

УДК 531.36

© 2005 г. О. Н. Кириллов, А. П. Сейранян

ВЛИЯНИЕ МАЛОГО ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ТРЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Исследуется влияние малого внутреннего и внешнего трения на устойчивость распределенных неконсервативных систем. Построена теория, качественно и количественно описывающая “парадокс дестабилизации” в этих системах, одно из проявлений которого – скачкообразное падение критических нагрузки и частоты при учете малых диссипативных сил. Эта теория основывается на анализе бифуркаций кратных собственных значений (СЗ) несамосопряженных дифференциальных операторов, зависящих от параметров. Получены явные формулы, описывающие распад кратных СЗ с цепочками Келдыша произвольной длины для линейных дифференциальных операторов, аналитически зависящих от комплексного спектрального параметра и являющихся гладкими функциями вектора действительных параметров. Показано, что “парадокс дестабилизации” связан с возмущением малым трением двукратного СЗ циркуляционной системы с цепочкой Келдыша длины 2, отвечающего за образование особенности на границе области устойчивости. Выведены формулы, описывающие поведение СЗ неконсервативной системы при изменении параметров нагрузки и диссипации. Найдены явные выражения для скачков критических нагрузки и частоты потери устойчивости. В аналитическом виде получены аппроксимации области асимптотической устойчивости в пространстве параметров системы. Выявлен *эффект стабилизации* распределенной циркуляционной системы малыми диссипативными силами, состоящий в увеличении критической нагрузки, и выведены условия стабилизации. В качестве механического примера исследована устойчивость вязкоупругого стержня с малым внешним и внутренним трением; в отличие от предшествующих работ показано, что граница области устойчивости имеет особенность “зонтик Уитни”. В аналитическом виде получена зависимость критической нагрузки от параметров внешнего и внутреннего трения, дающая явное выражение для скачка критической нагрузки. На основе аналитических соотношений построены области стабилизации и дестабилизации в пространстве параметров задачи. Показано, что аналитические формулы хорошо согласуются с численными результатами предшествующих работ.

1. Введение. Циглер [1], исследуя устойчивость двузвенного маятника, нагруженного следящей силой, пришел к неожиданному выводу, что критическая сила потери устойчивости неконсервативной системы с исчезающе малой диссипацией существенно ниже, чем в случае, когда диссипация в системе с самого начала предполагается отсутствующей. Это явление, получившее название *парадокс дестабилизации*, было затем обнаружено во многих неконсервативных механических системах, как в дискретных, так и в распределенных [2–20]. Несмотря на большое число публикаций, вопросы, порожденные парадоксом дестабилизации, до сих пор не получили своего разрешения в

общем виде, хотя, по мнению В.В. Болотина [2], именно они представляют наибольший теоретический интерес в неконсервативных задачах устойчивости.

В качестве иллюстрации парадокса дестабилизации рассмотрим поперечные колебания консольного стержня из вязкоупругого материала Кельвина – Фойхта, нагруженного на свободном конце тангенциальной следящей силой q [2, 7]. В безразмерных переменных уравнение малых колебаний стержня и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1, t) + \eta \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t}(1, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(1, t) + \eta \frac{\partial^4 y}{\partial x^3 \partial t}(1, t) = 0 \quad (1.2)$$

Коэффициент внутреннего трения η характеризует вязкоупругие свойства материала, а коэффициент внешнего трения μ отвечает за сопротивление среды.

Отыскивая решение в виде $y(x, t) = u(x) \exp \lambda t$, приходим к задаче на собственные значения

$$(1 + \eta \lambda) u''''_{xxx} + q u''_{xx} + (\lambda^2 + \mu \lambda) u = 0 \quad (1.3)$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''_{xx}(1) = u'''_{xxx}(1) = 0 \quad (1.4)$$

где λ – собственное значение (СЗ), $u(x)$ – собственная функция (СФ), а штрихом обозначено дифференцирование по нижним индексам, в данном случае по переменной $x \in [0, 1]$.

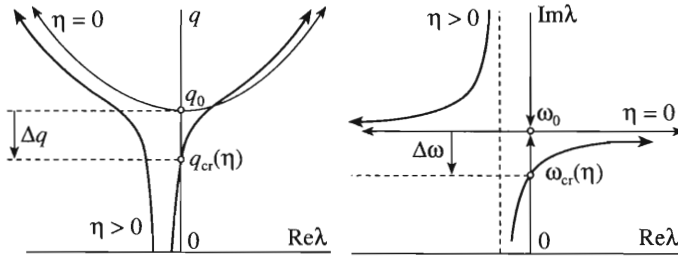
Система, описываемая уравнениями (1.1), (1.2), асимптотически устойчива, если все СЗ λ задачи (1.3), (1.4) имеют отрицательные действительные части, и неустойчива, если хотя бы одно СЗ находится в правой части комплексной плоскости ($\text{Re} \lambda > 0$). Критическая нагрузка $q_{cr}(\eta, \mu)$, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких СЗ ($\text{Re} \lambda = 0$).

Если положить в соотношениях (1.1)–(1.4) параметры трения равными нулю, то полученная система станет циркуляционной [2, 5]. Циркуляционная система устойчива (не асимптотически), если все ее СЗ чисто мнимые и полупростые, т.е. алгебраическая кратность СЗ совпадает с числом его СФ. При изменении параметра нагрузки q СЗ двигаются по мнимой оси и при некотором $q = q_0$ два из них сливаются в одно двукратное $i\omega_0$, которое затем распадается на пару комплексно сопряженных СЗ [2, 22]. Двукратному СЗ $i\omega_0$ соответствует цепочка Келдыша длины 2, состоящая из собственной функции u_0 и присоединенной функции u_1 , удовлетворяющих уравнениям с граничными условиями [7]

$$u''''_{0xxx} + q_0 u''_{0xx} - \omega_0^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = u'_{0x}(0) = 0, \quad u''_{0xx}(1) = u'''_{0xxx}(1) = 0 \quad (1.5)$$

$$u''''_{1xxx} + q_0 u''_{1xx} - \omega_0^2 u_1 = -2i\omega_0 u_0, \quad u_1(0) = u'_{1x}(0) = 0, \quad u''_{1xx}(1) = u'''_{1xxx}(1) = 0 \quad (1.6)$$

Это означает, что при $q = q_0$ алгебраически двукратному СЗ соответствует лишь одна СФ, что выражается в появлении секулярного члена вида $(u_1(x) + t u_0(x)) e^{i\omega_0 t}$ в общем решении краевой задачи (1.1), (1.2). Цепочка Келдыша обобщает известное понятие цепочки Жордана в линейной алгебре [23–30]. Таким образом, наличие в спектре невозмущенной задачи двукратного СЗ $i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ с цепочкой Келдыша длины 2 при условии, что все остальные СЗ чисто мнимые и простые, отвечает границе между областями устойчивости и флаттера (колебательной неустойчивости) [31, 32].



Фиг. 1

Известно, что система (1.1), (1.2) без учета трения ($\eta = 0$, $\mu = 0$) устойчива при $0 \leq q < q_0 = 20.05$ [21], а при учете сколь угодно малого внутреннего трения ($\eta \rightarrow +0$, $\mu = 0$) интервал устойчивости сужается до $0 \leq q < q_{cr} = 10.94 < q_0$. Следовательно, в рассматриваемой задаче имеет место парадокс дестабилизации: при учете сколь угодно малого внутреннего трения критическая нагрузка падает скачком. При этом также скачком падает и критическая частота со значения $\omega_0 = 11.02$ до $\omega_{cr} = 5.40$ [4, 7]. Эти эффекты показаны на фиг. 1 при $\mu = 0$. Внешнее трение ($\mu > 0$) снижает дестабилизирующее влияние внутреннего трения [7]. Заметим, что авторы предыдущих исследований решали частные механические задачи, подобные рассмотренной выше, численными или полуаналитическими методами.

Цель настоящей работы – развитие аналитических методов исследования спектра несамопряженных краевых задач на СЗ, зависящих от параметров, и их применение к изучению влияния малых диссипативных сил на устойчивость распределенных неконсервативных систем общего вида, включающих задачу (1.1), (1.2) как частный случай.

2. Бифуркации кратных СЗ с цепочками Келдыша. Поскольку парадокс дестабилизации оказывается связанным с наличием в спектре невозмущенной циркуляционной системы двукратного СЗ с цепочкой Келдыша, для его изучения прежде всего необходимо знать, как ведут себя кратные СЗ при изменении параметров системы. С этой целью рассмотрим обобщенную несамопряженную задачу на собственные значения для линейного дифференциального оператора с граничными условиями [27, 30].

Обозначим через L линейный дифференциальный оператор порядка m по переменной x , действие которого на гладкую функцию $u(x)$ определяется соотношением

$$Lu = \sum_{j=0}^m l_j \frac{d^{m-j} u}{dx^{m-j}} \quad (2.1)$$

Коэффициенты $l_j(x, \lambda, \mathbf{p})$ оператора L гладко зависят от переменной x , причем функция $l_0(x)$ на отрезке $x \in [0, 1]$ ограничена снизу положительной постоянной. Кроме того, предполагается, что коэффициенты $l_j(x, \lambda, \mathbf{p})$ аналитически зависят от комплексного спектрального параметра λ и гладко – от вектора действительных параметров $\mathbf{p} \in R^n$.

Назовем матрицей граничных условий матрицу $\mathbf{U} = \|\mathbf{A}\mathbf{B}\|$ размерности $m \times 2m$ и ранга m , состоящую из блоков \mathbf{A} и \mathbf{B} размерности $m \times m$ каждый. Определим вектор $\mathbf{u} = (\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1))$ размерности $2m$, где векторы

$$\mathbf{u}(\xi) = (u(\xi), u'_x(\xi), \dots, u_x^{(m-1)}(\xi)), \quad \xi = 0, 1$$

образованы значениями функции $u(x)$ и ее производных в граничных точках $x = 0$ и $x = 1$. Тогда

$$\mathbf{U}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \quad (2.2)$$

Предполагается, что элементы матриц $\mathbf{A}(\lambda, \mathbf{p})$ и $\mathbf{B}(\lambda, \mathbf{p})$ аналитически зависят от комплексного спектрального параметра λ и являются гладкими функциями вектора действительных параметров $\mathbf{p} \in R^n$.

На отрезке $x \in [0, 1]$ рассмотрим задачу на СЗ для дифференциального оператора L с граничными условиями, определяемыми матрицей \mathbf{U} ,

$$L(x, \lambda, \mathbf{p})u = 0, \quad \mathbf{U}(\lambda, \mathbf{p})\mathbf{u} = 0 \tag{2.3}$$

Нетривиальное решение краевой задачи (2.3) существует тогда и только тогда, когда характеристический определитель обращается в нуль [26, 27, 30]:

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(1)) = 0 \tag{2.4}$$

где элементы матрицы $\mathbf{Y}(x)$ определены соотношениями $Y_{ij}(x) = y_{jx}^{(i-1)}(x)$, ($i, j = 1, 2, \dots, m$), а $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ – фундаментальная система решений дифференциального уравнения (2.3). При некотором фиксированном векторе $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ СЗ λ_0 , которому соответствует СФ u_0 , является корнем характеристического уравнения (2.4).

Умножив уравнение (2.3) на функцию $\bar{v}(x)$, где черта означает комплексное сопряжение, и проинтегрировав по частям, получим

$$\int_0^1 \bar{v}Ludx = \int_0^1 u\overline{L^*v}dx + \bar{\mathbf{v}}^T(1)\mathbf{L}(1)\mathbf{u}(1) - \bar{\mathbf{v}}^T(0)\mathbf{L}(0)\mathbf{u}(0) \tag{2.5}$$

где [26]

$$L^*v = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}} (\overline{l_j(x)}v) \tag{2.6}$$

а матрицы $\mathbf{L}(0)$ и $\mathbf{L}(1)$ – значения в точках $x = 0$ и $x = 1$ матрицы $\mathbf{L}(x)$ размерности $m \times m$, элементы которой $L_{ij}(x)$ выражаются через коэффициенты дифференциального оператора l_j и их производные по x

$$L_{ij}(x) = \sum_{k=i-1}^{m-j} (-1)^k C_k^{i-1} \frac{d^{k-i+1}}{dx^{k-i+1}} l_{m-j-k}, \quad C_k^{i-1} = \begin{cases} \frac{k!}{(i-1)!(k-i+1)!}, & k \geq i-1 \geq 0 \\ 0, & k < i-1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Векторы

$$\mathbf{v}(\xi) = (v(\xi), v'_x(\xi), \dots, v_x^{(m-1)}(\xi)), \quad \xi = 0, 1$$

образованы значениями функции $v(x)$ и ее производных в точках $x = 0$ и $x = 1$. Обозначим $\mathbf{v} = (\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1))$.

Введем в рассмотрение матрицу $\tilde{\mathbf{U}} = \|\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}\|$ размерности $m \times 2m$, где матрицы $\tilde{\mathbf{A}}(\lambda, \mathbf{p})$ и $\tilde{\mathbf{B}}(\lambda, \mathbf{p})$ размерности $m \times m$ могут зависеть, вообще говоря, от спектрального параметра λ и вектора действительных параметров \mathbf{p} . Выберем матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ так, чтобы блочная матрица размерности $2m \times 2m$, составленная из матриц \mathbf{U} , $\tilde{\mathbf{U}}$, была невырожденной в окрестности точки $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ и СЗ $\lambda = \lambda_0$. Тогда справедливо равенство

$$\left\| \begin{array}{cc} -\mathbf{L}(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}(1) \end{array} \right\| = \mathbf{v}^* \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{V}}^* \mathbf{U} \tag{2.8}$$

где звездочка означает эрмитово сопряжение (в случае матриц это операция транспонирования и комплексного сопряжения), \mathbf{O} – нулевая матрица размерности $m \times m$, а \mathbf{V} и $\tilde{\mathbf{V}}$ – матрицы размерности $m \times 2m$, определенные соотношением

$$\begin{vmatrix} -\tilde{\mathbf{V}} \\ \mathbf{V} \end{vmatrix}^* = \begin{vmatrix} -\mathbf{L}(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}(1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \end{vmatrix}^{-1} \quad (2.9)$$

Дифференцирование уравнения (2.8) по λ дает

$$\begin{vmatrix} -\mathbf{L}'_{\lambda}(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{L}'_{\lambda}(1) \end{vmatrix} = (\mathbf{V}'_{\tilde{\lambda}})^* \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{V}^* \tilde{\mathbf{U}}'_{\lambda} - (\tilde{\mathbf{V}}'_{\tilde{\lambda}})^* \mathbf{U} - \tilde{\mathbf{V}}^* \mathbf{U}'_{\lambda} \quad (2.10)$$

где штрих означает дифференцирование по спектральному параметру λ или $\tilde{\lambda}$ (черта отвечает комплексному сопряжению).

Учитывая соотношение (2.8) в уравнении (2.5), получим формулу Лагранжа для оператора L [26]

$$(Lu, v) - (u, L^*v) = (\mathbf{V}\mathbf{v})^* \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{u} - (\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{v})^* \mathbf{U}\mathbf{u}, \quad (u, v) = \int_0^1 u(x) \bar{v}(x) dx \quad (2.11)$$

где (u, v) – эрмитово скалярное произведение функций u, v .

Если предположить, что матрицы $\tilde{\mathbf{B}}$ и $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}$ – неособые, то согласно формуле Шура [33]

$$\det \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \end{vmatrix} = \det \tilde{\mathbf{B}} \det(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}) \neq 0 \quad (2.12)$$

а матрицы \mathbf{V} и $\tilde{\mathbf{V}}$ размерности $m \times 2m$ выписываются в явном виде

$$\mathbf{V} = \left\| (\mathbf{L}(0)\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^{-1})^* (\mathbf{L}(1)\tilde{\mathbf{B}}^{-1} + \mathbf{L}(1)\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^{-1})^* \right\| \quad (2.13)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \left\| (\mathbf{L}(0)\mathbf{S}^{-1})^* (\mathbf{L}(1)\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1})^* \right\| \quad (2.14)$$

Задача на собственные значения для оператора L^*

$$L^*(\tilde{\lambda}, \mathbf{p})v = 0, \quad \mathbf{V}(\tilde{\lambda}, \mathbf{p})v = 0 \quad (2.15)$$

будет сопряженной к задаче (2.3), а оператор L^* , определенный уравнением (2.6), будет сопряженным к оператору L (2.1). Сопряженные операторы L и L^* с соответствующими граничными условиями (вторые равенства (2.3) и (2.15)) связаны соотношением $(Lu, v) = (u, L^*v)$ [26].

Предположим, что в точке \mathbf{p}_0 и ее окрестности спектр задачи (2.3) дискретен. Обозначим $L_0 = L(\lambda_0, \mathbf{p}_0)$, $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(\lambda_0, \mathbf{p}_0)$ и рассмотрим гладкую кривую в n -мерном пространстве параметров, зависящую от действительного параметра $\epsilon \geq 0$

$$\mathbf{p}(\epsilon) = \mathbf{p}_0 + \epsilon \dot{\mathbf{p}} + \frac{\epsilon^2}{2} \ddot{\mathbf{p}} + o(\epsilon^2) \quad (2.16)$$

где точка означает дифференцирование по ϵ , а производные вычислены при $\epsilon = 0$. В силу этого возмущенный оператор $L(\lambda, \mathbf{p}(\epsilon))$ можно представить в виде ряда

$$L(\lambda, \mathbf{p}(\epsilon)) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^r}{r!} \left(\frac{\partial^r L}{\partial \lambda^r} + \epsilon \frac{\partial^r L_1}{\partial \lambda^r} + \epsilon^2 \frac{\partial^r L_2}{\partial \lambda^r} + o(\epsilon^2) \right) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^r L_1}{\partial \lambda^r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{r+1} L}{\partial \lambda^r \partial p_j} \dot{p}_j, \quad \frac{\partial^r L_2}{\partial \lambda^r} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{r+1} L}{\partial \lambda^r \partial p_j} \ddot{p}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^n \frac{\partial^{r+2} L}{\partial \lambda^r \partial p_j \partial p_t} \dot{p}_j \dot{p}_t \quad (2.18)$$

При $r = 0$ формулы (2.18) дают выражения для операторов L_1, L_2 . Соответственно, матрица граничных условий $U(\lambda, \mathbf{p}(\epsilon))$ принимает вид

$$U(\lambda, \mathbf{p}(\epsilon)) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^r}{r!} \left(\frac{\partial^r U}{\partial \lambda^r} + \epsilon \frac{\partial^r U_1}{\partial \lambda^r} + \epsilon^2 \frac{\partial^r U_2}{\partial \lambda^r} + o(\epsilon^2) \right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^r U_1}{\partial \lambda^r} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{r+1} U}{\partial \lambda^r \partial p_j} \dot{p}_j, \quad \frac{\partial^r U_2}{\partial \lambda^r} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^{r+1} U}{\partial \lambda^r \partial p_j} \ddot{p}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,t=1}^n \frac{\partial^{r+2} U}{\partial \lambda^r \partial p_j \partial p_t} \dot{p}_j \dot{p}_t \quad (2.20)$$

где частные производные вычислены при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \lambda = \lambda_0$. При $r = 0$ формулы (2.20) дают выражения для матриц U_1, U_2 .

Простое собственное значение λ_0 . Предположим теперь, что СЗ λ_0 в точке $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ является простым корнем уравнения (2.4) с СФ u_0 . Собственная функция u_0 удовлетворяет уравнению с граничными условиями

$$L_0 u_0 = 0, \quad U_0 u_0 = 0 \quad (2.21)$$

а СФ v_0 комплексно-сопряженного СЗ $\bar{\lambda}_0$ сопряженного оператора является решением задачи на собственные значения

$$L_0^* v_0 = 0, \quad V_0 v_0 = 0 \quad (2.22)$$

Тогда возмущенное СЗ $\lambda(\epsilon)$ и СФ $u(\epsilon)$ представляются в виде рядов по ϵ [34]

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon + \lambda_2 \epsilon^2 + \dots, \quad u = u_0 + w_1 \epsilon + w_2 \epsilon^2 + \dots \quad (2.23)$$

Обозначим

$$\mathbf{w}_j = (\mathbf{w}_j(0), \mathbf{w}_j(1)), \quad \mathbf{w}_j(\xi) = (w_j(\xi), w'_{jx}(\xi), \dots, w_{jx}^{(m-1)}(\xi)), \quad \xi = 0, 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Подставляя разложения (2.17)–(2.20) и (2.23) в уравнения (2.3) и собирая коэффициенты при ϵ , найдем уравнения и граничные условия, которым должна удовлетворять функция w_1 во втором разложении (2.23),

$$L_0 w_1 = -L_1 u_0 - \lambda_1 L'_\lambda u_0, \quad U_0 w_1 = -U_1 u_0 - \lambda_1 U'_\lambda u_0 \quad (2.24)$$

Умножая скалярно обе части уравнения (2.24) на функцию v_0 и учитывая формулу Лагранжа (2.11), которая при помощи уравнения и граничных условий (2.22) записывается в виде

$$(L_0 w_1, v_0) = \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* U_1 u_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* U'_\lambda u_0 \quad (2.25)$$

найдем коэффициент λ_1 в первом разложении (2.23)

$$\lambda_1 = - \frac{(L_1 u_0, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* U_1 u_0}{(L'_\lambda u_0, v_0) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* U'_\lambda u_0} \quad (2.26)$$

Двукратное собственное значение λ_0 : регулярный случай. Рассмотрим теперь случай двукратного СЗ λ_0 с цепочкой Келдыша длины 2, состоящей из собственной функции u_0 и присоединенной функции u_1 , удовлетворяющих уравнениям с граничными условиями [26]

$$L_0 u_0 = 0, \quad U_0 u_0 = 0 \quad (2.27)$$

$$L_0 u_1 = -L'_\lambda u_0, \quad U_0 u_1 = -U'_\lambda u_0 \quad (2.28)$$

Умножим скалярно уравнение (2.27) на функцию v_1 , а уравнение (2.28) – на функцию v_0 , проинтегрируем получившиеся выражения по частям с использованием формулы (2.5) для операторов L_0 , L'_λ и затем сложим. В результате приходим к соотношению

$$(u_0, L_0^* v_1 + L_{\tilde{\lambda}}^{*'} v_0) + (u_1, L_0^* v_0) + \\ + v_1^* \begin{vmatrix} -L_0(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & L_0(1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 + v_0^* \\ u_1 + v_0^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -L_0(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & L_0(1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -L'_\lambda(0) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & L'_\lambda(1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_0 \\ u_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

С учетом соотношений (2.8), (2.10) преобразуем уравнение (2.29) к виду

$$(u_0, L_0^* v_1 + L_{\tilde{\lambda}}^{*'} v_0) + (u_1, L_0^* v_0) + (V_0 v_1 + V'_{\tilde{\lambda}} v_0) * \tilde{U}_0 u_0 - (\tilde{V}_0 v_1 + \tilde{V}'_{\tilde{\lambda}} v_0) * U_0 u_0 + \\ + (V_0 v_0) * (\tilde{U}_0 u_1 + \tilde{U}'_{\tilde{\lambda}} u_0) - (\tilde{V}_0 v_0) * (U_0 u_1 + U'_\lambda u_0) = 0 \quad (2.30)$$

Функции v_0 и v_1 , удовлетворяющие уравнениям и граничным условиям

$$L_0^* v_0 = 0, \quad V_0 v_0 = 0 \quad (2.31)$$

$$L_0^* v_1 = -L_{\tilde{\lambda}}^{*'} v_0, \quad V_0 v_1 = -V'_{\tilde{\lambda}} v_0 \quad (2.32)$$

образуют сопряженную цепочку Келдыша двукратного СЗ λ_0 . Уравнения сопряженных цепочек (2.27), (2.28) и (2.31), (2.32) имеют одинаковую форму и обращают равенство (2.30) в тождество.

Умножая скалярно уравнение (2.28) на функцию v_0 и используя тождество Лагранжа (2.11), принимающее при учете уравнения и граничных условий (2.28) вид

$$(L_0 u_1, v_0) = v_0^* \tilde{V}_0^* U'_\lambda u_0 \quad (2.33)$$

получим условие ортогональности

$$(L'_\lambda u_0, v_0) + v_0^* \tilde{V}_0^* U'_\lambda u_0 = 0 \quad (2.34)$$

Соотношение (2.34) связывает собственные функции сопряженных задач при наличии двукратного СЗ с цепочкой Келдыша длины 2. Однако оно справедливо и для кратного СЗ с цепочкой Келдыша произвольной длины. Для циркуляционных неконсервативных систем условие ортогональности (2.34) характеризует наступление (границу) флаттера [35, 37].

Возмущенное двукратное СЗ $\lambda(\epsilon)$ и его СФ $u(\epsilon)$ выражаются при помощи рядов Ньютона–Пьюизо [34]

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon^{1/2} + \lambda_2 \epsilon + \lambda_3 \epsilon^{3/2} + \lambda_4 \epsilon^2 + \dots \quad (2.35)$$

$$u = u_0 + w_1 \epsilon^{1/2} + w_2 \epsilon + w_3 \epsilon^{3/2} + w_4 \epsilon^2 + \dots \tag{2.36}$$

Подставим, как и в предыдущем случае, разложения (2.17)–(2.20) и (2.35), (2.36) в задачу на собственные значения (2.3) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ϵ . Отсюда найдем, что функции w_1, w_2, w_3 удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$L_0 w_1 = -\lambda_1 L'_\lambda u_0, \quad U_0 w_1 = -\lambda_1 U'_\lambda u_0 \tag{2.37}$$

$$L_0 w_2 = -\lambda_1 L'_\lambda w_1 - \lambda_2 L'_\lambda u_0 - L_1 u_0 - \frac{\lambda_1^2}{2!} L''_{\lambda\lambda} u_0 \tag{2.38}$$

$$U_0 w_2 = -\lambda_1 U'_\lambda w_1 - \lambda_2 U'_\lambda u_0 - U_1 u_0 - \frac{\lambda_1^2}{2!} U''_{\lambda\lambda} u_0$$

$$L_0 w_3 = -\lambda_1 L'_\lambda w_2 - \left(L_1 + \lambda_2 L'_\lambda + \frac{\lambda_1^2}{2!} L''_{\lambda\lambda} \right) w_1 - \left(\lambda_1 L'_{1\lambda} + \lambda_3 L'_\lambda + \lambda_1 \lambda_2 L''_{\lambda\lambda} + \frac{\lambda_1^3}{3!} L'''_{\lambda\lambda\lambda} \right) u_0 \tag{2.39}$$

$$U_0 w_3 = -\lambda_1 U'_\lambda w_2 - \left(U_1 + \lambda_2 U'_\lambda + \frac{\lambda_1^2}{2!} U''_{\lambda\lambda} \right) w_1 - \left(\lambda_1 U'_{1\lambda} + \lambda_3 U'_\lambda + \lambda_1 \lambda_2 U''_{\lambda\lambda} + \frac{\lambda_1^3}{3!} U'''_{\lambda\lambda\lambda} \right) u_0$$

Сравнивая уравнения (2.37) и (2.28), найдем, что функция w_1 имеет структуру

$$w_1 = \lambda_1 u_1 + \gamma u_0, \tag{2.40}$$

где γ – произвольный коэффициент. Умножая скалярно уравнение (2.38) на функцию u_0 , подставляя в получившееся произведение выражение для функции w_1 из (2.40) и учитывая уравнения (2.31), (2.32) и тождество Лагранжа (2.11), получим коэффициент λ_1 в разложении (2.35)

$$\lambda_1^2 = -\frac{1}{\sigma_2} ((L_1 u_0, v_0) + v_0^* \tilde{V}_0^* U_1 u_0), \quad \sigma_2 = \sum_{r=1}^2 \frac{1}{r!} ((L_\lambda^{(r)} u_{2-r}, v_0) + v_0^* \tilde{V}_0^* U_\lambda^{(r)} u_{2-r}) \tag{2.41}$$

Чтобы найти следующий коэффициент разложения λ_2 , умножим уравнение (2.39) скалярно на функцию u_0 и учтем формулу Лагранжа (2.11). Получим

$$\begin{aligned} & \gamma \frac{\lambda_1^2}{2} ((L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{V}_0 v L_0)^* U''_{\lambda\lambda} u_0) + \lambda_1 ((L'_\lambda w_2, v_0) + (\tilde{V}_0 v L_0)^* U'_\lambda w_2) + \\ & + \gamma ((L_1 u_0, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0)^* U_1 u_0) + \lambda_1 ((L_1 u_1 + L'_{1\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0)^* (U_1 u_1 + U'_{1\lambda} u_0)) + \\ & + \lambda_1^3 \left(\left(\frac{1}{2!} L''_{\lambda\lambda} u_1 + \frac{1}{3!} L'''_{\lambda\lambda\lambda} u_0, v_0 \right) + (\tilde{V}_0 v_0)^* \left(\frac{1}{2!} U''_{\lambda\lambda} u_1 + \frac{1}{3!} U'''_{\lambda\lambda\lambda} u_0 \right) \right) + \\ & + \lambda_1 \lambda_2 ((L'_\lambda u_1 + L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0)^* (U'_\lambda u_1 + U''_{\lambda\lambda} u_0)) = 0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

С другой стороны, скалярное произведение уравнения (2.38) и функции v_1 с использованием формулы интегрирования (2.5) и тождеств (2.8), (2.10) дает соотношение

$$\begin{aligned} & (L'_\lambda w_2, v_0) + (\tilde{V}_0 v L_0)^* U'_\lambda w_2 = -(\tilde{V}_0 v_1 + \tilde{V}'_\lambda v_0)^* U_0 w_2 + \\ & + \lambda_1^2 (L'_\lambda u_1, v_1) + \gamma \lambda_1 (L'_\lambda u_0, v_1) + (L_1 u_0, v_1) + \lambda_2 (L'_\lambda u_0, v_1) + \frac{\lambda_1^2}{2} (L''_{\lambda\lambda} u_0, v_1) \end{aligned} \tag{2.43}$$

Кроме того, справедливо тождество

$$(L'_\lambda u_0, v_1) + (\tilde{V}_0 v_1 + \tilde{V}'_\lambda v_0) * U'_\lambda u_0 = (L'_\lambda u_1, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0) * U'_\lambda u_1 \quad (2.44)$$

которое следует из уравнений (2.27), (2.28) и (2.31), (2.32), а также (2.10).

С учетом соотношений (2.41), (2.43) и (2.44) из уравнения (2.42) найдем

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & -\frac{1}{2\sigma_2}((L_1 u_0, v_1) + (L_1 u_1, v_0) + (L'_{1\lambda} u_0, v_0)) - \\ & -\frac{1}{2\sigma_2}(v_1^* \tilde{V}_0^* U_1 u_0 + v_0^* \tilde{V}_0^* U_1 u_1 + v_0^* (\tilde{V}^* U_1)_\lambda u_0 + \lambda_1^2 Q) \end{aligned} \quad (2.45)$$

где

$$\begin{aligned} Q = & (L'_\lambda u_1, v_1) + \frac{1}{2!}(L''_{\lambda\lambda} u_0, v_1) + \frac{1}{2!}(L''_{\lambda\lambda} u_1, v_0) + \frac{1}{3!}(L'''_{\lambda\lambda\lambda} u_0, v_0) + \\ & + (\tilde{V}_0 v_1 + \tilde{V}'_\lambda v_0) * \left(U'_\lambda u_1 + \frac{1}{2!} U''_{\lambda\lambda} u_0 \right) + (\tilde{V}_0 v_0) * \left(\frac{1}{2!} U''_{\lambda\lambda} u_1 + \frac{1}{3!} U'''_{\lambda\lambda\lambda} u_0 \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

а величина σ_2 определена вторым соотношением (2.41).

Двукратное собственное значение λ_0 : вырожденный случай. Разложения (2.35) с коэффициентами, определенными уравнениями (2.41), (2.45), справедливы при условии $\lambda_1 \neq 0$. Случай $\lambda_1 = 0$, что эквивалентно условию

$$(L_1 u_0, v_0) + v_0^* V_0^* U_1 u_0 = 0 \quad (2.47)$$

является *вырожденным* и требует отдельного рассмотрения. Подстановка разложений (2.31), (2.32) совместно с разложениями (2.17)–(2.20) в задачу на СЗ (2.3) при условии $\lambda_1 = 0$ приводит к уравнениям с граничными условиями

$$L_0 w_1 = 0, \quad U_0 w_1 = 0 \quad (2.48)$$

$$L_0 w_2 = -\lambda_2 L'_\lambda u_0 - L_1 u_0, \quad U_0 w_2 = -\lambda_2 U'_\lambda u_0 - U_1 u_0 \quad (2.49)$$

$$L_0 w_4 = -\lambda_3 L'_\lambda w_1 - \lambda_2 L'_\lambda w_2 - L_1 w_2 - \lambda_2 L'_{1\lambda} u_0 - \lambda_2^2 \frac{1}{2} L''_{\lambda\lambda} u_0 - \lambda_4 L'_\lambda u_0 - L_2 u_0 \quad (2.50)$$

$$U_0 w_4 = -\lambda_3 U'_\lambda w_1 - \lambda_2 U'_\lambda w_2 - U_1 w_2 - \lambda_2 U'_{1\lambda} u_0 - \lambda_2^2 \frac{1}{2} U''_{\lambda\lambda} u_0 - \lambda_4 U'_\lambda u_0 - U_2 u_0$$

Решая уравнения (2.48), (2.49), получим

$$w_1 = \beta u_0, \quad w_2 = \lambda_2 u_1 + \gamma u_0 + \hat{w}_2 \quad (2.51)$$

где β и γ – произвольные постоянные, функция \hat{w}_2 является решением краевой задачи

$$L_0 \hat{w}_2 = -L_1 u_0, \quad U_0 \hat{w}_2 = -U_1 u_0 \quad (2.52)$$

а вектор $\hat{w}_2 = (\hat{w}_2(0), \hat{w}'_{2x}(0), \dots, \hat{w}^{(m-1)}_{2x}(0), \hat{w}_2(1), \hat{w}'_{2x}(1), \dots, \hat{w}^{(m-1)}_{2x}(1))$.

Умножив уравнение (2.49) скалярно на функцию v_1 и учитывая формулу Лагранжа (2.11) и выражения (2.8), (2.10), найдем

$$(L'_\lambda w_2, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0) * U'_\lambda w_2 = -(\tilde{V}_0 v_1 + \tilde{V}'_\lambda v_0) * U_0 w_2 + \lambda_2 (L'_\lambda u_0, v_1) + (L_1 u_0, v_1) \quad (2.53)$$

Кроме того, скалярное произведение уравнения (2.50) на функцию v_0 с учетом формулы Лагранжа (2.11), граничных условий (2.50) и выражения (2.51) дает

$$\lambda_2((L'_\lambda w_2, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0)^* U'_\lambda w_2) + (L_1 w_2, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0)^* U_1 w_2 + (L_2 u_0, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0)^* U_2 u_0 + \lambda_2((L'_{1\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0)^* U'_{1\lambda} u_0) + \frac{1}{2} \lambda_2^2((L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0)^* U''_{\lambda\lambda} u_0) = 0 \quad (2.54)$$

После подстановки выражения (2.53) в уравнение (2.54) последнее при учете тождества (2.44) и граничных условий (2.38) принимает вид

$$\lambda_2^2 \sigma_2 + \lambda_2(L_1 u_0, v_1) + (L_1 u_1, v_0) + (L'_{1\lambda} u_0, v_0) + v_1^* \tilde{V}_0^* U_1 u_0 + v_0^* \tilde{V}_0^* U_1 u_1 + v_0^* (\tilde{V}^* U_1)'_\lambda u_0 + (L_2 u_0, v_0) + (L_1 \hat{w}_2, v_0) + (\tilde{V}_0 v_0)^* (U_2 u_0 + U_1 \hat{w}_2) = 0 \quad (2.55)$$

Величина σ_2 определена вторым соотношением (2.41).

Таким образом, разложение $\lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_2 + o(\epsilon)$ и квадратное уравнение (2.55) описывают распад двукратного СЗ при вырождении (2.47).

В случае, когда граничные условия не зависят от параметров или оператор L является матричным, формула (2.55) упрощается [19]

$$\lambda_2^2 + \lambda_2 \frac{(L_1 u_0, v_1) + (L_1 u_1, v_0) + (L'_{1\lambda} u_0, v_0)}{(L'_\lambda u_1, v_0) + 1/2(L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0)} + \frac{(L_2 u_0, v_0) + (L_1 \hat{w}_2, v_0)}{(L'_\lambda u_1, v_0) + 1/2(L''_{\lambda\lambda} u_0, v_0)} = 0 \quad (2.56)$$

Если же оператор L имеет вид $Lu \equiv l(p)u - \lambda u$, где $l(p)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а граничные условия от λ не зависят, то формула (2.55) преобразуется к виду, полученному в работе [32].

Собственное значение произвольной кратности. Выведем теперь формулу, описывающую распад μ -кратного СЗ λ_0 с цепочкой Келдыша длины μ , состоящей из одной собственной функции u_0 и присоединенных функций $u_1, \dots, u_{\mu-1}$. Функции, образующие цепочку Келдыша, удовлетворяют уравнениям с граничными условиями [23–25]

$$L_0 u_0 = 0, \quad U_0 u_0 = 0 \\ L_0 u_j = - \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} L_\lambda^{(r)} u_{j-r}, \quad U_0 u_j = - \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} U_\lambda^{(r)} u_{j-r}, \quad j = 1, \dots, \mu - 1 \quad (2.57)$$

где частные производные вычисляются при $\lambda = \lambda_0$ и $p = p_0$. Цепочка Келдыша для комплексно-сопряженного СЗ $\bar{\lambda}_0$ оператора L_0^* , эрмитово-сопряженного к L_0 , удовлетворяет уравнениям

$$L_0^* v_0 = 0, \quad V_0 v_0 = 0 \\ L_0^* v_j = - \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} L_\lambda^{*(r)} v_{j-r}, \quad V_0 v_j = - \sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} V_\lambda^{(r)} v_{j-r}, \quad j = 1, \dots, \mu - 1 \quad (2.58)$$

Умножая скалярно уравнения (2.57) на функцию v_0 и принимая во внимание тождество Лагранжа (2.11), приходим к соотношениям ортогональности

$$\sum_{r=1}^j \frac{1}{r!} ((L_\lambda^{(r)} u_{j-r}, v_0) + v_0^* \tilde{V}_0^* U_\lambda^{(r)} u_{j-r}) = 0, \quad j = 1, \dots, \mu - 1 \quad (2.59)$$

Уравнения (2.59) содержат в себе условие ортогональности (2.34).

Рассмотрим гладкую вариацию вектора параметров (2.16). Возмущенное СЗ $\lambda(\epsilon)$ и СФ $u(\epsilon)$ представляются рядами Ньютона – Пуизо [34]

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \epsilon^{1/\mu} + \lambda_2 \epsilon^{2/\mu} + \dots + \lambda_{\mu-1} \epsilon^{(\mu-1)/\mu} + \lambda_\mu \epsilon + \dots \quad (2.60)$$

$$u = u_0 + w_1 \epsilon^{1/\mu} + w_2 \epsilon^{2/\mu} + \dots + w_{\mu-1} \epsilon^{(\mu-1)/\mu} + w_\mu \epsilon + \dots \quad (2.61)$$

Подставим разложения (2.60), (2.61) совместно с (2.17)–(2.20) в задачу на собственные значения (2.3) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ϵ . Тогда первые $\mu - 1$ уравнений с граничными условиями примут вид

$$L_0 w_r = - \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{\sigma=1}^{r-j} \frac{1}{\sigma!} L_\lambda^{(\sigma)} \sum_{|\alpha_\sigma=r-j} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_\sigma} \right) w_j, \quad r = 1, \dots, \mu-1 \quad (2.62)$$

$$U_0 w_r = - \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{\sigma=1}^{r-j} \left(\sum_{|\alpha_\sigma=r-j} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_\sigma} \right) \frac{1}{\sigma!} U_\lambda^{(\sigma)} w_j, \quad |\alpha_\sigma| = \alpha_1 + \dots + \alpha_\sigma \quad (2.63)$$

где $w_0 = u_0$, а индексы $\alpha_1, \dots, \alpha_{\mu-1}$ – положительные целые числа. Уравнение и граничные условия для функции w_μ имеют вид

$$L_0 w_\mu = - L_1 w_0 - \sum_{j=0}^{\mu-1} \left(\sum_{\sigma=1}^{\mu-j} \frac{1}{\sigma!} L_\lambda^{(\sigma)} \sum_{|\alpha_\sigma=\mu-j} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_\sigma} \right) w_j \quad (2.64)$$

$$U_0 w_\mu = - U_1 w_0 - \sum_{j=0}^{\mu-1} \sum_{\sigma=1}^{\mu-j} \left(\sum_{|\alpha_\sigma=\mu-j} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_\sigma} \right) \frac{1}{\sigma!} U_\lambda^{(\sigma)} w_j \quad (2.65)$$

Сравнение уравнений (2.62), (2.63) с уравнениями цепочки Келдыша (2.58) дает коэффициенты w_r в разложениях (2.61)

$$w_r = \sum_{j=1}^r u_j \sum_{|\alpha_j=r} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_j}, \quad r = 1, \dots, \mu-1 \quad (2.66)$$

которые удовлетворяют граничным условиям (2.63). С использованием функций (2.66) преобразуем уравнения (2.64), (2.65) к виду

$$L_0 w_\mu = - L_1 u_0 - \lambda_1^\mu \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r!} L_\lambda^{(r)} u_{\mu-r} + \sum_{j=1}^{\mu-1} L_0 u_j \sum_{|\alpha_j=\mu} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_j} \quad (2.67)$$

$$U_0 w_\mu = - U_1 u_0 - \lambda_1^\mu \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r!} U_\lambda^{(r)} u_{\mu-r} + \sum_{j=1}^{\mu-1} U_0 u_j \sum_{|\alpha_j=\mu} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_j} \quad (2.68)$$

Умножая уравнение (2.67) скалярно на v_0 и принимая во внимание, что

$$(L_0 u_j, v_0) + v_0^* \tilde{V}_0^* U_0 u_j = 0, \quad j = 1, \dots, \mu-1 \quad (2.69)$$

а также тождество Лагранжа (2.11), имеющее здесь вид

$$(L_0 w_\mu, v_0) = v_0^* \tilde{V}_0^* U_1 u_0 + \lambda_1^\mu \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r!} v_0^* \tilde{V}_0^* U_\lambda^{(r)} u_{\mu-r} - \sum_{j=1}^{\mu-1} v_0^* \tilde{V}_0^* U_0 u_j \sum_{|\alpha_j=\mu} \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_j} \quad (2.70)$$

найдем коэффициент λ_1 в разложениях (2.60)

$$\lambda_1^\mu = -\frac{1}{\sigma_\mu} ((L_1 u_0, v_0) + v_0^* \tilde{V}_0^* U_1 u_0), \quad \sigma_\mu = \sum_{r=1}^{\mu} \frac{1}{r!} ((L_\lambda^{(r)} u_{\mu-r}, v_0) + v_0^* \tilde{V}_0^* U_\lambda^{(r)} u_{\mu-r}) \quad (2.71)$$

Таким образом, получена явная формула, описывающая распад кратных СЗ с цепочкой Келдыша произвольной длины для линейных дифференциальных операторов, аналитически зависящих от комплексного спектрального параметра и являющихся гладкими функциями вектора действительных параметров.

3. Аналитическое описание “парадокса дестабилизации”. Сформулируем теперь обобщенную задачу на собственные значения, возникающую при исследовании устойчивости вязкоупругих систем

$$L(\lambda, q, \mathbf{k})u \equiv N(q)u + \lambda D(\mathbf{k})u + \lambda^2 M u = 0 \quad (3.1)$$

$$U(q, \mathbf{k}, \lambda)u \equiv U_N(q)u = 0 \quad (3.2)$$

Коэффициенты дифференциальных операторов N, D, M порядка m и матрицы U_N размерности $m \times 2m$ предполагаются действительными. Оператор $N(q)$ и матрица $U_N(q)$ гладко зависят от действительного параметра нагрузки $q \geq 0$, а коэффициенты дифференциального оператора $D(\mathbf{k})$, порядок которого не превосходит m , – гладкие функции вектора действительных параметров диссипации $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$, причем при $\mathbf{k} = 0$ оператор $D(0) = 0$. Также предполагается, что оператор M от параметров не зависит. Таким образом, возмущение системы малыми диссипативными силами ($|\mathbf{k}| \ll 1$) является регулярным [34].

Предполагается, что невозмущенная система

$$N(q)u + \lambda^2 M u = 0, \quad U_N(q)u = 0 \quad (3.3)$$

на интервале $0 \leq q < q_0$ имеет дискретный спектр, состоящий из простых чисто мнимых СЗ $\lambda = i\omega$, и, следовательно, устойчива, а при $q = q_0$ существует пара двукратных СЗ $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$ с цепочкой Келдыша длины 2 (неустойчивость) [31, 32]. Собственная u_0 и присоединенная u_1 функции СЗ $i\omega_0$ удовлетворяют уравнениям (2.27), (2.28), которые принимают здесь вид

$$L_0 u_0 \equiv N(q_0)u_0 - \omega_0^2 M u_0 = 0, \quad U_0 u_0 \equiv U_N(q_0)u_0 = 0 \quad (3.4)$$

$$N(q_0)u_1 - \omega_0^2 M u_1 = -2i\omega_0 M u_0, \quad U_N(q_0)u_1 = 0 \quad (3.5)$$

В силу действительности коэффициентов операторов и матриц, входящих в уравнения (3.4), (3.5), выберем собственную функцию u_0 действительной. Тогда присоединенная функция u_1 будет чисто мнимой. Все остальные СЗ $\pm i\omega_{0,j}$, $\omega_{0,j} > 0$ невозмущенной системы при $q = q_0$ предполагаются простыми и чисто мнимыми. Следовательно, при отсутствии диссипативных сил ($\mathbf{k} = 0$) и $q = q_0$ неконсервативная система находится на границе между областями устойчивости и флаттера [31, 32].

Поскольку коэффициенты оператора L полиномиально зависят от спектрального параметра λ , то матрица $L(x)$, определенная формулой (2.7), имеет вид

$$L(x) = \lambda^2 M(x) + \lambda D(x, \mathbf{k}) + N(x, q) \quad (3.6)$$

Компоненты матриц M, D и N находятся по формулам, аналогичным (2.7), и состоят из коэффициентов операторов M, D и N и их производных по x , соответственно. Выбрав действительную матрицу \tilde{U} размерности $m \times 2m$, по формуле (2.9) найдем мат-

рицы \mathbf{V} и $\tilde{\mathbf{V}}$ размерности $m \times 2m$, определяющие граничные условия сопряженной задачи на собственные значения.

Собственная v_0 и присоединенная v_1 функции комплексно-сопряженного СЗ $-i\omega_0$ удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$N^*(q_0)v_0 - \omega_0^2 M^* v_0 = 0, \quad \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_0 = 0 \quad (3.7)$$

$$N^*(q_0)v_1 - \omega_0^2 M^* v_1 = 2i\omega_0 M^* v_0, \quad \mathbf{V}_0 \mathbf{v}_1 = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \lambda} \mathbf{v}_0 \quad (3.8)$$

Поскольку матрицы \mathbf{U}_0 и $\tilde{\mathbf{U}}_0$ действительные, а матричный полином $\mathbf{L}(x)$, заданный уравнением (3.6), имеет действительные коэффициенты, то, согласно формуле (2.9),

матрицы \mathbf{V}_0 и $\tilde{\mathbf{V}}_0$ также действительны, а матрицы $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \lambda}(\bar{\lambda}_0, \mathbf{p}_0)$ и $\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \lambda}(\bar{\lambda}_0, \mathbf{p}_0)$ — чисто мнимые. Следовательно, функцию v_0 можно выбрать действительной, а v_1 — чисто мнимой.

Так как функции u_0, v_0 определены с точностью до произвольных множителей, а u_1, v_1 — до слагаемых $\gamma_1 u_0, \gamma_2 v_0$, соответственно, где γ_1 и γ_2 являются произвольными постоянными, то выберем действительные функции u_0, v_0 и чисто мнимые функции u_1, v_1 удовлетворяющими условиям нормировки и ортогональности

$$2i\omega_0(Mu_1, v_0) = 1, \quad 2i\omega_0(Mu_1, v_1) + (Mu_0, v_1) + (Mu_1, v_0) = 0 \quad (3.9)$$

Изучим, как устойчивость системы (3.1), (3.2) зависит от линейных возмущений вектора параметров $\mathbf{p} = (\mathbf{k}, q)$

$$\mathbf{p}(\epsilon) = \mathbf{p}_0 + \epsilon \dot{\mathbf{p}}, \quad \epsilon \geq 0 \quad (3.10)$$

где точка означает производную по малому параметру ϵ , вычисленную при $\epsilon = 0$. В случае общего положения возмущенное двукратное СЗ определяется рядом Ньютона — Пуансо (2.35). Подставляя оператор L , заданный уравнением (3.1), в уравнения (2.41), (2.45) и принимая во внимание условия нормировки (3.9), получим коэффициенты λ_1 и λ_2

$$\lambda_1^2 = -i\omega_0 \langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle - \dot{f} \dot{q}, \quad 2\lambda_2 = -\langle \mathbf{f} - \omega_0 \mathbf{h}, \dot{\mathbf{k}} \rangle - i\dot{h} \dot{q} \quad (3.11)$$

где вектор $\dot{\mathbf{k}} = (\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_{n-1})$, угловые скобки обозначают скалярное произведение действительных векторов в R^{n-1} , компоненты действительного вектора \mathbf{f} и действительная скалярная величина \dot{f} имеют вид

$$f_r = \left(\frac{\partial D}{\partial k_r} u_0, v_0 \right), \quad \dot{f} = \left(\frac{\partial N}{\partial q} u_0, v_0 \right) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \frac{\partial \mathbf{U}_N}{\partial q} \mathbf{u}_0, \quad r = 1, \dots, n-1 \quad (3.12)$$

а компоненты действительного вектора \mathbf{h} и действительной скалярной величины \dot{h} определены выражениями

$$ih_r = \left(\frac{\partial D}{\partial k_r} u_1, v_0 \right) + \left(\frac{\partial D}{\partial k_r} u_0, v_1 \right), \quad r = 1, \dots, n-1 \quad (3.13)$$

$$i\dot{h} = \left(\frac{\partial N}{\partial q} u_1, v_0 \right) + \left(\frac{\partial N}{\partial q} u_0, v_1 \right) + \mathbf{v}_1^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \frac{\partial \mathbf{U}_N}{\partial q} \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \frac{\partial \mathbf{U}_N}{\partial q} \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_0^* \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \lambda} \right)^* \frac{\partial \mathbf{U}_N}{\partial q} \mathbf{u}_0 \quad (3.14)$$

Таким образом, из уравнений (3.9)–(3.14) получим

$$\lambda = i\omega_0 \pm \sqrt{-i\omega_0 \langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle - \tilde{f}(q - q_0) - \frac{1}{2}(\langle \mathbf{f} - \omega_0 \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle + i\tilde{h}(q - q_0))} + o(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|) \quad (3.15)$$

Формула (3.15) описывает расщепление двукратного СЗ $i\omega_0$ при изменении параметров $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$ и q в случае, когда подкоренное выражение не равно нулю. Если $\mathbf{k} = 0$, то двукратное СЗ расщепляется на два простых чисто мнимых (устойчивость), если $\tilde{f}(q - q_0) > 0$. Будем предполагать, что постоянная $\tilde{f} < 0$. Тогда система устойчива при $q < q_0$, и неустойчива при $q > q_0$. Случай $\tilde{f} = 0$ является вырожденным и рассматриваться здесь не будет. При достаточно малых вариациях параметров \mathbf{k} и q двукратное СЗ $i\omega_0$ расщепляется в общем случае на два простых комплексных, одно из которых имеет положительную действительную часть (флаттер). Тем не менее, если $\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = 0$ и $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0$, то при $q < q_0$ квадратный корень в уравнении (3.15) чисто мнимый, и для достаточно малых возмущений параметров двукратное СЗ $i\omega_0$ (а также $-i\omega_0$) расщепляется на два простых с отрицательными действительными частями (устойчивость).

Асимптотическая устойчивость системы (3.1), (3.2) при возмущении (3.10) зависит также от поведения простых чисто мнимых СЗ $\pm i\omega_{0,s}$, $\omega_{0,s} > 0$. Выберем действительные собственные функции $u_{0,s}$, $v_{0,s}$ СЗ $i\omega_{0,s}$ удовлетворяющими условиям нормировки

$$2\omega_{0,s}(Mu_{0,s}, v_{0,s}) = 1 \quad (3.16)$$

В соответствии с уравнениями (2.23) и (2.26) приращения простых СЗ $\pm i\omega_{0,s}$ при изменении параметров определяются уравнениями

$$\lambda = \pm i\omega_{0,s} \mp i\tilde{g}_s(q - q_0) - \omega_{0,s} \langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle + o(|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2), \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Действительная величина \tilde{g}_s и компоненты действительного вектора \mathbf{g}_s имеют вид

$$\tilde{g}_s = \left(\frac{\partial N}{\partial q} u_{0,s}, v_{0,s} \right) + \mathbf{v}_0^* \tilde{\mathbf{V}}_0^* \frac{\partial U_N}{\partial q} \mathbf{u}_{0,s}, \quad g_{s,r} = \left(\frac{\partial D}{\partial k_r} u_{0,s}, v_{0,s} \right), \quad r = 1, \dots, n-1 \quad (3.18)$$

Величина $\text{Re} \lambda_s < 0$ при $\langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle > 0$.

Из соотношений (3.15), (3.17) следует, что система (3.1), (3.2) асимптотически устойчива при достаточно малых линейных вариациях параметров \mathbf{k} , q , заданных уравнением (3.10), если выполнены следующие условия:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = 0, \quad q < q_0, \quad \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0, \quad \langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle > 0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Соотношения (3.19) показывают, что множество направлений, ведущих из точки \mathbf{p}_0 в область асимптотической устойчивости, имеет размерность $n - 1$ в n -мерном пространстве параметров системы k_1, \dots, k_{n-1}, q . Таким образом, выйдя из точки \mathbf{p}_0 , можно достичь других точек области асимптотической устойчивости только следуя вдоль кривых, касательных к плоскости $\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = 0$ в точке \mathbf{p}_0 . Для того чтобы получить более точные результаты о геометрии области устойчивости в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, \dots, 0, q_0)$, рассмотрим вариацию вектора параметров вдоль гладкой кривой

$$\mathbf{p}(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{k}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\epsilon^2}{2} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{k}} \\ \dot{q} \end{pmatrix} + o(\epsilon^2) \quad (3.20)$$

предполагая, что

$$\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle = 0 \quad (3.21)$$

Кривая (3.20), (3.21) ортогональна оси q в пространстве параметров \mathbf{k} , q , поскольку $\dot{q} \equiv 0$.

Коэффициент λ_1 в разложении (2.35), определяемый первым из уравнений (3.11), обращается в нуль вдоль кривой (3.20), (3.21). Следовательно, двукратное СЗ $i\omega_0$ в этом вырожденном случае распадается на два простых, зависящих линейно от ϵ [34],

$$\lambda = i\omega_0 + \lambda_2\epsilon + o(\epsilon) \quad (3.22)$$

Коэффициент λ_2 – корень квадратного уравнения (2.55), которое для оператора L с граничными условиями, заданными соотношениями (3.1), (3.2) и для собственных и присоединенных функций, удовлетворяющих уравнениям (3.4), (3.5) и (3.7), (3.8), принимает вид

$$\lambda_2^2 - \lambda_2\omega_0\langle \mathbf{h}, \dot{\mathbf{k}} \rangle + \left(\frac{1}{2}\tilde{f}\ddot{q} + \omega_0^2\langle \mathbf{G}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle \right) + i\omega_0\left(\frac{1}{2}\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle + \langle \mathbf{H}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle \right) = 0 \quad (3.23)$$

В уравнении (3.23) действительные векторы \mathbf{f} , \mathbf{h} и коэффициенты \tilde{f} , \tilde{h} определяются равенствами (3.12)–(3.14), действительная матрица \mathbf{H} имеет компоненты

$$H_{r\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial k_r \partial k_\sigma} u_0, v_0 \right), \quad r, \sigma = 1, \dots, n-1 \quad (3.24)$$

а действительная матрица \mathbf{G} определяется выражением

$$\langle \mathbf{G}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle = \sum_{r=1}^{n-1} \dot{k}_r \left(\frac{\partial D}{\partial k_r} \hat{w}_2, v_0 \right) \quad (3.25)$$

где \hat{w}_2 – решение краевой задачи

$$N(q_0)\hat{w}_2 - \omega_0^2 M\hat{w}_2 = \sum_{r=1}^{n-1} \dot{k}_r \frac{\partial D}{\partial k_r} u_0, \quad \mathbf{U}_N(q_0)\hat{w}_2 = 0 \quad (3.26)$$

Решение задачи (3.26) существует в силу выполнения условия разрешимости, эквивалентного (3.21).

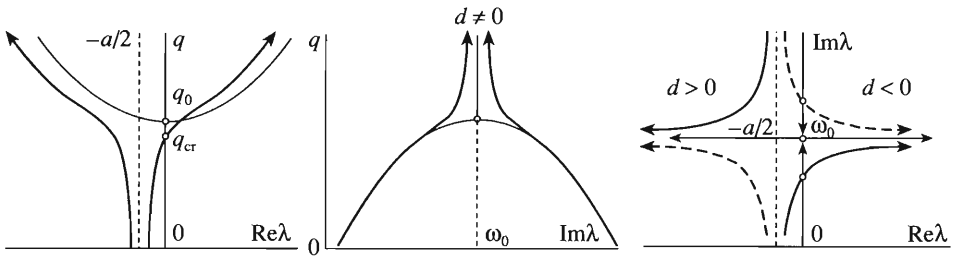
Принимая во внимание явные уравнения (3.20), (3.21) кривой $\mathbf{p}(\epsilon)$ и выражение (3.22), запишем уравнение (3.23) в виде

$$(\lambda - i\omega_0)^2 - \omega_0\langle \mathbf{h}, \dot{\mathbf{k}} \rangle(\lambda - i\omega_0) + \tilde{f}(q - q_0) + \omega_0^2\langle \mathbf{G}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle + i\omega_0(\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{k}} \rangle + \langle \mathbf{H}\dot{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{k}} \rangle) = 0 \quad (3.27)$$

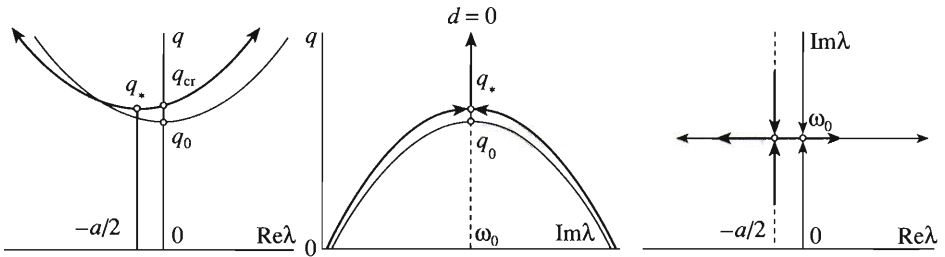
Уравнение (3.27) описывает распад двукратного СЗ $i\omega_0$ при малом возмущении параметров \mathbf{k} и q . Для более подробного изучения этого процесса подставим $\lambda = \text{Re}\lambda + i\text{Im}\lambda$ в уравнение (3.27), отделим вещественные и мнимые части и, преобразуя их, найдем

$$(\text{Im}\lambda - \omega_0 + \text{Re}\lambda + a/2)^2 - (\text{Im}\lambda - \omega_0 - \text{Re}\lambda - a/2)^2 = -2d \quad (3.28)$$

$$\left(\text{Re}\lambda + \frac{a}{2} \right)^4 + \left(c - \frac{a^2}{4} \right) \left(\text{Re}\lambda + \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{d^2}{4} \quad (3.29)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$(\text{Im}\lambda - \omega_0)^4 - \left(c - \frac{a^2}{4}\right)(\text{Im}\lambda - \omega_0)^2 = \frac{d^2}{4} \quad (3.30)$$

где

$$a = -\omega_0 \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle, \quad c = \tilde{f}(q - q_0) + \omega_0^2 \langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle, \quad d = \omega_0 (\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle) \quad (3.31)$$

Рассмотрим сначала случай, когда система циркуляционная ($\mathbf{k} = 0$). Тогда в соответствии с уравнением (3.31) величины $a = 0$, $c = \tilde{f}(q - q_0)$, $d = 0$, и уравнения (3.29), (3.30) принимают вид

$$q \leq q_0: \text{Re}\lambda = 0, \quad \text{Im}\lambda = \omega_0 \pm \sqrt{\tilde{f}(q - q_0)} \quad (3.32)$$

$$q \geq q_0: \text{Re}\lambda = \pm \sqrt{-\tilde{f}(q - q_0)}, \quad \text{Im}\lambda = \omega_0 \quad (3.33)$$

Уравнения (3.32), (3.33) показывают, что при увеличении параметра нагрузки q два простых чисто мнимых СЗ движутся вдоль мнимой оси, сталкиваются при $q = q_0$ и затем расходятся в направлении, перпендикулярном к мнимой оси с образованием пары простых комплексных СЗ (флаттер). Такое поведение СЗ известно как *сильное взаимодействие*, типичное для циркуляционных систем [22]. Траектории СЗ циркуляционной системы при изменении параметра q показаны на фиг. 2 и 3 тонкими линиями.

Если $\mathbf{k} \neq 0$ и $d \neq 0$, то диссипативные и гироскопические силы разрушают сильное взаимодействие СЗ, сдвигая и расщепляя их траектории, как показано на фиг. 1 и 2 жирными линиями. Этот качественный эффект, известный в литературе лишь из численных решений частных механических задач [2, 12], *аналитически* описывается уравнениями (3.28)–(3.30).

В самом деле, для фиксированного вектора $\mathbf{k} \neq 0$ при изменении параметра q СЗ движутся на комплексной плоскости вдоль ветвей гиперболы (3.28), имеющей две асимптоты $\operatorname{Re} \lambda = -a/2$ и $\operatorname{Im} \lambda = \omega_0$, величина a определена первым из уравнений (3.31). Если $a > 0$, то одно из двух СЗ находится в левой части комплексной плоскости, тогда как другое пересекает мнимую ось и переходит в правую часть при $q = q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$. Таким образом, условие $a > 0$ или, эквивалентно, $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0$ является необходимым условием асимптотической устойчивости. Уравнения (3.29), (3.30) описывают вещественную и мнимую части СЗ λ как функции параметров q и \mathbf{k} . Функции $\operatorname{Re} \lambda(q)$ и $\operatorname{Im} \lambda(q)$ для $\mathbf{k} \neq 0$ показаны на фиг. 2 жирными линиями. Значение параметра q , при котором одно из СЗ пересекает мнимую ось, следует из уравнения (3.29), если предположить в нем $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Это дает соотношение, которое при учете явных выражений (3.31) для величин a , c , и d принимает вид

$$q_{\text{cr}}(\mathbf{k}) = q_0 + \frac{(\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle)^2}{\tilde{f} \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle^2} - \frac{\omega_0^2}{\tilde{f}} \langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle \quad (3.34)$$

Таким образом, оба СЗ находятся в левой части комплексной плоскости, если

$$q < q_{\text{cr}}(\mathbf{k}), \quad \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0 \quad (3.35)$$

Необходимые и достаточные условия (3.35) того, что все корни комплексного полинома (3.27) имеют отрицательные вещественные части, могут быть получены также из критерия Бильхарца [38], который является аналогом критерия Рауса – Гурвица для комплексных полиномов.

Поскольку, по предположению, $\tilde{f} < 0$, то из формулы (3.34) следует, что критическая нагрузка системы с диссипацией $q_{\text{cr}}(\mathbf{k}) < q_0$, если $\langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle < 0$. Напротив, при $\langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle > 0$ существует область изменения вектора параметров \mathbf{k} , определенная вторым неравенством (3.35) и условием

$$(\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle)^2 - \omega_0^2 \langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle^2 < 0 \quad (3.36)$$

в которой критическая нагрузка системы с диссипацией $q_{\text{cr}}(\mathbf{k}) > q_0$.

Подставляя $\operatorname{Re} \lambda = 0$ в уравнение (3.28), найдем выражение для критической частоты

$$\omega_{\text{cr}}(\mathbf{k}) = \operatorname{Im} \lambda_{\text{cr}}(\mathbf{k}) = \omega_0 + \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle}{\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle} \quad (3.37)$$

Отсюда следует, что скачок критической частоты за счет малой диссипации $\mathbf{k} = \epsilon \tilde{\mathbf{k}}$ составляет

$$\Delta \omega \equiv \omega_0 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega_{\text{cr}}(\epsilon \tilde{\mathbf{k}}) = - \frac{\langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle}{\langle \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle} \quad (3.38)$$

В случае, когда

$$d \equiv \omega_0 (\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle) = 0$$

сильное взаимодействие СЗ сохраняется при введении малых сил, зависящих от скорости ($\mathbf{k} \neq 0$). В соответствии с формулами (3.29), (3.30), принимающими в этом случае вид

$$q \leq q_*: \operatorname{Re} \lambda = \omega_0 \frac{\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle}{2}, \quad \operatorname{Im} \lambda = \omega_0 \pm \sqrt{\tilde{f}(q - q_*)} \quad (3.39)$$

$$q \geq q_*: \operatorname{Re} \lambda = \omega_0 \frac{\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle}{2} \pm \sqrt{-\tilde{f}(q - q_*)}, \quad \operatorname{Im} \lambda = \omega_0 \quad (3.40)$$

комплексные СЗ λ с $\operatorname{Re} \lambda = -a/2$ сильно взаимодействуют при $q = q_*$, где

$$q_* = q_0 + \omega_0^2 \frac{\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle^2 - 4 \langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle}{4\tilde{f}} \quad (3.41)$$

При дальнейшем возрастании параметра q двукратное СЗ $\lambda_* = -a/2 + i\omega_0$ расщепляется на два простых комплексно-сопряженных (фиг. 3), причем одно из них пересекает мнимую ось при значении $q = q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$, заданном уравнением (3.34). Это условие принимает вид

$$q_{\text{cr}}(\mathbf{k}) = q_0 - \frac{\omega_0^2}{f} \langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle \quad (3.42)$$

Таким образом, приходим к заключению, что в случае $d = 0$ малые диссипативные силы лишь сдвигают картину сильного взаимодействия СЗ с мнимой оси, как показано на фиг. 3 для $a > 0$. Как и в предыдущем случае ($d \neq 0$), оба СЗ находятся в левой полуплоскости, если выполнены условия (3.35). При этом, как следует из формул (3.42) и (3.39), (3.40), нет скачка критической нагрузки и частоты. Если дополнительно $\langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle > 0$, то, в соответствии с уравнением (3.42), критическая нагрузка возрастает при наличии малых диссипативных сил.

Ограничимся случаем, когда

$$\{\mathbf{k}: \langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = 0, \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0\} \subset \{\mathbf{k}: \langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle > 0, s = 1, 2, \dots\} \quad (3.43)$$

означающим, что все простые СЗ $\pm i\omega_{0,s}$ сдвигаются при малом возмущении параметров q и \mathbf{k} в левую часть комплексной плоскости, поэтому устойчивость системы (3.1), (3.2) зависит лишь от распада двукратных СЗ $\pm i\omega_0$. Таким образом, поверхность $q_{\text{cr}}(k_1, \dots, k_{n-1})$, аппроксимируемая уравнением (3.34) при ограничении, задаваемом вторым неравенством (3.35), является границей области асимптотической устойчивости (3.35) в малой окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, \dots, 0, q_0)$.

Функция $q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$, заданная уравнением (3.34), состоит из рациональной и полиномиальной частей. Рациональная часть содержит линейные формы по отношению к вектору \mathbf{k} в числителе и знаменателе. Таким образом, функция $q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$ имеет особенность в точке $\mathbf{k} = 0$, и критическая нагрузка как функция $n - 1$ переменной не имеет предела при $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n-1}) \rightarrow 0$. Этот факт был впервые установлен для критической нагрузки маятника Циглера [13, 15] и оказался справедливым для произвольных линейных неконсервативных систем с конечным числом степеней свободы [20]. Тем не менее однородность числителя и знаменателя рациональной части функции $q_{\text{cr}}(\mathbf{k})$ гарантирует существование предела $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\text{cr}}(\epsilon \tilde{\mathbf{k}})$ для любого направления $\tilde{\mathbf{k}}$, такого, что $\langle \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle \neq 0$. Подставляя $\mathbf{k} = \epsilon \tilde{\mathbf{k}}$ в уравнение (3.34), найдем явное выражение, аппроксимирующее скачок критической нагрузки за счет малых диссипативных сил

$$\Delta q \equiv q_0 - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{\text{cr}}(\epsilon \tilde{\mathbf{k}}) = -\frac{1}{\tilde{f}} \frac{\langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle^2}{\langle \mathbf{h}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle^2} \quad (3.44)$$

Если $\langle \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{k}} \rangle = 0$, то скачок критической нагрузки отсутствует ($\Delta q = 0$). Для двумерного вектора $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ это условие дает отношение параметров k_1 и k_2

$$\frac{k_i}{k_j} = -\frac{f_j}{f_i}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.45)$$

при котором малые силы, зависящие от скорости, не уменьшают критическую нагрузку. Величины f_1, f_2 определяются первым из уравнений (3.12). Сильная зависимость критической нагрузки от отношения параметров диссипации впервые была отмечена В.В. Болотиным [2, 4].

Функция $q_{cr}(\mathbf{k})$, заданная уравнением (3.34) при ограничении (3.35), определяет границу между областями асимптотической устойчивости и флаттера системы (3.1), (3.2) в n -мерном пространстве параметров \mathbf{k}, q . Множества уровня функции (3.34) являются границами области устойчивости в пространстве параметров $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n-1})$. Множество уровня $q_{cr} = q_0$, где q_0 – критическое значение параметра q для невозмущенной циркуляционной системы (3.3), дается уравнением

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle = \pm \omega_0 \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle \sqrt{\langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle} - \langle \mathbf{Hk}, \mathbf{k} \rangle \quad (3.46)$$

Действительные решения этого уравнения существуют, если $\langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle \geq 0$. В этом случае множество (3.46) ограничивает область изменения вектора параметров диссипации (3.36), в которой критическая нагрузка $q_{cr}(\mathbf{k}) > q_0$. В случае отрицательной определенности матрицы \mathbf{G} величина $\langle \mathbf{Gk}, \mathbf{k} \rangle \leq 0$, и уравнение (3.46) имеет единственное действительное решение $\mathbf{k} = 0$, что означает снижение критической нагрузки (дестабилизацию) при любых малых $\mathbf{k} \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда вектор параметров диссипации состоит из двух компонент $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$. Тогда граница области устойчивости, описываемая функцией $q_{cr}(k_1, k_2)$, является поверхностью в трехмерном пространстве параметров k_1, k_2, q . Для того чтобы понять, как устроена эта поверхность, найдем асимптотические формулы для линий уровня функции $q_{cr}(k_1, k_2)$ в окрестности начала координат на плоскости параметров k_1, k_2 для q_{cr} , близких к q_0 .

Сначала получим аппроксимация линий уровня для $q_{cr} < q_0$ в предположении, что один из параметров k_1, k_2 – гладкая функция другого. Подставляя в уравнение (3.34) разложение

$$k_i = \beta_j k_j + o(k_j), \quad i, j = 1, 2$$

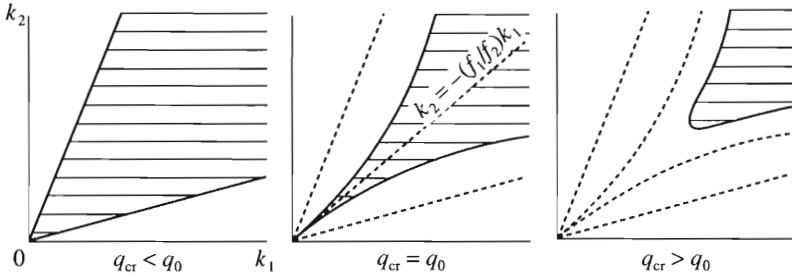
где β_j – неизвестные постоянные, и собирая члены при одинаковых степенях k_j , получим в первом приближении

$$k_i = - \frac{f_j \pm h_j \sqrt{\tilde{f}(q_{cr} - q_0)}}{f_i \pm h_i \sqrt{\tilde{f}(q_{cr} - q_0)}} k_j + o(k_j), \quad i, j = 1, 2 \quad (3.47)$$

Так как по предположению $\tilde{f} < 0$ и $q_{cr} < q_0$, квадратные корни в уравнении (3.47) – действительные величины. Следовательно, для $q_{cr} < q_0$ область асимптотической устойчивости на плоскости k_1, k_2 в первом приближении ограничивается двумя прямыми, пересекающимися в начале координат, как показано на фиг. 4. Заметим, что лишь та часть поверхности $q_{cr}(k_1, k_2)$, что принадлежит полупространству $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0$, ограничивает область асимптотической устойчивости.

Из уравнения (3.47) следует, что с увеличением q_{cr} угол между линиями, ограничивающими область асимптотической устойчивости, уменьшается, обращаясь в нуль при $q_{cr} = q_0$. В этом случае уравнения первого приближения (3.47) дают лишь отношение параметров k_1 и k_2 , совпадающее с (3.45). Подставляя в уравнение (3.46)

$$k_i = -(f_j/f_i)k_j + \gamma_j k_j^2 + o(k_j^2)$$



Фиг. 4

с неизвестными постоянными γ_j и собирая члены при одинаковых степенях k_j , найдем аппроксимацию второго порядка линии уровня $q_{cr} = q_0$

$$k_i = -\frac{f_j}{f_i}k_j - \frac{\mathbf{f}^T \mathbf{H}^\dagger \mathbf{f} \pm \omega_0(h_i f_j - h_j f_i) \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{G}^\dagger \mathbf{f}}}{f_i^3} k_j^2 + o(k_j^2), \quad i, j = 1, 2 \quad (3.48)$$

$$\mathbf{H}^\dagger = \begin{vmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{21} & H_{11} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G}^\dagger = \begin{vmatrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{vmatrix}$$

где H_{rs}, G_{rs} ($r, s = 1, 2$) – компоненты матриц \mathbf{H} и \mathbf{G} , определенные уравнениями (3.24), (3.25). Уравнение (3.48) описывает две кривые, касающиеся друг друга в начале координат на плоскости параметров k_1, k_2 , образуя вырожденную особенность, известную как точка возврата [15]. В общем случае прямая $k_i = -(f_j/f_i)k_j$ не всегда лежит внутри этой особенности. Но в случае, когда матрица $\mathbf{D}(\mathbf{k})$ – линейная функция параметров, эта прямая всегда принадлежит области асимптотической устойчивости (фиг. 4) поскольку матрица \mathbf{H} , состоящая из вторых производных матрицы $\mathbf{D}(\mathbf{k})$ по параметрам k_1 и k_2 , обращается в нуль.

Чтобы изучить линии уровня для $q_{cr} > q_0$, перепишем уравнение (3.34) следующим образом:

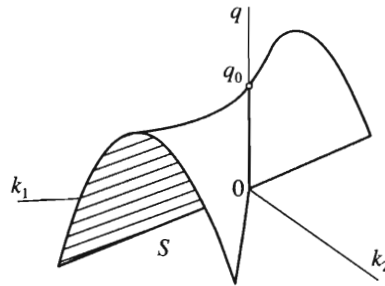
$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{H}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = \pm \langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle \sqrt{\tilde{f}(q_{cr} - q_0) + \omega_0^2 \langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle} \quad (3.49)$$

Если $\langle \mathbf{G}\mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle > 0$, то вещественные решения уравнения (3.49), описывающие линии уровня $q_{cr} > q_0$, существуют, если только подкоренное выражение в (3.49) положительно, или, эквивалентно,

$$|\mathbf{k}| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle} > \sqrt{\frac{-\tilde{f}(q_{cr} - q_0)}{\omega_0^2 \langle \mathbf{G}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle}} > 0 \quad (3.50)$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Условие (3.50) означает, что линии уровня $q_{cr} > q_0$ не проходят через начало координат. Более того, они удалены от начала координат на расстояние, определенное правой частью неравенства (3.50), как показано на фиг. 4.

Таким образом, проанализировав линии уровня функции $q_{cr}(k_1, k_2)$, можно утверждать, что граница области асимптотической устойчивости, описываемая уравнением (3.34), в окрестности точки $(0, 0, q_0)$ в пространстве трех параметров системы качественно выглядит так, как изображено на фиг. 5. Это означает, что поверхность (3.34) имеет особенность типа “зонтик Уитни” [39] в точке $(0, 0, q_0)$. Второе условие (3.35) отсекает



Фиг. 5

половину зонтика; оставшаяся часть ограничивает область асимптотической устойчивости, обозначенную на фиг. 5 буквой *S*. Известно, что зонтик Уитни – особенность общего положения границы области устойчивости трехпараметрических *конечномерных* неконсервативных систем, отвечающая двукратному чисто мнимому СЗ с цепочкой Жордана длины 2 [16, 39]. В механических приложениях эта особенность была впервые найдена на границе области устойчивости маятника Циглера [14–16]. Выше показано, что зонтик Уитни – особенность границы области асимптотической устойчивости и в *распределенных* неконсервативных системах вида (3.1), (3.2), зависящих от трех параметров.

4. Пример. Устойчивость вязкоупругого стержня. Вернемся к задаче (1.1), (1.2) о поперечных колебаниях в вязкой среде консольного стержня из вязкоупругого материала Кельвина-Фойхта, нагруженного на свободном конце тангенциальной следящей силой *q* (фиг. 6). В безразмерных переменных задача устойчивости сводится к исследованию задачи на собственные значения (1.3), (1.4) [7]. Матрица граничных условий задачи (1.3), (1.4) имеет вид

$$U = \begin{vmatrix} I & O & O & O \\ O & O & O & I \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

где *I* – единичная, а *O* – нулевая матрицы размерности 2 × 2. По формуле (2.7) найдем

$$L(x) = \begin{vmatrix} -qJ & -(1 + \eta\lambda)J \\ -(1 + \eta\lambda)J & O \end{vmatrix}, \quad J = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

Выбрав матрицу \tilde{U} в виде

$$\tilde{U} = \begin{vmatrix} O & O & I & O \\ O & I & O & O \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

по формуле (2.9) получим

$$V = \begin{vmatrix} O & O & qJ & (1 + \eta\bar{\lambda})J \\ -(1 + \eta\bar{\lambda})J & O & O & O \end{vmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{vmatrix} qJ & (1 + \eta\bar{\lambda})J & O & O \\ O & O & -(1 + \eta\bar{\lambda})J & O \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

В соответствии с формулами (2.6), (2.15) задача, сопряженная с задачей (1.3), (1.4), имеет вид

$$(1 + \eta\bar{\lambda})v''''_{xxx} + qv''_{xx} + (\bar{\lambda}^2 + \mu\bar{\lambda})v = 0 \tag{4.5}$$

$$(1 + \eta\bar{\lambda})v''''_{xxx}(1) + qv'_x(1) = 0, \quad (1 + \eta\bar{\lambda})v''_{xx}(1) + qv(1) = 0, \quad v'_x(0) = 0, \quad v(0) = 0 \tag{4.6}$$

Система без трения. При отсутствии трения $\mu = \eta = 0$ спектр задачи (1.3), (1.4) определяется характеристическим уравнением [2, 36]

$$2\omega^2(1 + \operatorname{ch}(a)\cos(b)) + q(q + ab\operatorname{sh}(a)\sin(b)) = 0 \quad (4.7)$$

где

$$a = \sqrt{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + \omega^2}}, \quad b = \sqrt{q/2 + \sqrt{q^2/4 + \omega^2}}, \quad \omega^2 = -\lambda^2 \quad (4.8)$$

Известно, что упругий стержень устойчив для значений следящей силы из интервала $0 \leq q < q_0$, где $q_0 = 20.05$ [21]. При $q = q_0$ спектр задачи (4.1), (4.2) – дискретный. Он состоит из пары двукратных СЗ $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 = 11.02$) и простых СЗ $\pm i\omega_{0,s}$, ($s = 1, 2, \dots$), причем последовательность простых частот имеет вид

$$\omega_{0,1} = 53.71, \quad \omega_{0,2} = 112.4, \quad \omega_{0,3} = 191.1, \dots, \omega_{0,s \rightarrow \infty} = \pi^2 s^2 + O(s) \quad (4.9)$$

Асимптотика СЗ (4.9) была получена в работе [7].

Двукратному СЗ $i\omega_0$ соответствует цепочка Келдыша длины 2, состоящая из собственной и присоединенной функций u_0, u_1 , удовлетворяющих уравнениям с граничными условиями (1.5), (1.6), которые следуют из соотношений (1.3), (1.4) при $\mu = \eta = 0$. Собственная и присоединенная функции сопряженного СЗ $-i\omega_0$ удовлетворяют уравнениям и граничным условиям, следующим из (4.5), (4.6)

$$\begin{aligned} u_{0xxxx} + q_0 u_{0xx}'' - \omega_0^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = u_{0x}'(0) = 0, \quad u_{0xx}''(1) + q_0 u_0(1) = \\ = u_{0xxx}'''(1) + q_0 u_{0x}'(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} u_{1xxxx} + q_0 u_{1xx}'' - \omega_0^2 u_1 = 2i\omega_0 u_0, \quad u_1(0) = u_{1x}'(0) = 0, \quad u_{1xx}''(1) + q_0 u_1(1) = \\ = u_{1xxx}'''(1) + q_0 u_{1x}'(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

СФ u_0, v_0 определяются из уравнений (1.5), (4.10) [36, 37]

$$u_0(x) = \operatorname{ch}(ax) - \cos(bx) + F(a \sin(bx) - b \operatorname{sh}(ax)) \quad (4.12)$$

$$v_0(x) = \operatorname{ch}(ax) - \cos(bx) + G(a \sin(bx) - b \operatorname{sh}(ax)) \quad (4.13)$$

где

$$F = \frac{a^2 \operatorname{ch}(a) + b^2 \cos(b)}{ab(a \operatorname{sh}(a) + b \sin(b))}, \quad G = \frac{b^2 \operatorname{ch}(a) + a^2 \cos(b)}{b^3 \operatorname{sh}(a) + a^3 \sin(b)} \quad (4.14)$$

Решение краевой задачи (1.6) дает присоединенную функцию u_1 [32]

$$\begin{aligned} u_1(x) = -2i\omega_0 \frac{a \sin(bx) + b \operatorname{sh}(ax) + F(a^2 \cos(bx) - b^2 \operatorname{ch}(ax))}{2ab(a^2 + b^2)} x - \\ - 2i\omega_0 \frac{A_1 \operatorname{sh}(ax) - B_1 \sin(bx)}{2ab(a^2 + b^2)(a \operatorname{sh}(a) + b \sin(b))^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$A_1 = \frac{q}{a^2} (\sin(b)(b^2 \cos(b) - a^2 \operatorname{ch}(a)) + 2ab \cos(b) \operatorname{sh}(a)) + bC$$

$$B_1 = \frac{q}{b^2} (\operatorname{sh}(a)(b^2 \cos(b) - a^2 \operatorname{ch}(a)) - 2ab \operatorname{ch}(a) \sin(b)) + aC \quad (4.16)$$

$$C = (a^2 + b^2)(1 + \operatorname{ch}(a)\cos(b))$$

Коэффициент F определен первым равенством (4.14). Из краевой задачи (4.11) найдем присоединенную функцию v_1 [32]

$$v_1(x) = 2i\omega_0 \frac{a \sin(bx) + b \operatorname{sh}(ax) + G(a^2 \cos(bx) - b^2 \operatorname{ch}(ax))}{2ab(a^2 + b^2)} x + 2i\omega_0 \frac{A_2 \operatorname{sh}(ax) - B_2 \sin(bx)}{2ab(a^2 + b^2)(b^3 \operatorname{sh}(a) + a^3 \sin(b))} \quad (4.17)$$

$$A_2 = q \sin(b)(3a^2 b^2 \operatorname{ch}(a) + a^4 \cos(b)) - 2qab^3 \operatorname{sh}(a) \cos(b) + b(b^2 a^2 C + q^2(a^2 + b^2)) \quad (4.18)$$

$$B_2 = 2qba^3 \sin(b) \operatorname{ch}(a) - q \operatorname{sh}(a)(3a^2 b^2 \cos(b) + b^4 \operatorname{ch}(a)) + a(b^2 a^2 C + q^2(a^2 + b^2))$$

Коэффициент G определен вторым равенством (4.14).

Полученные собственные и присоединенные функции, определенные на границе между областями устойчивости и флаттера упругого стержня в точке $\mu = \eta = 0$, $q = q_0$, служат для вычисления аппроксимации границы области асимптотической устойчивости стержня при $\mu \neq 0$, $\eta \neq 0$.

Система с трением. Рассмотрим теперь вязкоупругий стержень, колеблющийся в вязкой среде. Исследуем влияние малого внутреннего ($\eta \neq 0$) и внешнего ($\mu \neq 0$) трения на простые СЗ $\pm i\omega_{0,s}$ ($s = 1, 2, \dots$). Поведение простых СЗ при изменении параметров описывается формулой (3.17), причем приращение вещественной части возмущенных СЗ $\pm i\omega_{0,s}$ определяется векторами \mathbf{g}_s , которые вычисляются по формуле (3.18). Для задачи (1.3), (1.4) эти векторы принимают вид

$$\mathbf{g}_s = \frac{1}{2\omega_{0,s}} \left(\frac{(u_{0,s}^{\text{мн}}, v_{0,s})}{(u_{0,s}, v_{0,s})}, 1 \right) \quad (4.19)$$

Собственные функции $u_{0,s}$, $v_{0,s}$ простых СЗ $i\omega_{0,s}$ определены уравнениями (4.12), (4.13). При $s \rightarrow \infty$ собственные частоты имеют асимптотику (4.9), а для соответствующих собственных функций справедливы следующие асимптотические разложения [7]:

$$u_{0,s} = \sin(s\pi x) + O(s^{-1}), \quad v_{0,s} = \sin(s\pi x) + O(s^{-1}) \quad (4.20)$$

С использованием собственных частот (4.9) и собственных функций (4.12), (4.13), (4.20) по формуле (4.19) найдем векторы \mathbf{g}_s :

$$\mathbf{g}_1 = (35.44, 0.009), \quad \mathbf{g}_2 = (65.03, 0.004), \quad \mathbf{g}_3 = (104.5, 0.003), \dots \quad (4.21)$$

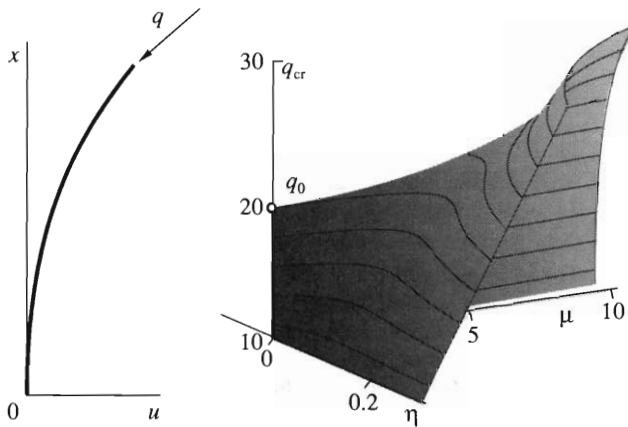
$$\mathbf{g}_s = \frac{1}{2}(s^2 \pi^2 + o(s^2), s^{-2} \pi^{-2} + o(s^{-2})), \quad s \rightarrow \infty \quad (4.22)$$

Согласно условиям (3.19), все простые СЗ смещаются под действием малой диссипации в левую полуплоскость, если все скалярные произведения $\langle \mathbf{g}_s, \mathbf{k} \rangle > 0$ ($s = 1, 2, \dots$), где вектор $\mathbf{k} = (\eta, \mu)$. Из соотношений (4.21), (4.22) следует, что этот бесконечный набор неравенств эквивалентен всего лишь двум условиям

$$\eta > 0, \quad \mu > -3807\eta \quad (4.23)$$

отвечающих пределу $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{g}_s$ и вектору \mathbf{g}_1 соответственно. Отметим, что поведение простых СЗ при учете малого трения и их влияние на устойчивость ранее не анализировалось.

Теперь найдем условия устойчивости, которые получаются из информации о распаде двукратных СЗ $\pm i\omega_0$. Прежде всего отметим, что собственные функции дву-



Фиг. 6

кратного СЗ (4.12), (4.13) удовлетворяют условию ортогональности (2.34), которое для задачи (1.3), (1.4) принимает вид

$$(u_0, v_0) = 0 \tag{4.24}$$

Подставляя дифференциальный оператор и матрицы граничных условий, определенные уравнениями (1.3), (4.1), (4.3) и (4.4), в уравнения (3.12)–(3.14) и учитывая условие (4.24), найдем

$$\tilde{f} = \frac{(u''_{0xx}, v_0)}{2i\omega_0(u_1, v_0)}, \quad \mathbf{f}_1 = \left(\frac{(u''''_{0xxxx}, v_0), 0}{2i\omega_0(u_1, v_0)} \right), \quad \mathbf{h} = - \left(\frac{(u''''_{0xxxx}, \bar{v}_1) + (u''''_{1xxxx}, v_0)}{2\omega_0(u_1, v_0)}, \frac{1}{\omega_0} \right) \tag{4.25}$$

Из последней формулы (4.25) и выражений (3.28), (3.31) следует, что вклад малого внешнего трения с коэффициентом μ в приращение вещественной части возмущенного двукратного СЗ равен $-\mu/2$. Отметим, что этот результат известен [4, 12].

Подстановка в формулы (4.25) собственных и присоединенных функций (4.12), (4.13) и (4.15), (4.17), подчиненных условиям (3.9) и вычисленных при $q = q_0$ и $\omega = \omega_0$, дает

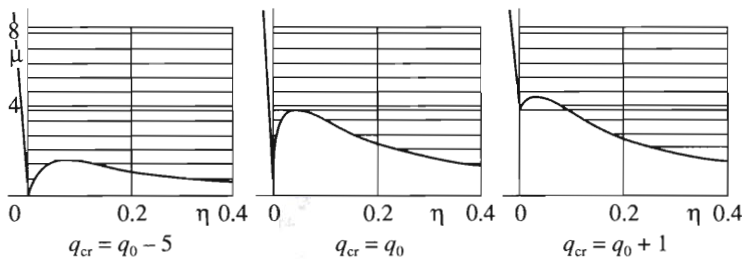
$$\tilde{f} = -4.730, \quad \mathbf{f} = (94.84, 0), \quad \mathbf{h} = -(14.34, 0.091) \tag{4.26}$$

Матрица $\mathbf{H} \equiv 0$, поскольку оператор, определенный уравнением (1.3), зависит от параметров линейно. Чтобы вычислить матрицу \mathbf{G} при помощи уравнения (3.25), необходимо решить краевую задачу (3.26), имеющую здесь вид

$$\hat{w}''''_{2xxxx} + q_0 \hat{w}''_{2xx} - \omega_0^2 \hat{w}_2 = \mu u_0, \quad \hat{w}_2(0) = \hat{w}'_{2x}(0) = 0, \quad \hat{w}''_{2xx}(1) = \hat{w}'''_{2xxx}(1) = 0 \tag{4.27}$$

Сравнивая краевые задачи (4.27) и (1.6), найдем, что функция $\hat{w}_2 = -\mu u_1 / (2i\omega_0)$, (функция u_1 определена уравнением (4.15)). Учитывая это выражение в равенстве (3.25), получим

$$\mathbf{G} = \frac{1}{8\omega_0^2(u_1, v_0)} \left\| \begin{array}{cc} 0 & (u''''_{1xxxx}, v_0) \\ (u''''_{1xxxx}, v_0) & 2(u_1, v_0) \end{array} \right\| \tag{4.28}$$



Фиг. 7

Подстановка собственных и присоединенных функций в выражение (4.28) дает

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 & 0.247 \\ 0.247 & 0.002 \end{vmatrix} \quad (4.29)$$

С использованием величин (4.26), (4.29) по формуле (3.34) найдем аппроксимацию критической нагрузки как функции параметров диссипации

$$q_{cr}(\eta, \mu) = q_0 - \frac{1902\eta^2}{(14.34\eta + 0.091\mu)^2} + 12.68\eta\mu + 0.053\mu^2 \quad (4.30)$$

Необходимое условие устойчивости $\langle \mathbf{h}, \mathbf{k} \rangle < 0$ принимает при этом вид

$$\mu > -158.0\eta \quad (4.31)$$

Отметим, что аналитическая формула (4.30) для критической нагрузки, учитывающая влияние внешнего и внутреннего трения, получена впервые. Функция критической нагрузки (4.30) при условии (4.31) изображена на фиг. 6.

Объединяя условия устойчивости, полученные в результате изучения поведения простых и двукратных СЗ, найдем, что вязкоупругий стержень в вязкой среде асимптотически устойчив в окрестности точки

$$\eta = 0, \quad \mu = 0, \quad q = q_0$$

при выполнении трех условий

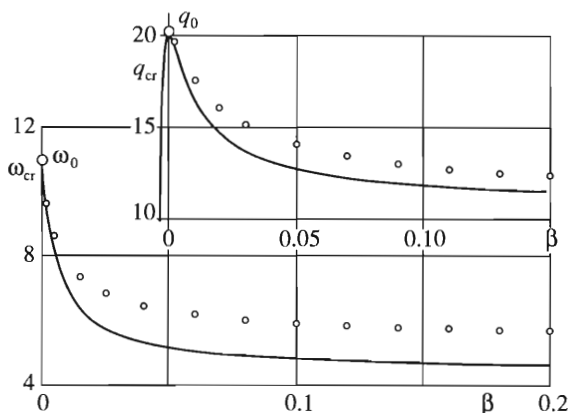
$$q < q_{cr}(\eta, \mu), \quad \eta > 0, \quad \mu > -158.0\eta \quad (4.32)$$

Величина $q_{cr}(\eta, \mu)$ определена формулой (4.30).

Поскольку оба коэффициента трения предполагались неотрицательными, последние два условия (4.32) удовлетворяются автоматически.

На фиг. 7 на плоскости параметров трения η, μ показаны сечения области асимптотической устойчивости (4.32) при разных q .

Из фиг. 6 и 7 видно, что в пространстве трех параметров существует область асимптотической устойчивости с особенностью в точке $\eta = 0, \mu = 0, q = q_0$. Эта область сильно вытянута вдоль вертикальной оси, отвечающей коэффициенту внешнего трения μ . Кроме того, из анализа линий уровня границы области устойчивости следует существование области изменения параметров трения, в которой $q_{cr}(\eta, \mu) > q_0$.



Фиг. 8

Это позволяет сделать вывод об эффекте *стабилизации* вязкоупругого стержня малым внутренним и внешним трением: при любом малом коэффициенте внутреннего трения η существует малое значение коэффициента внешнего трения μ , для которых $q_{cr}(\eta, \mu) > q_0$, и система с трением асимптотически устойчива. Отметим, что этот эффект не был обнаружен в предшествующих работах по распределенным системам.

Выражения, аппроксимирующие скачок критической нагрузки и частоты, следуют из уравнений (3.38) и (3.44) после подстановки в них величин (4.26)

$$\Delta q = \frac{1902\beta^2}{(14.34\beta + 0.091)^2}, \quad \Delta\omega = \frac{94.84\beta}{14.34\beta + 0.091}, \quad \beta = \frac{\eta}{\mu} \quad (4.33)$$

Зависимости предела критической нагрузки и частоты от отношения коэффициентов внутреннего и внешнего трения β , вычисленные по формулам (4.33) и изображенные на фиг. 8 сплошными линиями, хорошо согласуются с полученными ранее численно [7], которые показаны на фиг. 8 светлыми точками. Отметим, что точность аппроксимаций (4.33) наилучшая в окрестности $\beta = 0$. Тем не менее пределы критических нагрузки и частоты при $\mu = 0$ и $\eta \rightarrow 0$ равны, соответственно, $q_{cr} = 10.80$ и $\omega_{cr} = 4.40$, что близко к значениям $q_{cr} = 10.94$ и $\omega_{cr} = 5.40$, найденным численно [7].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00161), фонда им. Александра фон Гумбольдта и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF-BRHE № Y1-MP-06-19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing.-Arch. 1952. Bd. 20. H. 1. S. 49–56.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Herrmann G. Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces // Appl. Mech. Revs. 1967. V. 20. № 2. P. 103–108.
4. Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Intern. J. Solid. Struct. 1969. V. 5. № 9. P. 965–989.

5. Ziegler H. Principles of structural stability. Waltham, Mass.: Blaisdell, 1968 = Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
6. Anderson G.L. Application of a variational method to dissipative non-conservative problems of elastic stability // J. Sound Vibrat. 1973. V. 27. № 2. P. 279–296.
7. Андрейчиков И.П., Юдович В.И. Об устойчивости вязкоупругих стержней // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2. С. 78–87.
8. Денисов Г.Г., Новиков В.В. Об устойчивости стержня, нагруженного “следящей” силой // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 1. С. 150–154.
9. Lottati L. The role of damping on the stability of short Beck’s columns // AIAA Journal. 1985. V. 23. № 12. P. 1993–1995.
10. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987. 352 с.
11. Пановко Я.Г., Сорокин С.В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 135–139.
12. Сейранян А.П. Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем // Успехи механики. 1990. Т. 13. № 2. С. 89–124.
13. Жинжер Н.И. Влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 149–155.
14. Seyranian A.P., Pedersen P. On two effects in fluid / structure interaction theory // Flow-Induced Vibration. Rotterdam: Balkema, 1995. P. 565–576.
15. Сейранян А.П. О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределенности критической нагрузки // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 3. С. 323–326.
16. Mailybaev A.A., Seyranian A.P. On singularities of a boundary of the stability domain // SIAM Journal Matrix Anal. Appl. 1999. V. 21. № 1. P. 106–128.
17. Langthjem M.A., Sugiyama Y. Dynamic stability of columns subjected to follower loads: a survey // J. Sound and Vibrat. 2000. V. 238. № 5. P. 809–851.
18. Bolotin V.V., Grishko A.A., Panov M.Yu. Effect of damping on the postcritical behavior of autonomous non-conservative systems // Intern. J. Non-Linear Mech. 2002. V. 37. № 7. P. 1163–1179.
19. Kirillov O.N. How do small velocity-dependent forces (de)stabilize a non-conservative system? // DCAMM Report No. 681. Copenhagen: 2003. 40 p.
20. Кириллов О.Н. Парадокс дестабилизации // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 5. С. 614–620.
21. Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes // ZAMP. 1952. Bd. 3. H. 3. S. 225–228.
22. Сейранян А.П. Бифуркации в однопараметрических циркуляционных системах // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 142–148.
23. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. С. 11–14.
24. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 4. С. 15–41.
25. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.
26. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
27. Gohberg I.C., Lancaster P., Rodman L. Matrix Polynomials. New York etc.: Acad. Press, 1982. 409 p.
28. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. № 4. С. 92–93.
29. Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991. 368 с.
30. Mennicken R., Möller M. Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems. Amsterdam; London: Elsevier, 2003. 500 p.
31. Кириллов О.Н., Сейранян А.П. Распад цепочек Келдыша и устойчивость неконсервативных систем // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 2. С. 172–176.

32. Kirillov O.N., Seyranian A.P. Collapse of the Keldysh chains and stability of continuous nonconservative systems // *SIAM Journal Appl. Math.* 2004. V. 64. № 4. P. 1383–1407.
33. Barnett S. *Introduction to Mathematical Control Theory*. Oxford: Clarendon Press, 1975. 264 p.
34. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // *Успехи мат. наук.* 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
35. Plaut R. H. Determining the nature of instability in nonconservative problems // *AIAA Journal* 1972. V. 10. № 7. P. 967–968.
36. Pedersen P. Influence of boundary conditions on the stability of a column under non-conservative load // *Intern. J. Solids Struct.* 1977. V. 13. № 5. P. 445–455.
37. Pedersen P., Seyranian A.P. Sensitivity analysis for problems of dynamic stability // *Intern. J. Solids Struct.* 1983. V. 19. № 4. P. 315–335.
38. Bilharz H. Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz // *ZAMM.* 1944. Bd. 24. S. 77–82.
39. Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978. 304 с.

Москва

e-mail: kirillov@imec.msu.ru,
seyran@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
12.V.2004