваемом случае положительно определена. Чтобы убедиться в этом, следуем доказательству теоремы 1, рассматривая в качестве системы сравнения уравнения

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D^0\dot{\mathbf{q}} + B^0\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Если же все СЗ матрицы B^0 отрицательны, то за счет выбора числа γ согласно неравенству $\alpha d^{0+} < \gamma a_0^-$, где d^{0+} – наибольшее СЗ матрицы D^0, а a_0^- – наименьшее СЗ матрицы A_0, при достаточно большом ω достигаем положительной определенности производной dV/dt.

Используя приведенную выше систему сравнения, показываем, что функция V в этом случае может принимать положительные значения.

Теорема 3 доказана.

Ситуация, охватываемая теоремой 3, подобна рассмотренной в следствии к теореме 2. В отличие от следствия здесь, правда, допускается зависимость коэффициентов Фурье периодической функции от параметра ω, однако коэффициенты, зависящие от ω, при этом мажорируются постоянными, которые от ω не зависят.

Пример 4. Проиллюстрируем теорему 3 на такой системе:

$$\ddot{x} + \alpha[d_0 + e^{-\omega}\varphi_1(\omega t)]\dot{x} + \left[b_0 + \frac{\omega}{1+\omega}\varphi_2(\omega t)\right]x = o(\|(x, \dot{x})\|)$$

где α, d_0 – положительные постоянные, причем, как и прежде, α – малый параметр. Будем считать, что

$$\varphi_i(\omega t) = \hat{\varphi}_i(\omega t), \quad i = 1, 2, \quad \langle\varphi_1(\omega t)\rangle = \varphi_1^0 > 0, \quad \langle\varphi_2(\omega t)\rangle = 0$$

Поскольку справедливы неравенства

$$0 < e^{-\omega} \le e^{-\omega^*}, \quad \frac{\omega^*}{1+\omega^*} \le \frac{\omega}{1+\omega} < 1, \quad \forall\omega \in [\omega^*, \infty[\quad (0 < \omega^* = \text{const})$$

то при $b_0 > 0$ и достаточно большом значении ω равновесие $x = \dot{x} = 0$ асимптотически устойчиво. Наоборот, оно неустойчиво, если $b_0 < 0$.

Пример 5. В связи с приведенным выше примером представляет интерес обратиться к известной задаче о стабилизации верхнего положения маятника. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (-b + a\omega^2\sin\omega t)x = o(\|(x, \dot{x})\|)$$

где α, a, b – положительные постоянные. Как и прежде, α – малый параметр.

В отличие от ситуации, рассмотренной выше, здесь при достаточно большом значении ω равновесие $x = \dot{x} = 0$ асимптотически устойчиво, хотя среднее от коэффициента при x отрицательно. Однако нельзя не заметить, что в данной задаче условия теоремы 3 не выполняются; в частности, не выполняется неравенство (4.2) относительно коэффициента при x. Таким образом, неравенство (4.2), входящее в условия теоремы 3, существенно, и в зависимости от того выполняется оно или нет, поведение системы кардинально меняется.

Пример 6. В качестве еще одного примера обратимся к системе уравнений, связанной с колебаниями упругого стержня [2] :

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D_0\dot{\mathbf{q}} + [B_0 + \beta B_1(\omega t)]\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{4.6}$$

Здесь A_0, B_0, D_0 – постоянные симметричные положительно-определенные матрицы, причем матрицы A_0 и B_0 диагональны, $B_1(\omega t) = \varphi(\omega t)B_1^*$, где $\varphi(\omega t)$ – скалярная периодическая функция, B_1^* – постоянная симметричная матрица, β – числовой параметр. Матрицы A_0, B_0, D_0, B_1^* не содержат параметр ω.

Примем далее для упрощения, что $\varphi(\omega t) = \hat{\varphi}(\omega t)$. Тогда согласно теореме 3 существует такое пороговое значение частоты $\omega = \omega_0$, что при $\omega > \omega_0$ положение равновесия системы (4.6) асимптотически устойчиво, если все СЗ матрицы $[B_0 + \beta\overset{0}{\varphi_1}B_1^*]$ ($\overset{0}{\varphi_1} = \langle\varphi(\omega t)\rangle$) положительны, и наоборот, неустойчиво, если все они отрицательны.

Замечание 4. Предлагаемый подход может оказаться полезным не только в случае периодического возмущения, но и любого другого быстро осциллирующего возмущения, в частности, для систем вида

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D(\lambda t)\dot{\mathbf{q}} + B(\lambda t)\mathbf{q} = \mathbf{F}(\lambda t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

где λ – большой параметр. Разумеется, в этом случае понадобится существование среднего от матриц $D(\lambda t)$ и $B(\lambda t)$.

5. Об аналоге теоремы 1 в условиях переменной малой диссипации. Практический интерес представляет получение аналога теоремы 1 в ситуации, когда малая диссипация переменная, а соответствующие уравнения принимают вид

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha D(\omega t)\dot{\mathbf{q}} + B(\omega t)\mathbf{q} = \mathbf{F}(\omega t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{5.1}$$

где

$$D(\omega t) = [D_0 + \beta D_1(\omega t)], \quad D_1(\omega t)^T = D_1(\omega t)$$

а матрицы A_0, D_0, $B(\omega t)$ такие же, как и в разд. 1.

Далее естественно полагать малый параметр β настолько малым, что СЗ $d_i(t)$ и $b_i(t)$ матриц $D(\omega t)$ и $B(\omega t)$ соответственно, положительны, причем

$$d_i(t) \geq \tilde{d}_i, \quad b_i(t) \geq \tilde{b}_i, \quad 0 < \tilde{d}_i = \text{const}, \quad 0 < \tilde{b}_i = \text{const}$$

Кроме того, будем считать, что СЗ матрицы

$$B^*(\omega t) = B(\omega t) - \frac{\alpha\beta\omega}{2}\frac{\partial D_1}{\partial(\omega t)}$$

также положительны, и в частности, их нижняя грань превосходит некоторую положительную постоянную.

Рассмотрим уравнения

$$|D(\omega t)-\lambda A_0| = 0, \quad \left|\frac{\partial B_1}{\partial(\omega t)}-\lambda B^*(\omega t)\right| = 0 \tag{5.2}$$

Поскольку матрицы A_0 и $B^*(\omega t)$ положительно определены, каждое из уравнений (5.2) имеет n вещественных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Пусть далее числа λ^+ и λ^- соответствуют верхней и нижней граням характеристических чисел первого уравнения (5.2), а числа μ^+ и μ^- – верхняя и нижняя грани характеристических чисел второго уравнения.

Теорема 4. Если выполняется неравенство

$$\alpha\lambda^- > \beta\mu^+\omega/2 \tag{5.3}$$

то положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (5.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Представляя систему (5.1) в виде

$$\dot{\mathbf{q}} = A_0^{-1}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\alpha D(\omega t)\dot{\mathbf{q}} - B(\omega t)\mathbf{q} + \mathbf{F}^*(\omega t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{5.4}$$

рассматриваем функцию

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T A_0^{-1}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T B(\omega t)\mathbf{q} + \gamma\mathbf{q}\mathbf{p} + \frac{\alpha\gamma}{2}\mathbf{q}^T D(\omega t)\mathbf{q} \tag{5.5}$$

где γ – положительная постоянная, выбор которой осуществляется ниже. Производную функции V по векторному полю, определяемому системой (5.4), запишем в виде

$$\frac{dV}{dt} = -\{\alpha\dot{\mathbf{q}}^T D(\omega t)\dot{\mathbf{q}} - \gamma\dot{\mathbf{q}}^T A_0\dot{\mathbf{q}}\} + \left\{\mathbf{q}^T\left(\frac{\beta\omega}{2}\frac{\partial B_1}{\partial(\omega t)}\right)\mathbf{q} - \gamma\mathbf{q}^T B^*(\omega t)\mathbf{q}\right\} + o(\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|^2)$$

Следуя далее схеме доказательства теоремы 1, приходим к заключению, что выбор постоянной γ согласно условию

$$\beta\mu^+\omega/2 < \gamma < \alpha\lambda^-$$

обеспечивает отрицательную определенность производной dV/dt.

Чтобы доказать, что функция V положительно определена, систему сравнения выбираем в виде

$$A_0\ddot{\mathbf{q}} + \alpha d^- E\dot{\mathbf{q}} + b^- E\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

где $d^- = \min(\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_n)$, $b^- = \min(\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n)$.

Почти дословно воспроизводя далее схему доказательства теоремы 1, заключаем о справедливости теоремы 4.

Следствие. Положение равновесия системы (5.1) асимптотически устойчиво, если положительна нижняя грань СЗ одной из матриц

$$\alpha D(\omega t) - \frac{1}{2}\beta\mu^+\omega A_0 \quad \text{или} \quad \alpha\lambda^- B^*(\omega t) - \frac{1}{2}\beta\omega\frac{\partial B_1}{\partial(\omega t)}.$$

Аналоги следствий 2 и 3 теоремы 1 формулируются и доказываются согласно схеме, приведенной в разд. 2. Отличие лишь в том, что λ^- и μ^+ определяются теперь на основании уравнений (5.2).

В заключение отметим, что в формулировках теорем 1–4 фактически отражены достаточные условия для вспомогательных V-функций быть функциями Ляпунова [9].

При этом в конкретных ситуациях, что, кстати, частично зафиксировано в замечаниях к разд. 2, 4, возможности применения самих V-функций могут оказаться шире, чем условия приводимых теорем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt G.* Parametererregte Schwingungen. Berlin: Deutsch. Verl. Wissenschaft, 1975 = *Шмидт Г.* Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
2. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Параметрический резонанс в системах с малой диссипацией // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 779–792.
3. *Сосницький С.П.* Про асимптотичну стійкість рівноваги параметрично збурюваних систем // Вопросы механики и ее приложений. Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. Т. 44. С. 238–248.
4. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
6. *Андронов А.А.* Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 538 с.
7. *Старжинский В.М.* Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 3. С. 369–374.
8. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
9. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

Киев
e-mail: sosn@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию
27.IV.2004