

УДК 531.36 : 62–50

© 2005 г. Ю. Г. Мартыненко, А. М. Формальский

К ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ МОНОЦИКЛОМ

Изучается продольное движение моноцикла, механическая модель которого представляет собой цилиндр с шарнирно закрепленным на нем перевернутым маятником. Вращение маятника относительно цилиндра осуществляется электроприводом. При помощи того же привода моноцикл может перемещаться (катиться) по поверхности. Управляющий параметр – ограниченное по абсолютной величине напряжение. Построен линейный по фазовым координатам закон управления (с насыщением), при котором маятник стабилизируется в верхнем неустойчивом положении равновесия, а моноцикл удерживается на месте или перемещается. Область притяжения желаемого стационарного режима при этом может быть сделана максимально возможной (в линейном приближении). Построена область устойчивости состояния равновесия системы в плоскости параметров: общий коэффициент усиления в обратной связи, запаздывание. Запаздывание в контуре управления возникает при наличии индуктивности в цепи ротора двигателя.

Моноцикл представляет собой интересный как с теоретической, так и с прикладной точки зрения объект исследования. В последние годы появилось новое транспортное средство “Seg-way”¹, сконструированное в виде моноцикла, на котором может помещаться человек. В отсутствие управления движение такого моноцикла неустойчиво, поэтому система управления движением этого аппарата должна обеспечивать его стабилизацию.

Во всякой реальной системе управляющие воздействия так или иначе ограничены, поэтому неустойчивый объект может быть выведен на нужный режим работы не из всякого состояния. Другими словами, называемое областью управляемости множество состояний, из которых при заданных ресурсах управления можно вывести объект на желаемый режим, занимает часть фазового пространства. Область притяжения желаемого режима работы, возникающая при построении конкретного закона управления в виде обратной связи, принадлежит области управляемости; чаще всего она занимает лишь часть последней. При этом весьма важной оказывается задача максимизации области притяжения при ограниченных управляющих воздействиях.

Примеры неустойчивых управляемых систем – велосипед с гироскопическим стабилизатором [1], моноцикл с гиростабилизатором [2], сконструированные в Институте механики МГУ.

Многие неустойчивые механические системы содержат звенья в виде перевернутых маятников. Задачи управления однозвенным маятником, стабилизации его неустойчивого верхнего положения равновесия относятся к числу классических в теоретической механике и теории управления. В большинстве исследований они решаются путем перемещения точки подвеса маятника (см. [3–5] и др.). Теоретически и экспериментально исследовались также движения плоского однозвенного маятника с неподвижной точкой подвеса [6–8]. На конце такого маятника закреплен электродвигатель с маховиком. Построен закон управления двигателем, при котором маятник из любого начального состояния приводится в верхнее неустойчивое положение равновесия и стабилизируется в нем. Изучалась задача о стабилизации при помощи маховика перевернутого маятника, расположенного на цилиндре [9]. Рассматривались некоторые задачи, касающиеся устойчивости движения одноколесного велосипеда [10].

¹ См. www.segway.com

В предлагаемой работе исследуется продольное без проскальзывания качение цилиндра (моноцикла) с перевернутым маятником по горизонтальной поверхности. Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы и одно управляющее воздействие. Проблема управления неустойчивой системой в случае, когда число управляющих воздействий в ней меньше числа степеней свободы, вызывает наибольшие затруднения. В работе решается задача синтеза в виде обратной связи ограниченного по величине управления. Авторам не известны публикации, в которых для моноцикла решались бы подобные задачи.

1. Механическая модель моноцикла. Для исследования продольного движения моноцикла рассмотрим систему, состоящую из трех абсолютно твердых тел, соединенных цилиндрическими шарнирами в осях C_1 и C_3 (фиг. 1). Оси шарниров перпендикулярны плоскости чертежа. Тело 1 – цилиндр, 2 – маятник с жестко скрепленным с ним статором электродвигателя, 3 – шестерня с жестко прикрепленным к ней ротором двигателя. Если речь идет об аппарате типа “Segway”, то тело 2 включает и человека, находящегося на аппарате. Центр масс тела 2 находится в точке C_2 , а центр масс тела 3 – на его оси вращения C_3 . Будем обозначать через m_i массу тела i ($i = 1, 2, 3$), а через ρ_i – его радиус инерции относительно центра масс C_i .

Симметричный относительно своей оси C_1 цилиндр радиуса r может катиться без проскальзывания по горизонтальной поверхности вдоль прямой линии. Обозначим через ϕ угол поворота против часовой стрелки какого-то фиксированного (отмеченного в цилиндре) радиуса, который в начале движения ориентирован вдоль горизонтальной оси X , через x обозначим перемещение центра масс цилиндра, так что $\dot{x} = -\dot{\phi} r$.

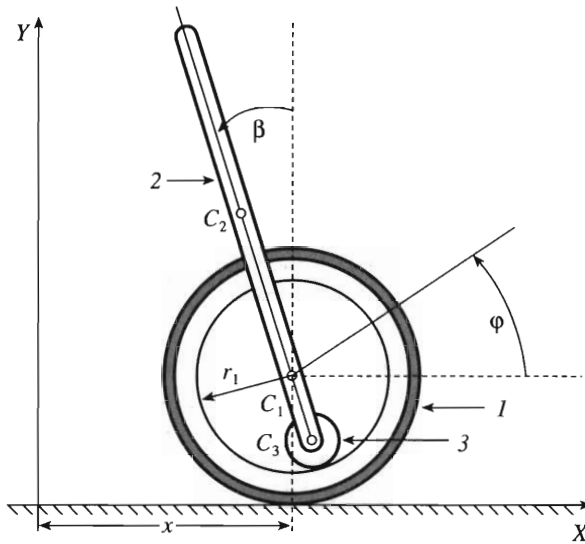
Маятник 2, который может колебаться в вертикальной плоскости, шарнирно закреплен на оси C_1 цилиндра 1. На фиг. 1 этот цилиндр вместе с закрепленным на нем перевернутым маятником показан сбоку. Обозначим через β отсчитываемый против часовой стрелки угол отклонения тела 2, точнее говоря, угол отклонения прямой C_1C_2 от вертикали.

К цилиндру 1 жестко прикреплена полая зубчатая изнутри цилиндрическая поверхность радиуса r_1 , ее ось совпадает с осью C_1 цилиндра. Шестерня 3 радиуса r_3 может катиться по этой зубчатой поверхности внутри. При качении шестерня свободно вращается вокруг оси C_3 , скрепленной с маятником (фиг. 1). К маятнику прикреплен электродвигатель постоянного тока, статор которого, как говорилось выше, жестко скреплен с маятником, а ротор – с шестерней 3. Для простоты рассматривается случай, когда все центры масс C_i ($i = 1, 2, 3$) находятся на одной прямой. При этом, если $C_1C_2 = r_2$, $C_1C_3 = r_1 - r_3$, то $C_2C_3 = r_2 + r_1 - r_3$.

Рассматриваемая механическая система состоит из трех тел и имеет две степени свободы, характеризующиеся обобщенными координатами ϕ и β или x и β . Переменная ϕ , а значит, и x является циклической. Без учета этой переменной система имеет полторы степени свободы. При составлении уравнений движения ниже учитывается изменение электрического тока в цепи ротора двигателя. Заряд же является циклической координатой; без ее учета электромеханическая система имеет две степени свободы.

При указанном выше определении обобщенных координат выражения для горизонтальной и вертикальной компонент $V_{C_i x}$ и $V_{C_i y}$ вектора V_{C_i} скорости центра масс C_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид

$$\begin{aligned} V_{C_1 x} &= \dot{x}, & V_{C_2 x} &= \dot{x} - \dot{\beta} r_2 \cos \beta, & V_{C_3 x} &= \dot{x} + \dot{\beta} (r_1 - r_3) \cos \beta \\ V_{C_1 y} &= 0, & V_{C_2 y} &= -\dot{\beta} r_2 \sin \beta, & V_{C_3 y} &= \dot{\beta} (r_1 - r_3) \sin \beta \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Изучается плоское движение моноцикла, поэтому векторы абсолютных угловых скоростей всех трех тел перпендикулярны вертикальной плоскости XU . Величины Ω_i ($i = 1, 2, 3$) этих угловых скоростей равны

$$\Omega_1 = \dot{\phi} = -\frac{\dot{x}}{r}, \quad \Omega_2 = \dot{\beta}, \quad \Omega_3 = \left(\frac{r_3 - r_1}{r_3}\right)\dot{\beta} - \frac{r_1\dot{x}}{r_3 r} = -(\chi - 1)\dot{\beta} - \frac{\chi\dot{x}}{r} \quad (1.2)$$

Здесь $\chi = r_1/r_3 > 1$ – передаточное число редуктора.

Учитывая соотношения (1.1) и (1.2), получаем следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (V_{C_i}^2 + \rho_i^2 \Omega_i^2) = \frac{1}{2} [a_{11} \dot{x}^2 + 2(a_{12} - a_{12c} \cos \beta) \dot{x} \dot{\beta} + a_{22} \dot{\beta}^2] \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 + m_2 + m_3 + m_1 \rho_1^2 / r^2 + m_3 \rho_3^2 \chi^2 / r^2, & a_{12} &= m_3 \rho_3^2 \chi (\chi - 1) / r \\ a_{12c} &= m_2 r_2 - m_3 (r_1 - r_3), & a_{22} &= m_2 (r_2^2 + \rho_2^2) + m_3 (\chi - 1)^2 (r_3^2 + \rho_3^2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Потенциальная энергия имеет вид (g – ускорение свободного падения)

$$\Pi = [m_2 r_2 - m_3 (r_1 - r_3)] g \cos \beta = a_{12c} g \cos \beta \quad (1.5)$$

Момент сил трения, препятствующих качению цилиндра, учитывать не будем. Влияние такого момента на движение системы оценивается ниже.

Рассматривая перевернутый маятник, будем считать, что $r_2 > 0$ и, более того, что

$$m_2 r_2 > m_3 (r_1 - r_3) \quad (a_{12c} > 0) \quad (1.6)$$

т.е. что центр масс маятника вместе с телом 3 расположен выше оси C_1 цилиндра.

Магнитная энергия системы представляется в виде

$$W = \frac{1}{2} \left[LI^2 + 2c\chi I \left(\frac{x}{r} + \beta \right) \right] \quad (1.7)$$

Здесь I – ток, протекающий через цепь ротора электродвигателя, L – индуктивность цепи, c – так называемый коэффициент электромеханического взаимодействия. Воспользовавшись выражениями (1.3), (1.5), (1.7), выпишем лагранжиан [11, 12] системы

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - \Pi + W = & \frac{1}{2} [a_{11}\dot{x}^2 + 2(a_{12} - a_{12c} \cos \beta)\dot{x}\dot{\beta} + a_{22}\dot{\beta}^2] - \\ & - a_{12c}g \cos \beta + \frac{1}{2} \left[LI^2 + 2c\chi I \left(\frac{x}{r} + \beta \right) \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. Уравнения движения. Используя метод Лагранжа второго рода [11, 12], составим с помощью выражения (1.8) уравнения движения системы

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x} + (a_{12} - a_{12c} \cos \beta)\ddot{\beta} + a_{12c} \sin \beta \dot{\beta}^2 &= \frac{c\chi}{r} I \\ (a_{12} - a_{12c} \cos \beta)\ddot{x} + a_{22}\ddot{\beta} - a_{12c}g \sin \beta &= c\chi I \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$L\dot{I} + RI + c\chi \left(\frac{\dot{x}}{r} + \dot{\beta} \right) = U$$

Здесь R – омическое сопротивление цепи ротора, U – подаваемое на нее напряжение, которое играет роль обобщенной силы. Величина cI , пропорциональная току I , описывает момент M электромагнитных сил, действующих между статором и ротором. Третье уравнение системы – уравнение Кирхгофа – описывает переходные процессы в цепи ротора электродвигателя.

Подаваемое на двигатель напряжение U ограничено по абсолютной величине

$$|U(t)| \leq U_0 \quad (U_0 = \text{const}) \quad (2.2)$$

Уравнения вида (2.1) описывают движение цилиндра с подвешенным на его оси маятником при любой конструкции редуктора управляющего привода. Управление движением моноцикла осуществляется при помощи внутренних сил. Под влиянием внутреннего момента происходит относительное перемещение маятника и цилиндра. Возникающие при относительном движении внешние силы удается “организовать” так, чтобы движение механизма как целого происходило желаемым образом.

Введем безразмерное время τ по формуле $t = \vartheta\tau$, где $\vartheta = \sqrt{r/g}$, тогда уравнения (2.1) можно записать в безразмерных переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi'' + (j_1 \cos \beta - j_2)\beta'' - j_1 \sin \beta \beta'^2 &= -i \\ (j_1 \cos \beta - j_2)\varphi'' + j_3\beta'' - j_1 \sin \beta &= i \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\theta \dot{i} + i + p(\beta' - \varphi') = u$$

Штрих означает здесь дифференцирование по безразмерному времени τ . Пять безразмерных параметров системы имеют вид

$$j_1 = \frac{a_{12c}}{a_{11}r}, \quad j_2 = \frac{a_{12}}{a_{11}r}, \quad j_3 = \frac{a_{22}}{a_{11}r^2}, \quad \theta = \frac{L}{R\vartheta}, \quad p = \frac{c^2 \chi^2 \vartheta}{R a_{11} r^2} \quad (2.4)$$

а безразмерные ток и напряжение

$$i = \frac{c\chi}{a_{11}rg} I, \quad u = \frac{c}{Ra_{11}rg} \chi U$$

Неравенство (2.2) в новых обозначениях принимает вид

$$|u| \leq u_0, \quad u_0 = \frac{c}{Ra_{11}rg} \chi U_0 \quad (2.5)$$

Если пренебречь индуктивностью L в цепи ротора (электромагнитной постоянной времени θ), то порядок системы уравнений (2.1) понижается на единицу. В безразмерных переменных в этом случае вместо (2.3), получаем систему

$$\varphi'' + (j_1 \cos \beta - j_2) \beta'' - j_1 \sin \beta \beta'^2 = -u + p(\beta' - \varphi') \quad (2.6)$$

$$(j_1 \cos \beta - j_2) \varphi'' + j_3 \beta'' - j_1 \sin \beta = u - p(\beta' - \varphi')$$

Введем обозначения

$$c_1 = c/R \text{ и } c_2 = c^2/R \quad (2.7)$$

Тогда имеем

$$u = \frac{c}{Ra_{11}rg} \chi U = \frac{c_1 \chi}{a_{11}rg} U, \quad u_0 = \frac{c_1 \chi}{a_{11}rg} U_0, \quad p = \frac{c^2 \chi^2 \vartheta}{R a_{11} r^2} = \frac{c_2 \chi^2 \vartheta}{a_{11} r^2} \quad (2.8)$$

Если индуктивность в обмотке ротора не учитывается, то момент M электромагнитных сил, приложенных со стороны статора к ротору, определяется выражением [13]

$$M = c_1 U - c_2 \chi (\beta' - \varphi') \quad (2.9)$$

Положительные постоянные коэффициенты c_1 и c_2 (коэффициент противо-ЭДС) можно вычислить по паспортным значениям пускового и номинального моментов, номинальной угловой скорости и номинального напряжения двигателя [13]. При известных значениях c_1 и c_2 по формулам (2.7) могут быть вычислены коэффициент c и омическое сопротивление R .

Следует отметить, что модель (2.6) движения моноцикла с перевернутым маятником имеет много общего с моделью маятника, управляемого при помощи маховика [6–8]. Обе модели имеют циклическую координату, они одного и того же порядка, каждая из моделей имеет одно устойчивое и одно неустойчивое состояние равновесия. Как показано ниже, и та, и другая модели, линеаризованные около неустойчивого состояния равновесия, имеют одно положительное собственное значение и два отрицательных. Сказанное обуславливает общность методов и результатов исследования обеих систем.

3. Стабилизация маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия. В этом разделе будем исследовать упрощенную математическую модель (2.6), считая постоянную времени θ пренебрежимо малой.

Рассмотрим задачу стабилизации маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия $\beta = 0$ в предположении, что в начале процесса стабилизации он уже находится в некоторой окрестности этого желаемого положения. Тем самым круговые движения маятника из рассмотрения исключаются.

Линеаризованные уравнения. Будем считать, что в процессе стабилизации верхнего положения равновесия маятника угол β и его производная близки к нулю. Тогда, линеаризуя уравнения (2.6), получаем систему уравнений

$$\varphi'' + j_4 \beta'' = -u + p(\beta' - \varphi'), \quad j_4 \varphi'' + j_3 \beta'' - j_1 \beta = u - p(\beta' - \varphi') \quad (3.1)$$

где $j_4 = j_1 - j_2$.

Так как угол поворота цилиндра φ – циклическая переменная, в уравнения движения (2.6) или (3.1) можно ввести угловую скорость $\omega = \varphi'$, после чего системы (2.6) и (3.1) превратятся в системы третьего порядка. Линейные уравнения (3.1) при такой замене принимают вид

$$\omega' + p\omega + j_4\beta'' - p\beta' = -u, \quad j_4\omega' - p\omega + j_3\beta'' + p\beta' - j_1\beta = u \quad (3.2)$$

При $u = 0$ нелинейная (2.6), а также линейная (3.2) системы имеют тривиальное решение

$$\omega = \varphi' = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta' = 0 \quad (3.3)$$

отвечающее вертикальному (неустойчивому) положению маятника и покоящемуся цилиндру. Задачу стабилизации равновесия (3.3) и будем рассматривать далее.

Разрешив уравнения (3.2) относительно старших производных, запишем их в матричной форме

$$z' = Bz + hu \quad (3.4)$$

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega \\ \beta \\ \beta' \end{Bmatrix}, \quad h = \begin{Bmatrix} h_1 \\ 0 \\ h_3 \end{Bmatrix}, \quad B = \|b_{lk}\| = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & -b_{11} \\ 0 & 0 & 1 \\ b_{31} & b_{32} & -b_{31} \end{Bmatrix}, \quad l, k = 1, 2, 3$$

$$h_1 = -\frac{j_3 + j_4}{j_5}, \quad h_3 = \frac{j_4 + 1}{j_5}, \quad b_{11} = ph_1, \quad b_{12} = -\frac{j_1 j_4}{j_5}, \quad b_{31} = ph_3, \quad b_{32} = \frac{j_1}{j_5}, \quad j_5 = j_3 - j_4^2$$

Величина j_5 пропорциональна определителю определенно-положительной матрицы кинетической энергии при $\beta = 0$, поэтому она положительна, что можно показать и непосредственно, пользуясь выражениями (2.4) для безразмерных параметров. Желаемое состояние равновесия (3.3) в новых переменных имеет вид: $z = 0$. Из критерия Калмана [14] следует, что система (3.4) вполне управляема тогда и только тогда, когда

$$\det \|h, Bh, B^2h\| = h_3^2(h_1 b_{32} - h_3 b_{12}) \neq 0 \quad (3.5)$$

Воспользовавшись обозначениями (1.4) и (2.4), можно убедиться, что $j_4 + 1 > 0$, а значит, и $h_3 > 0$. Выражение $h_1 b_{32} - h_3 b_{12}$, как нетрудно показать, обращается в нуль, если и только если $j_1(j_4 + 1) = 0$. Так как $j_4 + 1 \neq 0$, неравенство (3.5) нарушается тогда и только тогда, когда $j_1 = 0$, т.е. когда

$$a_{12c} = m_2 r_2 - m_3(r_1 - r_3) = 0 \quad (3.6)$$

Равенство (3.6) имеет место только в случае, когда центр масс маятника вместе с телом 3 лежит на оси C_1 цилиндра. При условии (1.6) система (3.4) вполне управляема.

Заметим, что в случае (3.6) как линеаризованная система (3.1), так и исходная нелинейная (2.6) имеют интеграл

$$\begin{aligned} & [m_1(r^2 + \rho_1^2) + m_2 r^2 + m_3(r^2 + \rho_3^2 \chi)]\varphi' + \\ & + [m_2(r_2^2 + \rho_2^2) + m_3 r_3^2(1 - \chi)^2 + m_3 \rho_3^2(1 - \chi)]\beta' = C = \text{const} \end{aligned}$$

который представляет собой интеграл момента количества движения системы относительно мгновенного центра (оси) скоростей – оси касания цилиндра с опорной поверхностью. Следовательно, при условии (3.6) неуправляемой является не только линейная система (3.1), но и нелинейная (2.6).

Собственные значения разомкнутой системы. Выясним расположение на комплексной плоскости собственных значений разомкнутой системы, получающейся из (3.4) при $u = 0$ ($U = 0$), т.е. собственных значений матрицы B . Характеристическое уравнение этой системы третьего порядка имеет вид (μ – спектральный параметр)

$$F(\mu) = \mu^3 j_5 + \mu^2 p(1 + j_3 + 2j_4) - \mu j_1 - p j_1 = 0 \tag{3.7}$$

Положим для начала $c_2 = 0$ (т.е. противо-ЭДС отсутствует), тогда из соотношений (2.8) следует, что $p = 0$. При условии (1.6) имеем $j_1 > 0$ (см. обозначения (2.4)). Уравнение (3.7) при $p = 0$ имеет два ненулевых действительных корня, различающихся только знаками, и один нулевой корень

$$\mu_1 = \sqrt{j_1/j_5}, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = -\sqrt{j_1/j_5} \tag{3.8}$$

т.е. спектр разомкнутой системы при $p = 0$ симметричен относительно мнимой оси. Это естественно, поскольку при $c_2 = 0$ разомкнутая система консервативна. При “добавлении” противо-ЭДС ($c_2 > 0, p > 0$) нулевое собственное значение сдвигается влево, два другие также сдвигаются, но остаются положительным и отрицательным при всех значениях $p > 0$. Это утверждение справедливо, поскольку функция $F(\mu)$ трижды меняет знак при изменении ее аргумента μ от $-\infty$ до $+\infty$. Два раза ее график пересекает отрицательную полуось μ и один раз положительную. Действительно,

$$F(-\infty) = -\infty < 0, \quad F(-p) = p^3(j_4 + 1)^2 > 0, \quad F(0) = -p j_1 < 0, \quad F(+\infty) = +\infty > 0$$

Неравенство $F(-p) > 0$ имеет место, поскольку $p > 0$ и $j_4 + 1 \neq 0$, а $F(0) < 0$, поскольку $p > 0$ и $j_1 > 0$.

Итак, характеристическое уравнение (3.7) при условии (1.6) имеет три действительных корня – один положительный ($\mu_1 > 0$) и два отрицательных ($\mu_2, \mu_3 < 0$). Таким образом, рассматриваемая система в отсутствие управления, т.е. в разомкнутом состоянии, неустойчива. Аналогичная ситуация имеет место для маятника, управляемого при помощи маховика [6–8].

Если параметр p (коэффициент c_2) мал, то для приближенного вычисления собственных значений μ_l ($l = 1, 2, 3$) можно воспользоваться выражениями (3.8), которые справедливы при $p = 0$ ($c_2 = 0$). В линейном приближении по величине p (по величине c_2) выражения для μ_l ($l = 1, 2, 3$) приобретают вид

$$\mu_1 = \sqrt{j_1/j_5} - p(1 + j_4)^2/(2j_5), \quad \mu_2 = -p, \quad \mu_3 = -\sqrt{j_1/j_5} - p(1 + j_4)^2/(2j_5)$$

Выделение неустойчивой координаты и построение области управляемости. При помощи линейного преобразования переменных с постоянной невырожденной матрицей K

$$y = Kz \tag{3.9}$$

где $y = \|y_1 \ y_2 \ y_3\|^*$ (звездочка означает транспонирование), система (3.4) может быть представлена в жордановой форме – в виде трех скалярных уравнений, которые связаны между собой только управлением u

$$y_l' = \mu_l y_l + d_l u, \quad l = 1, 2, 3 \tag{3.10}$$

Здесь

$$KB = \Lambda K, \quad \Lambda = \text{diag}\{\mu_l\}, \quad d_l = [j_1 - \mu_l^2(j_3 + j_4)]/j_5$$

Из управляемости системы (3.4) по Калману вытекает, что $d_l \neq 0$ ($l = 1, 2, 3$). Элементы матрицы $K = \|k_{lk}\|$ ($l, k = 1, 2, 3$) можно вычислить при помощи соотношений

$$k_{11} = \mu_l(b_{31} + \mu_l) - b_{32}, \quad k_{12} = -b_{32}b_{11} + b_{12}(b_{31} + \mu_l), \quad k_{13} = b_{12} - \mu_l b_{11} \quad (3.11)$$

В пространстве $Y(y_1, y_2, y_3)$ множество начальных состояний, из которых систему можно привести в начало координат при ограничении (2.5) управляющего напряжения u , представляет собой [6–8, 15] полосу

$$|y_1| < |d_1|u_0/\mu_1 \quad (3.12)$$

где

$$y_1 = k_{11}\omega + k_{12}\beta + k_{13}\beta' \quad (3.13)$$

а элементы k_{11}, k_{12}, k_{13} вычисляются по формулам (3.11) при $l = 1$. Множество (3.12), которое обозначим через Q , называется областью управляемости [15].

При помощи соотношений (3.12) и (3.13) можно выписать ограничения начальных значений по каждой из фазовых переменных $\omega(0), \beta(0), \beta'(0)$ при условии, что две другие переменные в начальный момент времени равны нулю:

$$|\omega(0)| < \xi_1, \quad |\beta(0)| < \xi_2, \quad |\beta'(0)| < \xi_3; \quad \xi_l = \left| \frac{d_l}{k_{1l}} \frac{u_0}{\mu_1} \right|, \quad l = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

Синтез закона стабилизации. В системе (3.10) при $u = 0$ “неустойчива” только одна координата y_1 . Подавить неустойчивость можно с помощью линейной обратной связи вида

$$u = \gamma y_1 \quad (3.15)$$

при условии, что постоянный коэффициент усиления γ удовлетворяет неравенству

$$\mu_1 + d_1\gamma < 0 \quad (3.16)$$

Положительное собственное значение μ_1 разомкнутой (в случае $u = 0$) системы (3.10) при замыкании системы обратной связью (3.15) превращается в отрицательное собственное значение $\mu_1 + d_1\gamma$. Отрицательные собственные значения μ_2 и μ_3 остаются при этом без изменений.

С учетом ограничения управляющего напряжения u обратная связь (3.15) принимает вид

$$u = \begin{cases} -u_0 & \text{при } \gamma y_1 \leq -u_0 \\ \gamma y_1 & \text{при } |\gamma y_1| \leq u_0 \\ u_0 & \text{при } \gamma y_1 \geq u_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Область притяжения V системы (3.10), (3.17) совпадает со всей областью управляемости Q [6–8]. Тем самым обратная связь (3.17) реализует максимально возможную область притяжения и является в этом смысле оптимальной.

Собственные значения замкнутой с помощью обратной связи (3.15) системы действительны, как и собственные значения разомкнутой системы (3.10). Отсюда вытекает, что переходный процесс в замкнутой при помощи управления (3.17) системе будет аperiodическим при любых начальных условиях из области притяжения V . Таким образом, описанный способ стабилизации обеспечивает не только максимально возможную зону притяжения (для линеаризованной системы), но и аperiodичность переходного процесса.

4. Гашение скорости цилиндра. Допустим, что нуль датчика угла отклонения маятника от вертикали β смещен на величину $\Delta\beta$, и это смещение остается постоянным в течение всего процесса регулирования ($\Delta\beta = \text{const}$). При наличии ошибки $\Delta\beta$ закон управления (3.17) приобретает вид

$$u = \begin{cases} -u_0 & \text{при } \gamma y_1^\Delta \leq -u_0 \\ \gamma y_1^\Delta & \text{при } |\gamma y_1^\Delta| \leq u_0, \quad y_1^\Delta = k_{11}\omega + k_{12}(\beta + \Delta\beta) + k_{13}\beta' \\ u_0 & \text{при } \gamma y_1^\Delta \geq u_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Стационарное решение нелинейной системы (2.6), а также линейной системы (3.2) при управлении (4.1) описывается в отличие от (3.3) соотношениями

$$\beta = \beta' = 0, \quad \omega = -\frac{u}{p} = -\frac{\gamma k_{12} \Delta\beta}{\gamma k_{11} + p} \quad (x' = -\omega r) \quad (4.2)$$

Это решение имеет место при условии, что управление в стационарном режиме определяется средней строчкой в соотношении (4.1). Другими словами, формулы (4.2) описывают стационарное решение, если смещение нуля $\Delta\beta$ таково, что значение напряжения u удовлетворяет ограничению (2.5), т.е.

$$\left| \frac{p\gamma k_{12} \Delta\beta}{\gamma k_{11} + p} \right| \leq u_0$$

Важно отметить, что, несмотря на наличие ошибки датчика угла отклонения маятника от вертикали β , в установившемся режиме этот угол β равен нулю, как и в отсутствие такой ошибки. Однако при наличии этой ошибки цилиндр не останавливается, а катится с постоянной угловой скоростью; напряжение в установившемся режиме, так же как и угловая скорость, не равно нулю. Что касается момента электромагнитных сил M , действующих между статором и ротором двигателя, то он в стационарном режиме (см. (2.9)) равен нулю.

Для того чтобы прекратить качение цилиндра в установившемся режиме – остановить его, можно к сигналу линейной обратной связи (4.1) добавить сигнал, пропорциональный с некоторым постоянным коэффициентом g перемещению цилиндра $x(\tau)$, отсчитываемому от какого-то положения x^* :

$$g[x(\tau) - x^*] = -gr \int_{\tau^*}^{\tau} \omega(\zeta) d\zeta \quad (4.3)$$

Это можно показать теоретически при помощи нелинейной системы уравнений (2.6) (или линеаризованной системы (3.2)) с управлением (4.1). Сигнал (4.3) можно вводить в управление по истечении некоторого времени τ^* после начала процесса регулирования и положить при этом $x^* = x(\tau^*)$. В этом случае множество (3.12) остается областью притяжения. Сигнал (4.3) пропорционален интегралу от скорости вращения цилиндра. При введении в обратную связь интегрального члена возникает, как известно, тенденция к неустойчивости процесса регулирования. Для того чтобы избежать неустойчивости, коэффициент g нужно выбирать “не слишком” большим. Допустимые, с точки зрения устойчивости, значения этого коэффициента можно найти, пользуясь, например, критерием Гурвица.

5. Управление движением моноцикла. Допустим теперь, что угол β измеряется точно, а постоянная величина $\Delta\beta$ представляет собой не ошибку измерения, а специ-

ально заданную в законе управления “уставку”. Тогда в установившемся режиме цилиндр будет катиться с постоянной скоростью, определяемой вторым из выражений (4.2), маятник будет находиться в вертикальном положении. Таким образом, задавая величину $\Delta\beta$, можно управлять движением цилиндра. При этом обратная связь (4.1) обеспечивает, очевидно, асимптотическую устойчивость движения (4.2).

Предположим теперь, что во время движения цилиндра на него действует сила сопротивления, пропорциональная, например, скорости движения цилиндра $-f\dot{\phi}$, где $f = \text{const} > 0$. Эта сила может быть вызвана сопротивлением воздуха, трением качения. Тогда в первое из уравнений (2.6), а также в первое из уравнений (3.2) нужно добавить член вида $\sigma\omega$, где $\sigma = \text{const} > 0$ – некоторая величина, пропорциональная коэффициенту f . При наличии указанной силы алгебраические уравнения для определения стационарных значений координат ω , β выглядят так:

$$\sigma\omega = -u - p\omega, \quad -j_1 \sin\beta = u + p\omega \quad (5.1)$$

Из соотношений (5.1) следует, что

$$\sigma\omega = j_1 \sin\beta \quad (5.2)$$

Равенство (5.2) показывает, что при наличии силы сопротивления качению цилиндра маятник отклоняется от вертикали в ту сторону, в которую катится цилиндр, что легко объясняется физически. В отсутствие такой силы сопротивления маятник остается вертикальным (см. формулы (4.2)).

Считая угол β малым, при управлении (4.1) вместо (5.1) получаем систему алгебраических уравнений

$$\sigma\omega = -\gamma[k_{11}\omega + k_{12}(\beta + \Delta\beta)] - p\omega, \quad \sigma\omega = j_1\beta$$

решение которых имеет вид

$$\omega = \frac{-j_1\gamma k_{12}\Delta\beta}{j_1(p + \gamma k_{11} + \sigma) + \gamma k_{12}\sigma}, \quad \beta = \frac{\sigma\omega}{j_1} \quad (5.3)$$

Напряжение в установившемся режиме $u = -(\sigma + p)\omega$. Соотношения (5.3) превращаются при $\sigma = 0$ ($f = 0$) в соотношения (4.2).

6. Численные исследования. Рассмотрим устройство со следующими значениями параметров:

$$m_1 = 10 \text{ кг}, \quad r = 0.2 \text{ м}, \quad \rho_1 = 0.1 \text{ м}, \quad r_1 = 0.16 \text{ м}, \quad m_2 = 75 \text{ кг}, \quad r_2 = 0.9 \text{ м}, \quad \rho_2 = 0.3 \text{ м}, \\ m_3 = 0.85 \text{ кг}, \quad r_3 = 0.04 \text{ м}, \quad \rho_3 = 0.03 \text{ м}, \quad \chi = 4, \\ c_1 = 0.6 \text{ Н} \cdot \text{м/В}, \quad c_2 = 0.05 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad U_0 = 19 \text{ В}$$

При указанных значениях параметров положительное собственное значение $\mu_1 = 0.834$, два других собственных значения разомкнутой системы отрицательны: $\mu_2 = -0.032$ и $\mu_3 = -0.995$. Максимально возможная область притяжения линеаризованной системы по углу отклонения маятника (см. второе неравенство (3.14)) описывается неравенством $|\beta(0)| < 18.2^\circ$. Коэффициенты k_{11} , k_{12} , k_{13} , вычисленные по формулам (3.11), принимают значения $k_{11} = -0.101$, $k_{12} = -2.58$, $k_{13} = -3.00$. Неравенство (3.16) при указанных значениях параметров имеет вид $\gamma > 0.318$. Численные исследования нелинейной системы (2.6) проводились при оптимальном управлении (3.17) с коэффициентами $\gamma k_{11} = -0.0695$, $\gamma k_{12} = -1.78$, $\gamma k_{13} = -2.06$, полученными при $\gamma = 0.687$. Эти исследования показывают, что область притяжения по углу β “почти” такая же, как для линеаризованной системы: $|\beta(0)| < 17.8^\circ$. На фиг. 2 сплошными линиями показан переходный процесс

по переменным ω , β (в градусах), x/r , u , полученный при интегрировании нелинейных уравнений (2.6), (3.17) с начальными условиями

$$\omega(0) = \beta'(0) = x(0) = 0, \quad \beta(0) = -10^\circ \quad (6.1)$$

Решение системы стремится асимптотически к нулю по переменным ω , β , u . Переменная x циклическая, она, естественно, к нулю не стремится и, более того, по окончании переходного процесса оказывается довольно “большой”. Дело в том, что время переходного процесса довольно велико, и моноцикл за это время перемещается на значительное расстояние. Медленное затухание переходного процесса объясняется наличием собственного значения $\mu_2 = -0.032$, которое близко к мнимой оси. Напомним, что при замыкании системы обратной связью (3.15) (или (3.17)) положительное собственное значение $\mu_1 = 0.834$ разомкнутой системы перемещается в левую полуплоскость комплексной плоскости; два других ($\mu_2 = -0.032$ и $\mu_3 = -0.995$) остаются без изменений.

Таким образом, оптимальный, с точки зрения максимизации области притяжения, закон управления (3.17) оказывается не слишком хорошим с точки зрения времени затухания переходного процесса и расстояния, на которое перемещается моноцикл в процессе стабилизации его стационарного режима. Если через некоторое время после начала процесса стабилизации добавить в закон управления член вида (4.3), описывающий обратную связь по перемещению x , то это расстояние можно уменьшить. Область притяжения при этом не уменьшится. Время переходного процесса и это расстояние можно уменьшить также, отступив от оптимальных значений коэффициентов обратной связи, но сохранив асимптотическую устойчивость стационарного режима. При таком отступлении, однако, область притяжения уменьшается.

Ниже приведены результаты численного исследования нелинейной системы (2.6) при линейной с насыщением обратной связи вида

$$u = \begin{cases} -u_0 & \text{при } v \leq -u_0 \\ v & \text{при } |v| \leq u_0 \\ u_0 & \text{при } v \geq u_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

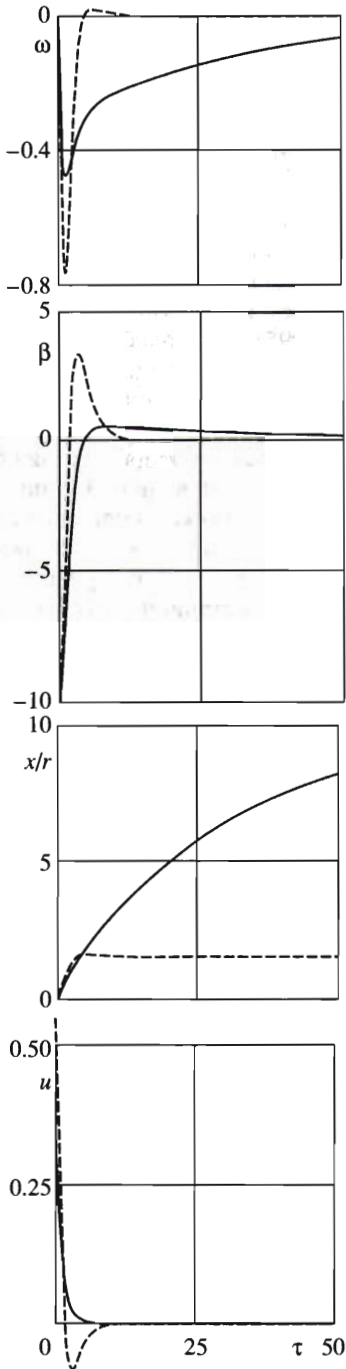
где $v = k_\omega \omega + k_\beta \beta + k_{\beta'} \beta'$, и коэффициенты k_ω , k_β , $k_{\beta'}$ отличаются от оптимальных. Эти коэффициенты вычислены путем назначения собственных значений линейной системы (3.2), замкнутой при помощи обратной связи $u = v$. Если замкнутая система имеет, например, трехкратное собственное значение, которое обозначим через μ_0 , то выражения для этих коэффициентов имеют вид

$$k_\omega = -p + \frac{j_5 \mu_0^3}{j_1}, \quad k_\beta = -\frac{3j_5 \mu_0^2 + j_1}{j_4 + 1}, \quad k_{\beta'} = p - \frac{j_5}{j_4 + 1} \left(3 + \frac{j_3 + j_4}{j_1} \mu_0^2 \right) \quad (6.3)$$

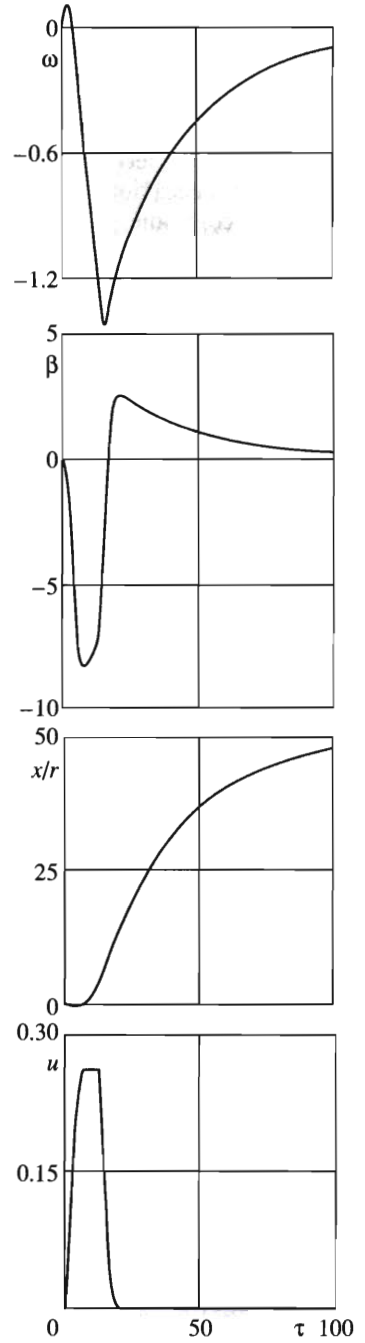
На фиг. 2 штриховыми линиями показан переходный процесс по переменным ω , β , x/r , u с теми же, что и выше, начальными условиями (6.1). Этот переходный процесс получен интегрированием нелинейной системы (2.6) с обратной связью (6.2). Коэффициенты обратной связи (6.2) вычислены по формулам (6.3) при $\mu_0 = -0.9$

$$k_\omega = -0.916, \quad k_\beta = -3.13, \quad k_{\beta'} = -6.77$$

Как видно из рассмотрения штриховых линий на фиг. 2, переходный процесс затухает значительно быстрее, нежели при оптимальных коэффициентах, найденных с целью максимизации области притяжения; расстояние, на которое перемещается моноцикл, уменьшается примерно в 5 раз. Область притяжения по углу β несколько меньше той, которая получается при оптимальных значениях коэффициентов: $|\beta(0)| < 16.2^\circ$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Задавая в законе управления (4.1) величину $\Delta\beta$ в виде функции времени, можно, как следует из раздела 5, управлять перемещением моноцикла. Рассмотрим случай, когда величина $\Delta\beta$ задана в виде трапецеидальной функции времени

$$\Delta\beta(\tau) = \begin{cases} k\tau, & 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ k\tau_1, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \\ k(\tau_1 + \tau_2) - k\tau, & \tau_2 \leq \tau \leq \tau_1 + \tau_2 \\ 0, & \tau_1 + \tau_2 \leq \tau \end{cases} \quad (6.4)$$

На фиг. 3 показано решение системы (2.6), (4.1), (6.4) на отрезке времени $0 \leq \tau \leq 100$ при начальных условиях

$$\omega(0) = \beta(0) = \beta'(0) = x(0) = 0$$

Параметры функции (6.4) выбраны такими: $k = 0.066$, $\tau_1 = 4$, $\tau_2 = 12$. Это решение построено при оптимальных значениях коэффициентов обратной связи. На отрезке времени $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ решение системы стремится к стационарному режиму движения, при котором угол $\beta = 0$, угловая скорость $\omega = \text{const}$. При $\tau_1 + \tau_2 \leq \tau$ решение стремится к стационарному режиму $\beta = \omega = x' = 0$. К моменту времени $\tau = 100$ ($t = 14.28$ с) моноцикл почти останавливается, переместившись на расстояние $x \approx 10$ м.

7. Влияние индуктивности в цепи ротора на устойчивость. При наличии индуктивности L в цепи ротора двигателя в ней протекают переходные процессы, которые приводят к запаздыванию в контуре управления. Для того чтобы учесть переходные процессы в цепи ротора, нужно вернуться от уравнений (2.6) к полным уравнениям (2.3), содержащим уравнение Кирхгофа. Система (2.3) при $u = 0$, а также при управлении (3.17) имеет решение

$$\omega = \varphi' = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta' = 0, \quad i = 0 \quad (7.1)$$

Линеаризуя уравнения (2.3) около решения (7.1) и заменяя φ' на ω , получаем систему

$$\omega' + j_4\beta'' = -u + p(\beta' - \omega)$$

$$j_4\omega' + j_3\beta'' - j_1\beta = u - p(\beta' - \omega) \quad (7.2)$$

$$\theta i'' + i + p(\beta' - \omega) = u$$

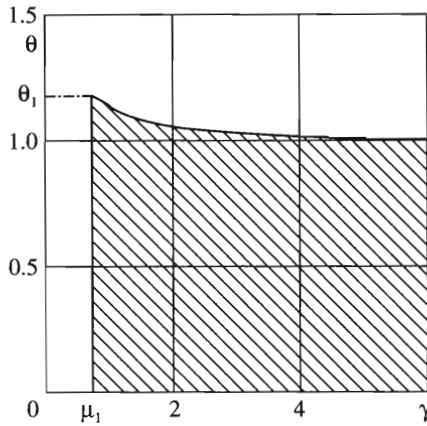
которая при управлении (3.17) также имеет решение (7.1). Система (7.2) в разомкнутом состоянии (при $u = 0$) имеет четыре собственных значения, одно из которых положительно. При малых значениях θ остальные три отрицательные. Исследования показывают, что с ростом значения θ два отрицательных собственных значения сначала сливаются, а затем превращаются в комплексно-сопряженные.

При подстановке в (7.2) выражения (3.15) для линейной обратной связи, коэффициенты которой определяются соотношениями (3.11), получаем систему четвертого порядка, характеристическое уравнение которой имеет вид (μ – спектральный параметр)

$$\mu^4 \theta j_5 + \mu^3 j_5 + \mu^2 [p(1 + j_3 + 2j_4) - j_1 \theta + j_5 \gamma] + \mu j_1 \left(\frac{p\gamma}{\mu_1^2} + \frac{\gamma}{\mu_1} - 1 \right) + p j_1 \left(\frac{\gamma}{\mu_1} - 1 \right) = 0 \quad (7.3)$$

Из условия положительности коэффициентов полинома (7.3) вытекает, что область асимптотической устойчивости решения (7.1) системы (7.2) (3.17), в плоскости параметров θ , γ лежит внутри угла

$$\theta < [j_5 \gamma + (1 + j_3 + 2j_4)p] / j_1, \quad \gamma > \mu_1 \quad (7.4)$$



Фиг. 4

Кроме того, из критерия Гурвица следует, что область асимптотической устойчивости находится под кривой

$$\theta = \frac{-a_1 + a_2\gamma + a_3\gamma^2}{\gamma(b_3\gamma - b_2)} \quad (7.5)$$

Здесь

$$a_1 = (1 + j_4)^2 \mu_1^4 p, \quad a_2 = \mu_1^2 (p + \mu_1) [(1 + j_3 + 2j_4)p - j_5 \mu_1]$$

$$a_3 = \mu_1^2 (p + \mu_1) j_5, \quad b_2 = j_1 \mu_1^2 (p + \mu_1), \quad b_3 = j_1 (p + \mu_1)^2$$

Кривая (7.5) имеет горизонтальную асимптоту

$$\theta = \theta_1 = \frac{\mu_1^2 j_5}{j_1 (p + \mu_1)}$$

и следовательно, если запаздывание $\theta < \theta_1$, то, с точки зрения асимптотической устойчивости, допустимы любые значения коэффициента усиления γ . При $\theta > \theta_2$, где

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\mu_1 p (1 + j_3 + 2j_4)}{j_1 (p + \mu_1)}$$

система неустойчива каким бы ни было значение коэффициента усиления γ .

На фиг. 4 при указанных выше численных значениях параметров системы с помощью соотношений (7.4), (7.5), в плоскости переменных θ, γ построена область асимптотической устойчивости (она заштрихована). При указанных значениях параметров имеем $\theta_1 = 0.97, \theta_2 = 1.20$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00637, 04-01-00105), в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-1835.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ленский А.В., Формальский А.М.* Двухколесный робот-велосипед с гиросtabilизатором // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 176–183.
2. *Мартыненко Ю.Г., Кобрин А.И., Ленский А.В.* Декомпозиция задачи управления мобильным одноколесным роботом с невозмущаемой гиросtabilизированной платформой // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 8. С. 767–769.
3. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem. and Proc. Manchester Literary and Phil. Soc. 1908. V. 52. № 8. Pt 2. P. 1–10.
4. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
5. *Schaefer J. F., Cannon R. H.* On the Control of Unstable Mechanical Systems // IFAC, 3d Congress, London, 1966. P. 601.
6. *Гришин А. А., Ленский А. В., Охоцимский Д. Е., Панин Д. А., Формальский А. М.* О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. ТиСУ. 2002. № 5. С. 14–24.
7. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М.* Маятник, управляемый при помощи маховика // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 6. С. 743–749.
8. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М.* Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 1. С. 27–38.
9. *Голубев Ю.Ф.* Робот-эквilibрист на цилиндре // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 603–619.
10. *Морозов В.М., Каленова В.И., Шевелева Е.Н.* Устойчивость и стабилизация движения одноколесного велосипеда // Изв. РАН, МГТ, 2001, № 4, С. 49–58.
11. *Appell P.E.* *Precis de Mecanique Rationelle.* Paris: Gauthier=Villars, 1952 = *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 488 с.
12. *Мартыненко Ю.Г.* Аналитическая динамика электромеханических систем. М.: Изд-во МЭИ, 1984. 64 с.
13. *Гориневский Д. М., Формальский А. М., Шнейдер А. Ю.* Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях. М.: Физматлит, 1994. 368 с.
14. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* *Topics in Mathematical System Theory.* N.Y.: McGraw-Hill, 1969 = *Калман Р.Е., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
15. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.

Москва

e-mail: martynenko@imec.msu.ru
formal@imec.msu.ruПоступила в редакцию
3.VI.2004