УДК 531.36:62–50

© 2005 г. Ю. К. Зотов

О ЛИНЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается нелинейная управляемая динамическая система (НУДС), описывающая динамику широкого класса нелинейных механических и электромеханических систем. Предложена методика синтеза законов управления с линейной обратной связью по состоянию, обеспечивающих стабилизацию программных движений НУДС. Построено неособое линейное преобразование координат пространства состояний, приводящее исходную НУДС в отклонениях (от ее программного движения и программного управления) к некоторой НУДС специального вида, удобной для анализа и синтеза законов управления движением системы. Из исходной НУДС в отклонениях выделена НУДС канонического вида. С использованием построенного неособого линейного преобразования координат пространства состояний и метода функций Ляпунова синтезированы законы управления с линейной обратной связью по состоянию, обеспечивающие асимптотическую устойчивость в целом положения равновесия НУДС канонического вида и асимптотическую устойчивость в большом положений равновесия НУДС специального вида и исходной НУДС в отклонениях. Даны оценки области асимптотической устойчивости в большом соответственно положений равновесия НУДС специального вида, исходной НУДС в отклонениях и программных движений исходной НУДС, замкнутых синтезированными стабилизирующими управлениями.

1. Постановка задачи. Динамика широкого класса механических и электромеханических систем описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши вида

$$\dot{z} = F(z, u, t), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geq t_0 \geq 0 \tag{1.1}$$

где z_0, $z = z(t)$ – n-мерные векторы состояний системы в начальный и текущий моменты времени; u – m-мерный вектор управлений; F – n-мерная вектор-функция, удовлетворяющая (при допустимом управлении) условиям существования и единственности решения системы (1.1) и определяющая свойства конкретного объекта управления.

Пусть задано (построено) программное движение (ПД)

$$z_p = z_p(t), \quad t \geq t_0 \tag{1.2}$$

являющееся частным решением системы (1.1) при некотором допустимом программном управлении

$$u_p = u_p(t), \quad t \geq t_0 \tag{1.3}$$

и начальном условии $z_{p0} = z_p(t_0)$. ПД $z_p(t)$ будем называть невозмущенным движением, а любое другое движение $z(t)$ системы (1.1) под действием допустимых управлений – возмущенным (реальным) движением.

Величины

$$e = z - z_p, \quad e_u = u - u_p \tag{1.4}$$

являются возмущениями, т.е. отклонениями реального (возмущенного) движения z и управления u от их программных значений. Они связаны обыкновенными дифференциальными уравнениями в отклонениях

$$\dot{e} = F_e(e, e_u, t), \quad e(t_0) = e_0, \quad t \ge t_0 \tag{1.5}$$

где

$$F_e(e, e_u, t) = F(e + z_p, e_u + u_p, t) - F(z_p, u_p, t) \tag{1.6}$$

причем $F_e(0, 0, t) \equiv 0$. Из равенства (1.6) вытекает, что при управлении $e_u = 0$ система (1.5), (1.6) имеет движение $e \equiv 0$.

Преобразования (1.4) сводят задачу изучения движений $z(t)$ нелинейной управляемой динамической системы (НУДС) (1.1) в окрестности любого выделенного ПД $z_p(t)$ (1.2) к задаче изучения решений $e = e(t)$ НУДС в отклонениях (1.5), (1.6) в окрестности ее положения равновесия $e = 0$. Поэтому в дальнейшем изложении основные ограничения и предположения будут формулироваться относительно НУДС в отклонениях (1.5), (1.6).

Для широкого класса механических и электромеханических систем (например, электромеханических роботов-манипуляторов, см. приложение, разд. 5) структура уравнений НУДС в отклонениях (1.5), (1.6) такова, что

$$e = \mathrm{col}(e_1, \ldots, e_r), \quad n = mr \tag{1.7}$$

$$F_e(e, e_u, t) = \mathrm{col}(F_{e1}(e^2, t), \ldots, F_{e,r-1}(e^r, t), F_{er}(e^r, e_u, t)) \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} &F_{e1}(e^2, t) = g_{e1}(e^1, t) + \bar{P}_{012}(t)e_2 \\ &F_{ek}(e^{k+1}, t) = g_{ek}(e^k, t) + \bar{P}_{0k,k+1}(e^{k-1}, t)e_{k+1}, \quad k = 2, \ldots, r-1 \\ &F_{er}(e^r, e_u, t) = g_{er}(e^r, t) + \bar{P}_{0r,r+1}(e^{r-1}, t)e_u \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь $e_k = \mathrm{col}(e_{k1}, \ldots, e_{km})$ и $e^k = \mathrm{col}(e_1, \ldots, e_k)$ – m- и mk-мерные векторы-столбцы; m-мерные вектор-функции F_{ek} ($k = 1, \ldots, r$) (1.9) непрерывны и достаточное число раз непрерывно-дифференцируемы по своим аргументам; $(m \times m)$-матрицы-функции $\bar{P}_{0k,k+1}$ ($k = 1, \ldots, r$) представимы в виде

$$\bar{P}_{012}(t) = A_1(t)B_1; \quad \bar{P}_{0k,k+1}(e^{k-1}, t) = A_k(e^{k-1}, t)B_k, \quad k = 2, \ldots, r \tag{1.10}$$

где

$$\begin{aligned} &A_1(t) = A_1^*(t) > 0, \quad t \ge t_0 \\ &A_k(e^{k-1}, t) = A_k^*(e^{k-1}, t) > 0, \quad \forall e^{k-1} \in R^{m(k-1)}, \quad t \ge t_0, \quad k = 2, \ldots, r \end{aligned} \tag{1.11}$$

A_k ($k = 1, \ldots, r$) – симметричные, положительно определенные $(m \times m)$-матрицы-функции, такие, что

$$\begin{aligned} &|A_1(t)| \le k_{A1}, \quad t \ge t_0 \\ &|A_k(e^{k-1}, t)| \le k_{Ak}, \quad \forall e^{k-1} \in R^{m(k-1)}, \quad t \ge t_0; \quad k = 2, \ldots, r \end{aligned} \tag{1.12}$$

$0 < k_{Ak} < \infty$ $(k = 1, \ldots, r)$ – некоторые постоянные; аналогичные оценки имеют место для частных производных от их элементов – скалярных функций a_{kij} $(k = 1, \ldots, r;\ i, j = 1, \ldots, m)$ по их аргументам; звездочка означает операцию транспонирования; B_k $(k = 1, \ldots, r)$ – неособые постоянные $(m \times m)$-матрицы, т.е.

$$\operatorname{rank} B_k = m, \quad k = 1, \ldots, r \tag{1.13}$$

$R^{m(k-1)}$ – $m(k-1)$-мерное вещественное евклидово пространство; всюду $|A| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{1/2}$ и $|a| = (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{1/2}$ – модули (евклидовы нормы) вещественных матрицы $A = \|a_{ij}\|_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m}$ порядка $n \times m$ и вектора $a = \operatorname{col}(a_1, \ldots, a_n) \in R^n$.

Для каждой из m-вектор-функций g_{ek} $(k = 1, \ldots, r)$ при всех возможных значениях их аргументов выполнены оценки

$$\left|g_{ek}(e^k, t)\right| \le k_{gek1}\left|e^k\right| + k_{gek2}\left|e^k\right|^2, \quad \forall e^k \in R^{mk}, \quad t \ge t_0 \tag{1.14}$$

где $k_{gekj} (j = 1, 2)$ – некоторые постоянные, причем

$$0 \le k_{gekj} < \infty, \quad k = 1, \ldots, r; \quad 0 < k_{ge2} = \sum_{k=1}^{r} k_{gek2} < \infty \tag{1.15}$$

Ниже закон управления

$$u = u(z, t) = u_p(t) + \Gamma_0(z - z_p), \quad t \ge t_0 \tag{1.16}$$

где

$$\Gamma_0 = \|\Gamma_{01}, \ldots, \Gamma_{0r}\| \tag{1.17}$$

(Γ_0 – постоянная блочная $(m \times n)$-матрица коэффициентов усиления цепей обратных связей; Γ_{0k} $(k = 1, \ldots, r)$ – $(m \times m)$-блоки), для исходной НУДС (1.1), (1.6)–(1.15) и закон управления

$$e_u = e_u(e) = \Gamma_0 e \tag{1.18}$$

для исходной НУДС в отклонениях (1.5)–(1.15) имеют структуру законов управления с линейной обратной связью соответственно по состоянию z и e.

Будем говорить, что ПД $z_p(t)$ (1.2) системы (1.1), (1.6)–(1.15) стабилизируемо законом управления u (1.16), (1.17) с линейной обратной связью по вектору состояния $z(t)$ (соответственно положение равновесия $e = 0$ системы (1.5)–(1.15) стабилизируемо законом управления e_u (1.18), (1.17) с линейной обратной связью по вектору состояния $e(t)$), если этот закон управления обеспечивает асимптотическую устойчивость в большом ПД $z_p(t)$ системы (1.1), (1.6)–(1.15) (соответственно положения равновесия $e = 0$ системы (1.5)–(1.15)) согласно определению 5, приводимому ниже, в разд. 3.

Далее формулируются критерии стабилизируемости положения равновесия $e = 0$ исходной НУДС в отклонениях (1.5)–(1.15) с законом управления e_u (1.18), (1.17) с линейной обратной связью по состоянию e (соответственно ПД z_p (1.2) исходной НУДС (1.1), (1.6)–(1.15) с законом управления u (1.16), (1.17) с линейной обратной связью по состоянию z). Даются оценки области асимптотической устойчивости в большом положения равновесия $e = 0$ замкнутой исходной НУДС в отклонениях (1.5)–(1.15), (1.18), (1.17) (соответственно ПД z_p (1.2) замкнутой исходной НУДС (1.1), (1.6)–(1.17)).

2. Приведение исходной НУДС в отклонениях к НУДС специального вида. Для дальнейшего рассмотрения исходную НУДС в отклонениях (1.5)–(1.15) запишем в виде системы

$$\dot{e} = \bar{P}_0(e^{r-2}, t)e + \bar{Q}_0(e^{r-1}, t)e_u + g_e(e, t), \quad e(t_0) = e_0, \quad t \ge t_0 \tag{2.1}$$

где

$$\bar{P}_0(e^{r-2}, t)e + \bar{Q}_0(e^{r-1}, t)e_u + g_e(e, t) \equiv F_e(e, e_u, t) \tag{2.2}$$

F_e – вектор-функция (1.6)–(1.15);

$$\bar{P}_0(e^{r-2}, t) = \begin{Vmatrix} O & \bar{P}_{012}(t) & O & \dots & \dots & O \\ O & O & \bar{P}_{023}(e^1, t) & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & O \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & O & \dots & \dots & O & \bar{P}_{0,r-1,r}(e^{r-2}, t) \\ O & O & \dots & \dots & O & O \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

$$\bar{Q}_0(e^{r-1}, t) = \begin{Vmatrix} O \\ \bar{P}_{0r,r+1}(e^{r-1}, t) \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

– блочные матрицы-функции порядка $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; $\bar{P}_{0k,k+1}$ $(k = 1, \dots, r)$ – $(m \times m)$-блоки вида (1.10)–(1.13); O – нулевая матрица, соответствующей размерности;

$$g_e(e, t) = \operatorname{col}(g_{e1}(e^1, t), g_{e2}(e^2, t), \dots, g_{er}(e^r, t)) \tag{2.5}$$

– n-вектор-функция, для которой при учете соотношений (1.14), (1.15) выполнена оценка

$$|g_e(e, t)| \le \sum_{k=1}^{r} |g_{ek}(e^k, t)| \le k_{ge1}|e| + k_{ge2}|e|^2, \quad \forall e \in R^n, \quad t \ge t_0 \tag{2.6}$$

где

$$k_{gej} = \sum_{k=1}^{r} k_{gekj}, \quad j = 1, 2; \quad 0 \le k_{ge1} < \infty, \quad 0 < k_{ge2} < \infty \tag{2.7}$$

Сделаем в системе (2.1)–(2.7) неособое линейное преобразование координат пространства состояний вида

$$e_x = Se \ (e = S^{-1}e_x = Re_x) \tag{2.8}$$

Здесь

$$e_x = \operatorname{col}(e_{x1}, \dots, e_{xr}) \tag{2.9}$$

$e_{xk} = \operatorname{col}(e_{xk1}, \dots, e_{xkm})$ – n- и m-мерные векторы; S, R – неособые постоянные блочно-нижне-треугольные $(n \times n)$-матрицы вида

$$S = \left\| \begin{matrix} I_m & O & \dots & & \dots & O \\ S_{21} & I_m & O & \dots & \dots & O \\ S_{32}S_{21} & S_{32} & I_m & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{r-1,r-2}S_{r-2,r-3}\dots S_{21} & S_{r-1,r-2}S_{r-2,r-3}\dots S_{32} & \dots & S_{r-1,r-2} & I_m & O \\ S_{r,r-1}S_{r-1,r-2}\dots S_{21} & S_{r,r-1}S_{r-1,r-2}\dots S_{32} & \dots & \dots & S_{r,r-1} & I_m \end{matrix} \right\| =$$

$$= \|S_{kl}\|_{k,\,l\,=\,1,\,\dots,\,r} \tag{2.10}$$

где

$$S_{kl} = O, \quad k = 1, \dots, r-1; \quad l = k+1, \dots, r$$

$$S_{kk} = I_m, \quad k = 1, \dots, r; \quad S_{kl} = S_{k,k-1}S_{k-1,l} = S_{k,k-1}S_{k-1,k-2}\dots S_{l+1,l} \tag{2.11}$$

$$k = 3, \dots, r; \quad l = 1, \dots, k-2$$

$S_{k+1,k}$ $(k = 1, \dots, r-1)$ – $(m \times m)$-блоки, вид которых указан ниже, в лемме 1

$$R = S^{-1} = \left\| \begin{matrix} I_m & O & \dots & & \dots & O \\ -S_{21} & I_m & O & \dots & \dots & O \\ O & -S_{32} & I_m & O & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & O & -S_{r-1,r-2} & I_m & O \\ O & \dots & \dots & O & -S_{r,r-1} & I_m \end{matrix} \right\| \tag{2.12}$$

I_m – единичная $(m \times m)$-матрица.

Тогда исходная НУДС в отклонениях (2.1)–(2.7) преобразуется к НУДС специального вида

$$\dot{e}_x = P_1(e_x^{r-2}, t)e_x + Q_1(e_x^{r-1}, t)e_u + g_{ex}(e_x, t), \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \ge t_0 \tag{2.13}$$

Здесь

$$P_1(e_x^{r-2}, t)e_x + Q_1(e_x^{r-1}, t)e_u + g_{ex}(e_x, t) \equiv F_{ex}(e_x, e_u, t) = SF_e(Re_x, e_u, t) \tag{2.14}$$

F_e – вектор-функция (1.6)–(1.15);

$$P_1(e_x^{r-2}, t) = S\bar{P}_0(\sigma^{r-2}(e_x^{r-2}), t)R =$$

$$= \left\| \begin{matrix} P_{111}(t) & P_{112}(t) & O & \dots & \dots & O \\ P_{121}(t) & P_{122}(e_x^1, t) & P_{123}(e_x^1, t) & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & P_{133}(e_x^2, t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \vdots\ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & P_{1,r-2,r-1}(e_x^{r-3}, t) & O \\ & & & & P_{1,r-1,r-1}(e_x^{r-2}, t) & P_{1,r-1,r}(e_x^{r-2}, t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ P_{1r1}(t) & P_{1r2}(e_x^1, t) & P_{1r3}(e_x^2, t) & \dots & P_{1,r,r-1}(e_x^{r-2}, t) & P_{1rr}(e_x^{r-2}, t) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \|P_{1kl}\|_{k,\,l\,=\,1,\,\dots,\,r} \tag{2.15}$$

– блочная $(n \times n)$-матрица-функция, ее $(m \times m)$-блоки имеют вид

$$P_{111} \equiv P_{111}(t) = -\bar{P}_{012}(t)S_{21}, \quad P_{112} \equiv P_{112}(t) = \bar{P}_{012}(t)$$

$$P_{1k1} \equiv P_{1k1}(t) = -S_{k1}\bar{P}_{012}(t)S_{21}, \quad k = 2, \ldots, r$$

$$P_{1,k,k+1} \equiv P_{1k,k+1}(e_x^{k-1}, t) = \bar{P}_{0,k,k+1}(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t), \quad k = 2, \ldots, r-1 \tag{2.16}$$

$$P_{1kk} \equiv P_{1kk}(t)(e_x^{k-1}, t) = S_{k,k-1}\bar{P}_{0,k-1,k}(\sigma^{k-2}(e_x^{k-2}), t) -$$

$$-\bar{P}_{0,k,k+1}(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t)S_{k+1,k}, \quad k = 2, \ldots, r-1$$

$$P_{1kl} = O, \quad k = 1, \ldots, r-2; \quad l = k+2, \ldots, r$$

$$P_{1kl} \equiv P_{1kl}(e_x^{l-1}, t) = S_{k,l-1}\bar{P}_{0,l-1,l}(\sigma^{l-2}(e_x^{l-2}), t) -$$

$$-S_{kl}\bar{P}_{0l,l+1}(\sigma^{l-1}(e_x^{l-1}), t)S_{l+1,l}, \quad k = 3, \ldots, r; \quad l = 2, \ldots, k-1$$

$$P_{1rr} \equiv P_{1rr}(e_x^{r-2}, t) = S_{r,r-1}\bar{P}_{0,r-1,r}(\sigma^{r-2}(e_x^{r-2}), t)$$

$e_x^k = \mathrm{col}(e_{x1}, \ldots, e_{xk})$; здесь и всюду ниже

$$\sigma^k \equiv \sigma^k(e_x^k) = \mathrm{col}(\sigma_1(e_{x1}), \sigma_2(e_{x1}, e_{x2}), \ldots, \sigma_k(e_{x,k-1}, e_{xk})) =$$
$$= H_k Re_x = H_k e = e^k = \mathrm{col}(e_1, \ldots, e_k) \tag{2.17}$$

$(\sigma_1(e_{x1}) = e_{x1} = e_1, \sigma_k(e_{x,k-1}, e_{xk}) = -S_{k,k-1}e_{x,k-1} + I_m e_{xk} = e_k, k = 2, \ldots, r)$ – mk-мерная вектор-функция, где $H_k = \|I_{km}, O\|$ – постоянная блочная матрица порядка $(km) \times n$; всюду

$$\bar{P}_{012}(\sigma^0(e_x^0), t) \equiv \bar{P}_{012}(t) \tag{2.18}$$

– $(m \times m)$-блок; при учете соотношений (2.4), (2.10), (2.11) Q_1 – блочная матрица-функция вида

$$Q_1(e_x^{r-1}, t) = S\bar{Q}_0(\sigma^{r-1}(e_x^{r-1}), t) = \bar{Q}_0(\sigma^{r-1}(e_x^{r-1}), t) \tag{2.19}$$

$$g_{ex}(e_x, t) = Sg_e(Re_x, t) \tag{2.20}$$

– n-вектор-функция, для которой при учете соотношений (2.5)–(2.7), (2.8)–(2.12) выполнена оценка

$$|g_{ex}(e_x, t)| = |Sg_e(Re_x, t)| \le |S||g_e(Re_x, t)| \le |S|(k_{ge1}|Re_x| + k_{ge2}|Re_x|^2) \le$$
$$\le k_{gex1}|e_x| + k_{gex2}|e_x|^2, \quad \forall e_x \in R^n, \quad t \ge t_0 \tag{2.21}$$

где $k_{gexj}(j = 1, 2)$ – некоторые постоянные, причем

$$0 \le k_{gex1} = |S||R|k_{ge1} < \infty, \quad 0 < k_{ge2} = |S||R|^2 k_{ge2} < \infty \tag{2.22}$$

3. Определения и вспомогательная лемма об асимптотической устойчивости в большом положения равновесия нелинейной динамической системы. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\dot{e} = f(e,t) + g(e,t), \quad e(t_0) = e_0, \quad t \geq t_0 \tag{3.1}$$

где e_0, $e = e(t) \equiv e(t;\ e_0,\ t_0)$ – n-мерные векторы состояний системы в начальный и текущий моменты времени; f, g – n-мерные вектор-функции, причем

$$\begin{gathered} f(0,t) = g(0,t) \equiv 0, \quad |g(e,t)| \leq k_{g1}|e| + k_{g2}|e|^2, \quad \forall e \in R^n, \quad \forall t \geq t_0 \\ 0 \leq k_{g1} < \infty, \quad 0 < k_{g2} < \infty \end{gathered} \tag{3.2}$$

где k_{gj} – некоторые постоянные.

Предполагается, что для системы (3.1), (3.2) существует и единственно решение задачи Коши.

Дадим некоторые определения [1--6], используемые ниже при рассмотрении поведения решения системы (3.1), (3.2).

Определение 1 ([1], [2], с. 9, [3], с. 66, 67). Положение равновесия $e = 0$ системы (3.1), (3.2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \geq 0$ существует такое число $\delta \equiv \delta(\varepsilon,\ t_0) > 0$, что если

$$|e_0| < \delta \equiv \delta(\varepsilon,\ t_0)$$

то

$$|e(t;\ e_0,\ t_0)| < \varepsilon \ \text{ при всех } \ t \geq t_0$$

В противном случае положение равновесия $e = 0$ системы (3.1), (3.2) неустойчиво.

Определение 2 ([1], [3], с. 68). Положение равновесия $e = 0$ системы (3.1), (3.2) называется асимптотически устойчивым при $t \to +\infty$, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого $t_0 \geq 0$ существует такое положительное число $\Delta \equiv \Delta(t_0) \leq \delta(\varepsilon,\ t_0)$, что если

$$|e_0| < \Delta$$

то

$$|e(t;\ e_0,\ t_0)| \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty \tag{3.3}$$

Определение 3 ([3], с. 68, [4], с. 69). Область

$$\Omega_a = \{e_0 \in R^n\colon |e_0| < \Delta \equiv \Delta(t_0)\}$$

(при фиксированном t_0) такая, что выполнено условие (3.3), называется областью притяжения или областью асимптотической устойчивости (ОАУ) положения равновесия $e = 0$ системы (3.1), (3.2).

Определение 4 ([3], с. 68; [4], с. 69). Если положение равновесия $e = 0$ системы (3.1), (3.2) асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$ и все решения $e = e(t)$ $(0 \leq t_0 \leq t < \infty)$ обладают свойством (3.3), т.е.

$$\Delta = \infty$$

то положение равновесия $e = 0$ называется асимптотически устойчивым в целом, т.е. система (3.1), (3.2) называется асимптотически устойчивой в целом, если

$$\Omega_a = R^n$$

Определение 5 ([5], с. 29). Пусть $\rho_0 > 0$ – заданное положительное число. Положение равновесия $e = 0$ системы (3.1), (3.2) называется асимптотически устойчивым в большом, если оно устойчиво по Ляпунову, и условие (3.3) выполняется при любых начальных состояниях e_0 из области

$$\Omega_0 = \{e_0 \in R^n: |e_0| < \rho_0\}$$

Ниже при исследовании поведения решений рассматриваемых НУДС применяется метод функций Ляпунова [1—6], позволяющий не только установить асимптотическую устойчивость, но и получить оценки ОАУ невозмущенных движений исследуемых систем (в частности, при решении задач асимптотической устойчивости в большом, когда область начальных возмущений нельзя считать сколь угодно малой). Так, например, согласно этому методу ([2], с. 21, [5], с. 29, 30; [6], с. 149), если вещественная, непрерывно-дифференцируемая, скалярная функция $\upsilon(e, t)$ положительно определена ([3], с. 235), $\upsilon(0, t) = 0$ и вдоль нетривиального решения $e(t)$ системы (3.1), (3.2) функция

$$\dot{\upsilon} = \dot{\upsilon}(e(t), t) = \frac{\partial \upsilon(e(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon(e(t), t)}{\partial e(t)}(f(e, t) + g(e, t)) = w(e(t), t) = w(e, t)$$

отрицательно определена ([3], с. 236) в ограниченной области

$$\Omega_0 = \{e \in R^n: \upsilon(e, t) < \rho_0,\ t \geq t_0\} \tag{3.4}$$

(где $\rho_0 > 0$ – вещественное число), то положение равновесия $e = 0$ системы (3.1), (3.2) асимптотически устойчиво в большом и область Ω_0 (3.4) является оценкой его ОАУ – области притяжения ([2], с. 21). Это означает, что все траектории $e(t;\ e_0,\ t_0)$ системы (3.1), (3.2), начинающиеся при $t = t_0$ в области Ω_0 (3.4), стремятся к началу координат ($e = 0$) при $t \to \infty$, т.е.

$$|e(t;\ e_0,\ t_0)| \to 0 \ \text{ при } \ t \to \infty, \quad e(t_0) = e_0 \in \Omega_0$$

Вспомогательная лемма. Предположим, что существует вещественная, непрерывно-дифференцируемая скалярная функция $\upsilon(e, t)$ и вещественные числа $\varepsilon_{\upsilon i} > 0$ ($i = 1, 2, 3$), $\alpha_0 > 0$, $0 < \nu_0 < 1$ такие, что

1) $\varepsilon_{\upsilon 1}|e| \leq \upsilon(e, t) \leq \varepsilon_{\upsilon 2}|e|$, $e \in R^n$, $t \geq t_0$ $\upsilon(0, t) = 0$;

2) $\left|\dfrac{\partial \upsilon(e, t)}{\partial e}\right| \leq \varepsilon_{\upsilon 3}$, $\dfrac{\partial \upsilon(e, t)}{\partial e} \neq 0$, $|e| \neq 0$, $t \geq t_0$;

3) в оценке (3.2) для вектор-функции $g(e, t)$ коэффициенты k_{gi} ($j = 1, 2$) удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq k_{g1} < (1 - \nu_0)\alpha_0 \varepsilon_{\upsilon 1}\varepsilon_{\upsilon 3}^{-1}, \quad 0 < \nu_0 < 1; \quad 0 < k_{g2} < \infty$$

4) производная по времени t от функции $\upsilon(e(t), t)$ в силу системы

$$\dot{e} = f(e, t), \quad e(t_0) = e_0, \quad t \geq t_0$$

вдоль нетривиального решения $e(t) = e(t;\ e_0,\ t_0)$ этой системы удовлетворяет оценке

$$\frac{d}{dt}\upsilon(e(t), t) = \frac{\partial \upsilon(e(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon(e(t), t)}{\partial e(t)} f(e(t), t) \leq -\alpha_0 \upsilon(e(t), t), \quad t \geq t_0$$

Тогда

1) положение равновесия $e = 0$ системы (3.1), (3.2) асимптотически устойчиво в большом;

2) ОАУ положения равновесия $e = 0$ системы (3.1), (3.2) является множество

$$\Omega_0 = \{e \in R^n\colon\ \upsilon(e, t) < \rho_0,\ t \geq t_0\};\quad \rho_0 = \frac{\varepsilon_{\upsilon 1}}{k_{g2}}\left[(1-\nu_0)\alpha_0\frac{\varepsilon_{\upsilon 1}}{\varepsilon_{\upsilon 3}} - k_{g1}\right] > 0 \tag{3.5}$$

3) для нетривиального решения $e(t)$ системы (3.1), (3.2) имеет место оценка

$$|e(t)| \leq \beta_0 e^{-\gamma_0(t-t_0)}|e(t_0)|,\quad e(t_0) = e_0 \in \Omega_0,\quad t \geq t_0;\quad \beta_0 = \varepsilon_{\upsilon 2}\varepsilon_{\upsilon 1}^{-1},\quad \gamma_0 = \nu_0\alpha_0$$

где Ω_0 – множество (3.5).

Доказательство. Учитывая условия 1–4 леммы, вычислим производную по времени t от функции $\upsilon \equiv \upsilon(e(t), t)$ в силу системы (3.1), (3.2). Получим

$$\begin{aligned}
\dot{\upsilon} &= \frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \frac{\partial\upsilon}{\partial e}(f(e,t) + g(e,t)) \leq -\alpha_0\upsilon + \left|\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right||g(e,t)| \leq -\alpha_0\upsilon + \\
&+ \varepsilon_{\upsilon 3}(k_{g1}|e| + k_{g2}|e|^2) \leq -\nu_0\alpha_0\upsilon - (1-\nu_0)\alpha_0\upsilon + \varepsilon_{\upsilon 3}\varepsilon_{\upsilon 1}^{-1}\upsilon(k_{g1} + k_{g2}\varepsilon_{\upsilon 1}^{-1}\upsilon) \leq \\
&\leq -\nu_0\alpha_0\upsilon + \upsilon\{\varepsilon_{\upsilon 3}\varepsilon_{\upsilon 1}^{-2}k_{g2}\upsilon + [\varepsilon_{\upsilon 3}\varepsilon_{\upsilon 1}^{-1}k_{g1} - (1-\nu_0)\alpha_0]\} \leq -\nu_0\alpha_0\upsilon = \\
&= -\gamma_0\upsilon,\quad e(t_0) = e_0 \in \Omega_0,\quad t \geq t_0;\quad 0 < \nu_0 < 1,\quad \gamma_0 = \nu_0\alpha_0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где Ω_0 – множество (3.5).

Отсюда и из условия 1 леммы вытекает справедливость утверждений 1, 2 леммы.

Из оценки (3.6) и условия 1 леммы следует, что выполнено неравенство

$$\upsilon(e,t) \leq e^{-\gamma_0(t-t_0)}\upsilon(e_0, t_0),\quad e(t_0) = e_0 \in \Omega_0,\quad t \geq t_0 \tag{3.7}$$

где Ω_0 – множество (3.5). Из неравенства (3.7) и оценок для функции $\upsilon(e, t)$, приведенных в условии 1 леммы, вытекает, что выполнено третье утверждение леммы. Лемма доказана.

4. Критерии стабилизируемости НУДС. 1°. Сначала рассмотрим поведение решения $e_x(t)$ НУДС

$$\dot{e}_x = P_1(e_x^{r-2}, t)e_x + Q_1(e_x^{r-1}, t)e_u,\quad e_x(t_0) = e_{x0},\quad t \geq t_0 \tag{4.1}$$

(где e_x – вектор состояния (2.8) системы, P_1 и Q_1 – матрицы-функции (2.15)–(2.18) и (2.19)), замкнутой законом управления e_u (1.18), (1.17), представимом при учете соотношений (2.8)–(2.12) в виде

$$e_u = \Gamma_0 e = e_{ux} \equiv \Gamma_0 R e_x = \bar{\Gamma}_0 e_x \tag{4.2}$$

где Γ_0 – постоянная $(m \times n)$-матрица, состоящая из $(m \times m)$-блоков:

$$\bar{\Gamma}_0 = \Gamma_0 R = \|\bar{\Gamma}_{01}, \ldots, \bar{\Gamma}_{0r}\| \tag{4.3}$$

$$\bar{\Gamma}_{0k} = \Gamma_{0k} - \Gamma_{0,k+1}S_{k+1,k},\quad k = 1, \ldots, r-1;\quad \bar{\Gamma}_{0r} = \Gamma_{0r} \tag{4.4}$$

и уравнения переходных процессов (УПП) (в указанной замкнутой системе) вида

$$\dot{e}_x = P(e_x^{r-1}, t)e_x,\quad e_x(t_0) = e_{x0},\quad t \geq t_0 \tag{4.5}$$

Здесь

$$P(e_x^{r-1}, t) = P_1(e_x^{r-2}, t) + Q_1(e_x^{r-1}, t)\bar{\Gamma}_0 = P_1(e_x^{r-2}, t) + P_2(e_x^{r-1}, t) \tag{4.6}$$

– $(n \times n)$ – матрица-функция, где P_1 – матрица-функция (2.15)–(2.18) и при учете соотношений (2.19), (2.4), (2.17)

$$P_2(e_x^{r-1}, t) = Q_1(e_x^{r-1}, t)\bar{\Gamma}_0 = \bar{Q}_0(\sigma^{r-1}(e_x^{r-1}), t)\bar{\Gamma}_0 =$$
$$= \left\| \begin{matrix} O \\ \bar{P}_{0r,\,r+1}(\sigma^{r-1}(e_x^{r-1}), t)\bar{\Gamma}_0 \end{matrix} \right\| \tag{4.7}$$

– блочная $(n \times n)$-матрица-функция.

Лемма 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) матрица $\bar{\Gamma}_0$ (4.3), (4.4) имеет $(m \times m)$-блоки:

$$\bar{\Gamma}_{0k} = \Gamma_{0k} - \Gamma_{0,\,k+1}S_{k+1,\,k} = O, \quad k = 1, \ldots, r-1; \quad \bar{\Gamma}_{0r} = \Gamma_{0r} \equiv S_{r+1,\,r} \tag{4.8}$$

где $S_{k+1,\,k}$ $(k = 1, \ldots, r)$ – $(m \times m)$-блоки, Γ_{0k} $(k = 1, \ldots, r)$ – $(m \times m)$-блоки матрицы Γ_0 (1.17) порядка $m \times n$, представимые в виде

$$\begin{aligned} &\Gamma_{0k} = \Gamma_{0,\,k+1}S_{k+1,\,k} = S_{r+1,\,r}S_{r,\,r-1}\ldots S_{k+1,\,k}, \quad k = 1, \ldots, r-1 \\ &\Gamma_{0r} \equiv S_{r+1,\,r} = \bar{\Gamma}_{0r} \end{aligned} \tag{4.9}$$

так, что матрица $\bar{\Gamma}_0$ (4.3), (4.4) имеет вид

$$\bar{\Gamma}_0 = \|O, \bar{\Gamma}_{0r}\| = \|O, S_{r+1,\,r}\| \tag{4.10}$$

2) $S_{k+1,\,k}$ $(k = 1, \ldots, r)$ – неособые постоянные $(m \times m)$-блоки, представимые в виде

$$S_{k+1,\,k} = B_k^{-1}\gamma_{S,\,k+1,\,k}, \quad k = 1, \ldots, r \tag{4.11}$$

где B_k $(k = 1, \ldots, r)$ – матрицы, определенные равенствами (1.10), (1.13); $\gamma_{S,\,k+1,\,k}$ $(k = 1, \ldots, r)$ – некоторые вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} &\gamma_{S,\,k+1,\,k} > 0, \quad k = 1, \ldots, r-1; \quad \gamma_{S,\,r+1,\,r} < 0 \\ &(|\gamma_{S,\,k+1,\,k}| = \gamma_{S,\,k+1,\,k} > 0,\ k = 1, \ldots, r-1; \quad |\gamma_{S,\,r+1,\,r}| = -\gamma_{S,\,r+1,\,r} > 0) \\ &\gamma_{S21} > \gamma_{0S21} = [2\underline{\lambda}(A_1)]^{-1}(r-1) \\ &|\gamma_{S,\,k+1,\,k}| > \gamma_{0S,\,k+1,\,k} = [2\underline{\lambda}(A_k)]^{-1}\left[\bar{\beta}_{Gkk} + (r-k) + \sum_{l=1}^{k-1}\alpha_{Gkl}\right], \quad k = 2, \ldots, r \end{aligned} \tag{4.12}$$

где

$$\begin{aligned} &0 < \underline{\lambda}(A_1) = \min_i \inf_{t \geq t_0} \lambda_i(A_1(t)) \\ &0 < \underline{\lambda}(A_k) = \min_i \inf_{e_x^{k-1} \in R^{(k-1)m},\ t \geq t_0} \lambda_i(A_k(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t)); \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{4.13}$$

$\sigma^k \equiv \sigma^k(e_x^k)$ – вектор-функция (2.17); $\lambda_i(A_k)$ – собственные значения матриц-функций A_k $(k = 1, \ldots, r)$ (1.11), (1.12) соответственно

$$\lambda_i(A_1) \equiv \lambda_i(A_1(t)), \quad \lambda_i(A_k) \equiv \lambda_i(A_k(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t)); \quad k = 2, \ldots, r; \quad i = 1, \ldots, m$$

$\bar{\beta}_{Gkk}$, α_{Gkl} $(k = 2, \ldots, r;\ l = 1, \ldots, k-1)$ – неотрицательные вещественные числа

$$\bar{\beta}_{G22} = \sup_{t \ge t_0}\left|\bar{G}_{22}(t)\right|, \quad \bar{G}_{22}(e_x^0, t) \equiv \bar{G}_{22}(t)$$

$$\bar{\beta}_{Gkk} = \sup_{e_x^{k-2} \in R^{(k-2)m},\, t \ge t_0}\left|\bar{G}_{kk}(e_x^{k-2}, t)\right|, \quad k = 3, \ldots, r$$

$$\bar{G}_{kk}(e_x^{k-2}, t) = S_{k,k-1}\bar{P}_{0,k-1,k}(\sigma^{k-2}(e_x^{k-2}), t) +$$

$$+ [S_{k,k-1}\bar{P}_{0,k-1,k}(\sigma^{k-2}(e_x^{k-2}), t)]^*, \quad \bar{G}_{k1}(e_x^0, t) \equiv \bar{G}_{k1}(t); \quad k = 2, \ldots, r \tag{4.14}$$

$$\bar{P}_{012}(\sigma^0(e_x^0), t) \equiv \bar{P}_{012}(t)$$

$$\alpha_{Gk1} = \sup_{t \ge t_0}\left|G_{k1}(t)\right|^2, \quad k = 2, \ldots, r$$

$$\alpha_{Gkl} = \sup_{e_x^{l-1} \in R^{(l-1)m},\, t \ge t_0}\left|\bar{G}_{kl}(e_x^{l-1}, t)\right|, \quad k = 3, \ldots, r; \quad l = 2, \ldots, k-1$$

Тогда положение равновесия $e_x = 0$ НУДС (4.1), (2.8), (2.15)–(2.19), замкнутой законом управления e_u (4.2)–(4.4), (4.8)–(4.14) с линейной обратной связью по состоянию e_x, стабилизируемо, так что имеют место следующие утверждения:

1) положение равновесия $e_x = 0$ УПП (4.5)–(4.14), (1.10)–(1.13) (в указанной замкнутой системе) асимптотически устойчиво по Ляпунову в целом;

2) для решения $e_x(t)$ этой системы выполнена оценка

$$\left|e_x(t)\right| \le e^{-\alpha_0(t-t_0)}\left|e_x(t_0)\right|, \quad t \ge t_0 \tag{4.15}$$

где α_0 – положительное вещественное число

$$\alpha_0 = \min_k \alpha_{exk}, \quad k = 1, \ldots, r; \quad \alpha_{ex1} = \frac{1}{2}[\alpha_{G11} - (r-1)] > 0$$

$$\alpha_{exk} = \frac{1}{2}\left[\alpha_{Gkk} - (r-k) - \sum_{l=1}^{k-1}\alpha_{Gkl}\right] > 0, \quad k = 2, \ldots, r \tag{4.16}$$

$$\alpha_{G11} = 2\gamma_{S21}\underline{\lambda}(A_1) > 0, \quad \alpha_{Gkk} = 2\underline{\lambda}(A_k)\left|\gamma_{S,k+1,k}\right| - \bar{\beta}_{Gkk} > 0, \quad k = 2, \ldots, r$$

Доказательство. Сначала отметим, что в УПП (4.5)–(4.7), где P – матрица-функция (4.6), у которой матрица-функция P_1 вида (2.15)–(2.18), а матрица-функция P_2 (4.7) (при учете соотношений (4.8), (4.9) (из первого условия леммы) для блоков $\bar{\Gamma}_{0k}$ и Γ_{0k} ($k = 1, \ldots, r$) соответственно матриц $\bar{\Gamma}_0$ (4.3), (4.4), (4.8), (4.10) и Γ_0 (1.17), (4.9)) имеет вид

$$P_2(e_x^{r-1}, t) = \operatorname{diag}(O, P_{2rr}(e_x^{r-1}, t)), \quad P_{2rr}(e_x^{r-1}, t) = \bar{P}_{0r,r+1}(\sigma^{r-1}(e_x^{r-1}), t)\bar{\Gamma}_{0r} \tag{4.17}$$

Теперь рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(e_x) = \left|e_x\right|^2 = e_x^* e_x \tag{4.18}$$

и вычислим производную по времени t от функции $V(e_x(t))$ (4.18) в силу УПП (4.5)–(4.14), (1.10)–(1.13) вдоль нетривиального решения $e_x(t)$ этой системы при учете соотношений (4.11)–(4.14) (из второго условия леммы) для блоков $S_{k+1,k}(k = 1, \ldots, r)$. В итоге получим

$$\dot{V}(e_x(t)) = W(e_x(t), t), \quad t \geq t_0 \tag{4.19}$$

Здесь

$$W(e_x, t) = e_x^* G(e_x^{r-1}, t) e_x \tag{4.20}$$

– квадратичная форма, где (при учете соотношений (4.6), (2.15)–(2.18), (4.17))

$$G(e_x^{r-1}, t) = G^*(e_x^{r-1}, t) = P(e_x^{r-1}, t) + P^*(e_x^{r-1}, t) = \|G_{kl}\|_{k,\, l = 1, \ldots, r} \tag{4.21}$$

– симметричная матрица-функция порядка $n \times n$, у которой $G_{kl}(k, l = 1, \ldots, r)$ – $(m \times m)$-блоки вида

$$\begin{aligned}
&G_{11} \equiv G_{11}(t) = G_{11}^*(t) \equiv G_{11}(e_x^0, x) = P_{11}(t) + P_{11}^*(t) = -2\gamma_{S21} A_1(t) \\
&G_{kk} \equiv G_{kk}(e_x^{k-1}, t) = G_{kk}^*(e_x^{k-1}, t) = P_{kk}(e_x^{k-1}, t) + P_{kk}^*(e_x^{k-1}, t) = \\
&= -2A_k(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t)|\gamma_{S,\, k+1,\, k}| + \bar{G}_{kk}(e_x^{k-2}, t), \quad k = 2, \ldots, r \\
&G_{1k}(t) = G_{k1}^*(t), \quad G_{k1}(t) = P_{1k1}(t), \quad k = 3, \ldots, r; \quad G_{12}(t) = G_{21}^*(t) \\
&G_{21}(t) = P_{121}(t) + P_{112}^*(t), \quad G_{kl}(e_x^{l-1}, t) = P_{1kl}(e_x^{l-1}, t) \\
&G_{lk}(e_x^{l-1}, t) = G_{kl}^*(e_x^{l-1}, t); \quad k = 4, \ldots, r; \quad l = 2, \ldots, k-2 \\
&G_{k,\, k+1}(e_x^{k-1}, t) = P_{1,\, k,\, k+1}(e_x^{k-1}, t) + P_{1,\, k+1,\, k}^*(e_x^{k-1}, t) \\
&G_{k+1,\, k}(e_x^{k-1}, t) = G_{k,\, k+1}^*(e_x^{k-1}, t); \quad k = 2, \ldots, r-1
\end{aligned} \tag{4.22}$$

где

$$\begin{aligned}
&P_{11}(t) = P_{111}(t) = -\bar{P}_{012}(t) S_{21} = -[A_1(t)B_1]S_{21} = -[A_1(t)B_1][B_1^{-1}\gamma_{S21}] = -A_1(t)\gamma_{S21} \\
&P_{kk}(e_x^{k-1}, t) = P_{1kk}(e_x^{k-1}, t) = \\
&= S_{k,\, k-1}\bar{P}_{0,\, k-1,\, k}(\sigma^{k-2}(e_x^{k-2}), t) - \bar{P}_{0,\, k,\, k+1}(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t) S_{k+1,\, k} = \\
&= S_{k,\, k-1}\bar{P}_{0,\, k-1,\, k}(\sigma^{k-2}(e_x^{k-2}), t) - [A_k(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t)B_k][B_k^{-1}\gamma_{S,\, k+1,\, k}] = \\
&= S_{k,\, k-1}\bar{P}_{0,\, k-1,\, k}(\sigma^{k-2}(e_x^{k-2}), t) - A_k(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t)|\gamma_{S,\, k+1,\, k}| \\
&|\gamma_{S,\, k+1,\, k}| = \gamma_{S,\, k+1,\, k} > 0; \quad k = 2, \ldots, r-1 \\
&P_{rr}(e_x^{r-1}, t) = P_{1rr}(e_x^{r-2}, t) + P_{2rr}(e_x^{r-1}, t) = \\
&= S_{r,\, r-1}\bar{P}_{0,\, r-1,\, r}(\sigma^{r-2}(e_x^{r-2}), t) + \bar{P}_{0,\, r,\, r+1}(\sigma^{r-1}(e_x^{r-1}), t) S_{r+1,\, r} = \\
&= S_{r,\, r-1}\bar{P}_{0,\, r-1,\, r}(\sigma^{r-2}(e_x^{r-2}), t) + [A_k(\sigma^{r-1}(e_x^{r-1}), t)B_r][B_r^{-1}\gamma_{S,\, r+1,\, r}] = \\
&= S_{r,\, r-1}\bar{P}_{0,\, r-1,\, r}(\sigma^{r-2}(e_x^{r-2}), t) - A_r(\sigma^{r-1}(e_r^{r-1}), t)|\gamma_{S,\, r+1,\, r}| \\
&|\gamma_{S,\, r+1,\, r}| = -\gamma_{S,\, r+1,\, r} > 0, \quad \gamma_{S,\, r+1,\, r} < 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$\sigma^k \equiv \sigma^k(e_x^k)$ – mk-вектор-функция (2.17), $(m \times m)$-блоки $\bar{G}_{kk}$ $(k = 2, \ldots, r)$ определены формулами в (4.14) и согласно выражениям (4.8), (4.9)

$$\bar{\Gamma}_{0r} = \Gamma_{0r} = S_{r+1,\, r}$$

Оценим квадратичную форму $W(e_x, t)$ (4.20)–(4.23).

С этой целью сначала отметим, что в силу положительной определенности матриц-функций A_k $(k = 1, \ldots, r)$ и оценок (1.11) имеют место оценки

$$\begin{aligned}
&\underline{\lambda}(A_1)|e_{x1}|^2 \le e_{x1}^* A_1(t) e_{x1} \le \bar{\lambda}(A_1)|e_{x1}|^2, \quad \forall t \ge t_0 \\
&\underline{\lambda}(A_k)|e_{xk}|^2 \le e_{xk}^* A_k(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t) e_{xk} \le \bar{\lambda}(A_k)|e_{xk}|^2 \\
&\forall e_x^{k-1} \in R^{(k-1)m}, \quad \forall t \ge t_0, \quad k = 2, \ldots, r
\end{aligned} \tag{4.24}$$

где $\underline{\lambda}(A_k) > 0$ $(k = 1, \ldots, r)$ – вещественные числа (4.13) и

$$\begin{aligned}
&0 < \bar{\lambda}(A_1) = \max_i \sup_{t \ge t_0} \lambda_i(A_1(t)) \\
&0 < \bar{\lambda}(A_k) = \max_i \sup_{e_x^{k-1} \in R^{(k-1)m},\, t \ge t_0} \lambda_i(A_k(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t)) \\
&i = 1, \ldots, m; \quad k = 2, \ldots, r
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Затем оценим квадратичные формы

$$W_{11}(e_{x1}, t) = e_{x1}^* G_{11}(t) e_{x1}, \quad W_{kk}(e_x^k, t) = e_{xk}^* G_{kk}(e_x^{k-1}, t) e_{xk}, \quad k = 2, \ldots, r \tag{4.26}$$

Учитывая соотношения (4.22), (4.14), получим

$$\begin{aligned}
&W_{11}(e_{x1}, t) = e_{x1}^* G_{11}(t) e_{x1} = -2 e_{x1}^* \gamma_{S21} A_1(t) e_{x1} \le -\alpha_{G11}|e_{x1}|^2 \\
&W_{kk}(e_x^k, t) = e_{xk}^* G_{kk}(e_x^{k-1}, t) e_{xk} = \\
&= e_{xk}^*[-2A_k(\sigma^{k-1}(e_x^{k-1}), t)|\gamma_{S,k+1,k}| + \bar{G}_{kk}(e_x^{k-2}, t)] e_{xk} \le \\
&\le -[2\underline{\lambda}(A_k)|\gamma_{S,k+1,k}| - |\bar{G}_{kk}(e_x^{k-2}, t)|]|e_{xk}|^2 \le -\alpha_{Gkk}|e_{xk}|^2, \quad k = 2, \ldots, r
\end{aligned} \tag{4.27}$$

где α_{Gkk} $(k = 1, \ldots, r)$ – положительные вещественные числа (4.16), (4.12)–(4.14).

Далее, учитывая соотношения (4.22), (4.23), (4.26), (4.27) и используя неравенства

$$\begin{aligned}
&2e_{xk}^* G_{kl}(e_x^{l-1}, t) e_{xl} \le 2[|e_{xk}^*||G_{kl}(e_x^{l-1}, t)|]|e_{xl}| \le |e_{xl}|^2 + \alpha_{Gkl}|e_{xk}|^2 \\
&k = 2, \ldots, r; \quad l = 1, \ldots, k-1
\end{aligned}$$

где α_{Gkl} – неотрицательные вещественные числа, определяемые последними двумя формулами (4.14), оценим квадратичную форму $W(e_x, t)$ (4.20)–(4.23). Получим

$$\begin{aligned}
W(e_x, t) &= e_x^* G(e_x^{r-1}, t) e_x = \sum_{k=1}^{r} e_{xk}^* G_{kk}(e_x^{k-1}, t) e_{xk} + 2\sum_{k=2}^{r}\left[\sum_{l=1}^{k-1} e_{xk}^* G_{kl}(e_x^{l-1}, t) e_{xl}\right] \le \\
&\le \sum_{k=1}^{r} e_{xk}^* G_{kk}(e_x^{k-1}, t) e_{xk} + \sum_{k=2}^{r}\left\{\sum_{l=1}^{k-1}[|e_{xl}|^2 + \alpha_{Gkl}|e_{kl}|^2]\right\} = \\
&= e_{x1}^*[G_{11}(t) + (r-1)I_m] e_{x1} + \sum_{k=2}^{r} e_{xk}^*\left\{G_{kk}(e_x^{k-1}, t) + \left[(r-k) + \sum_{l=1}^{k-1}\alpha_{Gkl}\right] I_m\right\} e_{xk} \le
\end{aligned}$$

$$\le [-\alpha_{G11} + (r-1)]|e_{x1}|^2 + \sum_{k=2}^{r}\left[-\alpha_{Gkk} + (r-k) + \sum_{l=1}^{k-1}\alpha_{Gkl}\right]|e_{xk}|^2 =$$

$$= -2\sum_{k=1}^{r}\alpha_{exk}|e_{xk}|^2 \le -2\alpha_0|e_x|^2 = -2\alpha_0 V(e_x(t)), \quad t \ge t_0 \tag{4.28}$$

где $\alpha_{exk} > 0$ ($k = 1, \ldots, r$), $\alpha_0 > 0$ – вещественные числа из (4.16), (4.11)–(4.14). Из соотношений (4.19), (4.28) вытекает оценка

$$\dot V(e_x(t)) = W(e_x(t), t) \le -2\alpha_0 V(e_x(t)), \quad t \ge t_0 \tag{4.29}$$

из которой находим

$$V(e_x(t)) \le V(e_x(t_0))\exp[-2\alpha_0(t-t_0)], \quad t \ge t_0$$

Отсюда, используя снова соотношение (4.18), получим

$$|e_x(t)|^2 \le |e_x(t_0)|^2\exp[-2\alpha_0(t-t_0)], \quad t \ge t_0$$

Следовательно, положение равновесия $e_x = 0$ УПП – системы (4.5)–(4.14), (1.10)–(1.13) асимптотически устойчиво по Ляпунову в целом с оценкой для решения $e_x(t)$ вида

$$|e_x(t)| \le \exp[-\alpha_0(t-t_0)]|e_x(t_0)|, \quad t \ge t_0 \tag{4.30}$$

т.е. положение равновесия $e_x = 0$ НУДС (4.1), (2.15)–(2.19), замкнутой законом управления e_u (4.2)–(4.4), (4.8)–(4.14) с линейной обратной связью по состоянию e_x, стабилизируемо. Лемма 1 доказана.

2°. Рассмотрим поведение решения $e_x(t)$ НУДС специального вида (2.13)–(2.22):

$$\dot e_x = P_1(e_x^{r-2}, t)e_x + Q_1(e_x^{r-1}, t)e_u + g_{ex}(e_x, t), \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \ge t_0$$

(где e_x – вектор состояния (2.8) системы; P_1 и Q_1 – матрицы-функции (2.15)–(2.18) и (2.19); g_{ex} – вектор-функция (2.2)–(2.22)), замкнутой законом управления e_u (1.18), (1.17), представимом при учете соотношений (2.8)–(2.12) в виде (4.2)–(4.4):

$$e_u = \Gamma_0 e = e_{ux} \equiv \Gamma_0 R e_x = \bar\Gamma_0 e_x \quad (\bar\Gamma_0 = \Gamma_0 R)$$

и УПП (в указанной замкнутой системе) вида

$$\dot e_x = P(e_x^{r-1}, t)e_x + g_{ex}(e_x, t), \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \ge t_0 \tag{4.31}$$

Здесь P – $(n \times n)$-матрица-функция (4.6), (2.15)–(2.18), (4.7), g_{ex} – вектор-функция (2.20)–(2.22).

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть в оценке (2.21) для вектор-функции g_{ex} (2.20) коэффициенты k_{gexj} ($j = 1, 2$) (2.22) такие, что

$$\begin{aligned} &0 \le k_{gex1} = |S||R|k_{ge1} < (1-\nu_0)\alpha_0, \quad 0 < \nu_0 < 1 \\ &0 < k_{gex2} = |S||R|^2 k_{ge2} < \infty \end{aligned} \tag{4.32}$$

где k_{ge1}, k_{ge2} и α_0 – постоянные, определяемые согласно соотношениям (2.7), (1.14), (1.15) и (4.16), (4.11)–(4.14).

Тогда НУДС специального вида (2.13)–(2.22), (4.32), замкнутая законом управления e_u (4.2)–(4.4), (4.8)–(4.14) с линейной обратой связью по состоянию e_x, стабилизируема, так что для решения $e_x(t)$ УПП (в указанной замкнутой НУДС) – системы (4.31), (4.6), (2.15)–(2.18), (4.7), (2.20)–(2.22), (4.32) имеют место следующие утверждения:

1) положение равновесия $e_x = 0$ системы (4.31), (4.6), (2.15)–(2.18), (4.7), (2.20)–(2.22), (4.32) асимптотически устойчиво в большом;

2) ОАУ положения равновесия $e_x = 0$ системы (4.31), (4.6), (2.15)–(2.18), (4.7), (2.20)–(2.22), (4.32) является множество

$$\Omega_{ex0} = \{e_x \in R^n\colon \upsilon(e_x) = |e_x| < \rho_{ex0}\} \tag{4.33}$$

где

$$\rho_{ex0} = k_{gex2}^{-1}[(1-\nu_0)\alpha_0 - k_{gex1}] > 0, \quad 0 < \nu_0 < 1 \tag{4.34}$$

α_0 – постоянная, определяемая согласно соотношениям (4.16), (4.11)–(4.14).

3) для нетривиального решения $e_x(t)$ системы (4.31), (4.6), (2.15)–(2.18), (4.7), (2.20)–(2.22), (4.32) имеет место оценка

$$|e_x(t)| \le e^{-\gamma_0(t-t_0)}|e_x(t_0)|, \quad e_x(t_0) \in \Omega_{ex0}, \quad t \ge t_0; \quad \gamma_0 = \nu_0\alpha_0 \tag{4.35}$$

где Ω_{ex0} – множество (4.33), (4.34).

Доказательство. Покажем, что для системы (4.31), (4.6), (2.15)–(2.18), (4.7), (2.20)–(2.22), (4.32), записанной в виде

$$\dot{e}_x = f(e_x, t) + g_{ex}(e_x, t), \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \ge t_0 \tag{4.36}$$

где вектор-функция

$$f(e_x, t) \equiv P(e_x^{r-1}, t)e_x \tag{4.37}$$

g_{ex} – вектор-функции (2.20)–(2.22), (4.32), выполнены условия вспомогательной леммы.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$\upsilon(e_x) = |e_x| = (V(e_x))^{1/2} = (e_x^* e_x)^{1/2} \tag{4.38}$$

где $V(e_x)$ – функция (4.18).

Для функции $\upsilon(e_x)$ (4.38), (4.18) выполнены условия 1, 2 вспомогательной леммы, где

$$\varepsilon_{\upsilon i} = 1, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.39}$$

Коэффициенты k_{gexj} ($j = 1, 2$) (2.22) в оценке (2.21) для вектор-функции g_{ex} (2.20) удовлетворяют (при учете соотношений (4.39), (4.32)) оценкам из условия 3 вспомогательной леммы, где α_0 – постоянная, определяемая согласно соотношениям (4.16), (4.11)–(4.14),

$$k_{g1} = k_{gex1} = |S||R|k_{ge1} \ge 0, \quad k_{g2} = k_{gex2} = |S||R|^2 k_{ge2} > 0, \quad \varepsilon_{\upsilon i} = 1, \quad i = 1, 2, 3$$

$k_{ge1} \ge 0$, $k_{ge2} > 0$ – постоянные, определяемые согласно соотношениям (2.7), (1.14), (1.15).

Поскольку выполнены условия леммы 1, то согласно этой лемме для производной по времени t от функции $V(e_x(t))$ (4.18) в силу системы (4.5)–(4.7), (2.15)–(2.18), записанной в виде

$$\dot{e}_x = f(e_x, t), \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \ge t_0 \tag{4.40}$$

где f – вектор-функция (4.37), имеют место соотношения (4.19), (4.20), (4.28), (4.29):

$$\dot{V}(e_x(t)) = W(e_x(t)) \le -2\alpha_0 V(e_x(t)), \quad t \ge t_0 \tag{4.41}$$

где $W(e_x(t))$ – функция (4.20)–(4.23), α_0 – положительное число, определенное в соотношениях (4.16), (4.11)–(4.14).

С учетом оценки (4.41) вычислим производную по времени t от функции $\upsilon(e_x(t))$ (4.38), (4.18) в силу системы (4.40), (4.37). Получим

$$\dot{\upsilon}(e_x(t)) = [(V(e_x(t)))^{1/2}]^{\cdot} = \frac{\dot{V}(e_x(t))}{2(V(e_x(t)))^{1/2}} = \frac{1}{2\upsilon(e_x(t))}\dot{V}(e_x(t)) =$$

$$= \frac{1}{2\upsilon(e_x(t))}\frac{\partial V(e_x)}{\partial e_x}f(e_x,t) \le -\frac{1}{2\upsilon(e_x(t))}2\alpha_0 V(e_x(t)) =$$

$$= -\frac{1}{2\upsilon(e_x(t))}2\alpha_0[\upsilon(e_x(t))]^2 = -\alpha_0\upsilon(e_x(t)), \quad t \ge t_0 \tag{4.42}$$

и, следовательно, выполнено четвертое условие вспомогательной леммы.

Таким образом, для системы (4.36), (4.37), (2.20)–(2.22), (4.32) выполнены все условия вспомогательной леммы и, следовательно, выполнены утверждения этой леммы, совпадающие при учете соотношений (4.38), (4.18) с утверждениями леммы 2 для системы (4.31), (4.6), (2.15)–(2.18), (4.7), (2.20)–(2.22), (4.32), записанной в виде системы (4.36), (4.37), (2.20)–(2.22), (4.32). Лемма 2 доказана.

3°. Теперь рассмотрим поведение решения $e(t)$ НУДС канонического вида

$$\dot{e} = \bar{P}_0(e^{r-2},t)e + \bar{Q}_0(e^{r-1},t)e_u, \quad e(t_0) = e_0, \quad t \ge t_0 \tag{4.43}$$

(где $\bar{P}_0$, $\bar{Q}_0$ – матрицы-функции (2.3), (2.4)), замкнутой законом управления e_u (1.18), (1.17):

$$e_u = \Gamma_0 e$$

с линейной обратной связью по состоянию e, и УПП (в указанной замкнутой системе)

$$\dot{e} = P_0(e^{r-1},t)e, \quad e(t_0) = e_0, \quad t \ge t_0 \tag{4.44}$$

Здесь $P_0(e^{r-1},t)$ – $(n \times n)$-матрица-функция

$$P_0(e^{r-1},t) = \bar{P}_0(e^{r-2},t) + \bar{Q}_0(e^{r-1},t)\Gamma_0 = P_{01}(e^{r-2},t) + P_{02}(e^{r-1},t) \tag{4.45}$$

Блочные $(n \times n)$-матрицы-функции имеют вид

$$P_{01}(e^{r-2},t) = \bar{P}_0(e^{r-2},t) \tag{4.46}$$

$$P_{02}(e^{r-1},t) = \bar{Q}_0(e^{r-1},t)\Gamma_0 = \begin{Vmatrix} O \\ \bar{P}_{0r,r+1}(e^{r-1},t)\Gamma_0 \end{Vmatrix} \tag{4.47}$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 1.

Тогда НУДС канонического вида (4.43), (2.3), (2.4), замкнутая законом управления e_u (1.18), (1.17), (4.8)–(4.14) с линейной обратной связью по состоянию e, стабилизируема, так что для решения $e(t)$ УПП (в указанной замкнутой НУДС) – системы (4.44)–(4.47), (1.17), (4.9)–(4.14) имеют место следующие утверждения:

1) положение равновесия $e = 0$ системы (4.44)–(4.47), (1.17), (4.9)–(4.14) асимптотически устойчиво в целом;

2) для нетривиального решения $e(t)$ системы (4.44)–(4.47), (1.17), (4.9)–(4.14) имеет место оценка

$$|e(t)| \le \beta_0 e^{-\alpha_0(t-t_0)}|e(t_0)|, \quad e(t_0) = e_0, \quad t \ge t_0; \quad \beta_0 = |R||S| \tag{4.48}$$

где α_0 – положительное число, определенное в соотношениях (4.17), (4.11)–(4.14).

Доказательство. Сначала НУДС канонического вида (4.43), (2.3), (2.4) неособым линейным преобразованием координат пространства состояний

$$e_x = Se \quad (e = S^{-1}e_x = Re_x)$$

вида (2.8)–(2.12) приведем к НУДС (4.1), (2.15)–(2.19)

$$\dot{e}_x = P_1(e_x^{r-2}, t)e_x + Q_1(e_x^{r-1}, t)e_u, \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geq t_0$$

Для НУДС (4.1), (2.15)–(2.19) выполнены первое и второе условия леммы 1 и, следовательно, для этой системы справедливы утверждения этой леммы.

Из утвержений леммы 1, невырожденности линейной замены переменных вида (2.8)–(2.12) и оценок

$$|e| = |Re_x| \leq |R||e_x|, \quad |e_x| = |Se| \leq |S||e| \tag{4.49}$$

вытекает, что имеют место утверждения теоремы 1 для НУДС канонического вида (4.43), (2.3), (2.4), замкнутой законом управления e_u (1.18), (1.17), (4.8)–(4.14) с линейной обратной связью по состоянию e, а также для решения $e(t)$ УПП (в указанной замкнутой НУДС) – системы (4.44)–(4.47), (1.17), (4.9)–(4.14).

Отметим, что эти утверждения аналогичны утверждениям леммы 1 для НУДС (4.1), (2.8), (2.15)–(2.19), замкнутой законом управления e_u (4.2)–(4.4), (4.8)–(4.14) с линейной обратной связью по состоянию e_x и для УПП (4.5)–(4.14), (1.10)–(1.13) (в указанной замкнутой системе). Теорема 1 доказана.

4°. В заключение рассмотрим поведение решения $e(t)$ исходной НУДС в отклонениях (2.1)–(2.7)

$$\dot{e} = \bar{P}_0(e^{r-2}, t)e + \bar{Q}_0(e^{r-1}, t)e_u + g_e(e, t), \quad e(t_0) = e_0, \quad t \geq t_0$$

замкнутой законом управления e_u (1.18), (1.17)

$$e_u = \Gamma_0 e$$

с линейной обратной связью по состоянию e, и УПП (в указанной замкнутой системе)

$$\dot{e} = P_0(e^{r-1}, t)e + g_e(e, t), \quad e(t_0) = e_0, \quad t \geq t_0 \tag{4.50}$$

где P_0 – матрица-функция (4.45)–(4.47), g_e – вектор-функция (2.5)–(2.7).

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 2 и пусть для вектор-функции g_e (2.5) выполнена оценка (2.6), (2.7), а в оценке (2.21) для вектор-функции g_{ex} (2.20) коэффициенты k_{gexj} ($j = 1, 2$) (2.22) удовлетворяют неравенствам (4.32).

Тогда исходная НУДС в отклонениях (2.1)–(2.7), замкнутая законом управления e_u (1.18), (1.17), (4.8)–(4.14) с линейной обратной связью по состоянию e, стабилизируема, так что для решения $e(t)$ УПП (в указанной замкнутой НУДС) – системы (4.50), (4.45)–(4.47), (1.17), (4.8)–(4.14), (2.5)–(2.7) имеют место следующие утверждения:

1) положение равновесия $e = 0$ системы (4.50), (4.45)–(4.47), (1.17), (4.8)–(4.14), (2.5)–(2.7) асимптотически устойчиво в большом;

2) ОАУ положения равновесия $e = 0$ системы (4.50), (4.45)–(4.47), (1.17), (4.8)–(4.14), (2.5)–(2.7) является множество

$$\Omega_{e0} = \{e \in R^n \colon e = Re_x,\ e_x \in \Omega_{ex0}\} \tag{4.51}$$

где Ω_{ex0} – множество (4.33), (4.34);

3) для нетривиального решения $e(t)$ системы (4.50), (4.45)–(4.47), (1.17), (4.8)–(4.14), (2.5)–(2.7) имеет место оценка

$$|e(t)| \leq \beta_0 e^{-\gamma_0(t - t_0)}|e(t_0)|, \quad e(t_0) \in \Omega_{e0}, \quad t \geq t_0 \tag{4.52}$$

где

$$\beta_0 = |R||S|, \quad \gamma_0 = \nu_0\alpha_0, \quad 0 < \nu_0 < 1$$

α_0 – положительное число, определенное в соотношениях (4.16), (4.11)–(4.14), Ω_{e0} – множество (4.51).

Доказательство. Сначала исходную НУДС в отклонениях (2.1)–(2.7) неособым линейным преобразованием координат пространства состояний

$$e_x = Se \quad (e = S^{-1}e_x = Re_x)$$

вида (2.8)–(2.12) приведем к НУДС специального вида (2.13)–(2.22)

$$\dot{e}_x = P_1(e_x^{r-2}, t)e_x + Q_1(e_x^{r-1}, t)e_u + g_{ex}(e_x, t), \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geq t_0$$

В оценке (2.21) для вектор-функции g_{ex} (2.20) коэффициенты k_{gexj} (j = 1, 2) (2.22) удовлетворяют неравенствам (4.32).

Для НУДС специального вида (2.13)–(2.22), (4.32) выполнены условия леммы 2 и, следовательно, для этой системы справедливы утверждения этой леммы.

Из утверждений леммы 2, невырожденности линейной замены переменных вида (2.8)–(2.12) и оценок (4.49), (4.32) вытекает, что утверждения (аналогичные утверждениям леммы 2), сформулированные в теореме 2, имеют место для исходной НУДС в отклонениях (2.1)–(2.7), замкнутой законом управления e_u (1.18), (1.17), (4.8)–(4.14) с линейной обратной связью по состоянию e, а также для решения $e(t)$ УПП (в указанной замкнутой НУДС) – системы (4.50), (4.45)–(4.47), (1.17), (4.8)–(4.14), (2.5)–(2.7). Теорема 2 доказана.

5. Приложение. Для НУДС типа электромеханической системы (например, электромеханического робота-манипулятора), в состав которой входят исполнительный механизм (ИМ), электроприводы (ЭП) на базе двигателей постоянного тока (ДПТ) и с жесткими редукторами, уравнения динамики имеют вид [7]

$$\begin{gathered}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q}\right]^* + Q_c \equiv A_0(q)\ddot{q} + b_0(q, \dot{q}, t) = Q_u \\ J\ddot{\alpha} + k_0\dot{\alpha} + i_p^{-1}\eta_p^{-1}Q_u = k_M I_a, \quad L\dot{I}_a + RI_a + k_e\dot{\alpha} = u\end{gathered} \tag{5.1}$$

Первое уравнение описывает динамику ИМ в форме уравнений Лагранжа второго рода, а второе и третье уравнения описывают динамику ЭП. Здесь $q = col(q_1, \ldots, q_m)$ – m-мерный вектор обобщенных координат $q_1, \ldots, q_m$ ИМ; m – число степеней свободы (подвижности) ИМ; $A_0(q)$ – непрерывно дифференцируемая, симметричная, положительно определенная $(m \times m)$-матрица-функция кинетической энергии $T = \dot{q}^* A_0(q)\dot{q}/2$ ИМ, причем

$$|A_0(q)| \leq k_{A0}, \quad \forall q \in R^m \tag{5.2}$$

где $0 < k_{A0} < \infty$ – некоторая постоянная; аналогичные оценки имеют место для частных производных от ее элементов: $a_{0ij}(q)$ ($i, j = 1, \ldots, m$) – скалярных функций по их аргументам;

$$b_0(q, \dot{q}, t) = \dot{A}_0(q)\dot{q} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\dot{q}^* A_0(q)\dot{q})}{\partial q}\right]^* + Q_\Pi + Q_c \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered}Q_\Pi = Q_\Pi(q) = \left[\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}\right]^* = \mathrm{col}(Q_{\Pi 1}(q_1), \ldots, Q_{\Pi m}(q_m)) \\ Q_{\Pi i}(q_i) = \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, m\end{gathered} \tag{5.4}$$

$$|Q_\Pi(q)| \leq k_{Q\Pi}, \quad \forall q \in R^m \tag{5.5}$$

$$Q_c = Q_c(q, \dot{q}, t) = \Theta_c(q, t)\dot{q} \tag{5.6}$$

Q_Π – m-мерный вектор потенциальных сил, действующих на ИМ; $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия ИМ; $Q_{\Pi i}(q_i)$ – непрерывно дифференцируемые функции; $k_{Q\Pi} \geq 0$ – некоторая постоянная; Q_c – m-мерный вектор обобщенных сил (моментов) сопротивления, действующих на степени подвижности ИМ; $\bar{\Theta}_c(q, t) = (\Theta_c(q, t) + \Theta_c^*(q, t))/2$ – непрерывно дифференцируемая, симметричная, положительно определенная $(m \times m)$-матрица-функция; I_a – m-мерный вектор токов в якорных цепях ДПТ; $u = \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_m)$ – m-мерный вектор управлений – управляющих напряжений, подаваемых на якорные цепи ДПТ; $Q_u = \mathrm{col}(Q_{u1}, \ldots, Q_{um})$ – m-мерный вектор обобщенных сил (моментов), приложенных к степеням подвижности ИМ; J, k_0, k_M, L, R, k_e – диагональные матрицы электромеханических параметров ДПТ, являющихся положительными вещественными величинами; i_p, η_p – диагональные матрицы коэффициентов передачи и коэффициентов полезного действия редукторов; $\alpha = i_p q$, где α – m-вектор углов поворота валов двигателей.

Уравнения движения НУДС типа (5.1)–(5.6), записанные в отклонениях e, e_u (1.4):

$$\begin{gathered}
e = z - z_p = \mathrm{col}(e_1, e_2, e_3), \quad z = \mathrm{col}(q, \dot{q}, I_a), \quad z_p = \mathrm{col}(q_p, \dot{q}_p, I_{ap}) \\
(e_1 = q - q_p, e_2 = \dot{q} - \dot{q}_p, e_3 = I_a - I_{ap}), \quad z_p \in \Omega_{zp} \\
\Omega_{zp} = \{z_p = \mathrm{col}(q_p, \dot{q}_p, I_{ap}) \in R^{3m}\colon q_p \in R^m, \dot{q}_p \in R^m, \ I_{ap} \in R^m; \\
|\dot{q}_p(t)| \leq k_{z2p} < \infty, \quad |I_{ap}(t)| \leq k_{z3p} < \infty; \quad t \geq t_0\}; \ e_u = u - u_p
\end{gathered} \tag{5.7}$$

от их программных значений z_p, u_p (где $0 < k_{z2p} < \infty$, $0 \leq k_{z3p} < \infty$ – некоторые постоянные), представимы в виде системы (1.5)–(1.10), где $n = 3m$, $r = 3$ и

$$\begin{aligned}
&F_{e1}(e^2, t) = \dot{q} - \dot{q}_p = g_{e1}(e^1, t) + \bar{P}_{012}(t)e_2 \\
&(g_{e1}(e^1, t) = 0, \bar{P}_{012}(t) = A_1(t)B_1 = I_m, A_1(t) = B_1 = I_m) \\
&F_{e2}(e^3, t) = A^{-1}(q)(k_M I_a - b(q, \dot{q}, t)) - A^{-1}(q_p)(k_M I_{ap} - b(q_p, \dot{q}_p, t)) = \\
&= g_{e2}(e^2, t) + \bar{P}_{023}(e^1, t)e_3 \\
&g_{e2}(e^2, t) = A^{-1}(q)(k_M I_{ap} - b(q, \dot{q}, t)) - A^{-1}(q_p)(k_M I_{ap} - b(q_p, \dot{q}_p, t)) = \\
&= [A^{-1}(q) - A^{-1}(q_p)](-b(q_p, \dot{q}_p, t) + k_M I_{ap}) - A^{-1}(q)\Delta b(e_1, e_2, t) = \\
&= \Delta\bar{A}(e_1, t)(-b(q_p, \dot{q}_p, t) + k_M I_{ap}) - A^{-1}(q)\Delta b(e_1, e_2, t) \\
&\Delta\bar{A}(e_1, t) = A^{-1}(q) - A^{-1}(q_p) = A^{-1}(e_1 + q_p) - A^{-1}(q_p), \quad q = e_1 + q_p \qquad (5.8) \\
&\bar{P}_{023}(e^2, t) = A_2(e^1, t)B_2 = (Ji_p^2\eta_p + A_0(q))^{-1}\eta_p i_p k_M = A^{-1}(q)k_M \\
&A_2(e^1, t) = (Ji_p^2\eta_p + A_0(q))^{-1}, \quad B_2 = \eta_p i_p k_M
\end{aligned}$$

$$F_3(e, e_u, t) = L^{-1}(e_u - R(I_a - I_{ap}) - k_e i_p(\dot{q} - \dot{q}_p)) = g_{e3}(e^3, t) + \bar{P}_{034}(e^3, t)e_u$$

$$g_{e3}(e^3; t) = -L^{-1}(R(I_a - I_{ap}) + k_e i_p(\dot{q} - \dot{q}_p))$$

$$\bar{P}_{034}(e^2, t) = A_3(e^2, t)B_3 = L^{-1}, \quad A_3(e^2, t) = L^{-1}, \quad B_3 = I_m$$

$$A(q) = Ji_p + i_p^{-1}\eta_p^{-1}A_0(q) = i_p^{-1}\eta_p^{-1}(Ji_p^2\eta_p + A_0(q))$$

$$b(q, \dot{q}, t) = k_0 i_p \dot{q} + i_p^{-1}\eta_p^{-1}b_0(q, \dot{q}, t)$$

Здесь

$$|\Delta\bar{A}(e_1, t)| \le \bar{k}_{\Delta A}|e_1|, \quad \forall e_1 \in R^m, \quad t \ge t_0 \tag{5.9}$$

где $0 \le \bar{k}_{\Delta A} < \infty$ – некоторая постоянная; аналогичные оценки имеют место для частных производных от ее элементов: $\Delta\bar{a}_{ij}$ (e_1, t) $(i, j = 1, \ldots, m)$ – скалярных функций по их аргументам; $A_2(e^1, t)$ – симметричная, положительно определенная матрица-функция;

$$\begin{gathered} \Delta Q_{\Pi}(e_1, t) = Q_{\Pi}(e_1 + q_p) - Q_{\Pi}(q_p) \\ |\Delta Q_{\Pi}(e_1, t)| \le k_{\Delta Q\Pi}|e_1|, \quad \forall e_1 \in R^m, \quad t \ge t_0 \end{gathered} \tag{5.10}$$

$k_{\Delta Q\Pi} \ge 0$ – некоторая постоянная;

$$\begin{gathered} \Delta Q_c(e_1, e_2, t) = Q_c(q, \dot{q}, t) - Q_c(q_p, \dot{q}_p, t) = \\ = \Theta_c(q, t)\dot{q} - \Theta_c(q_p, t)\dot{q}_p = \Theta_c(e_1 + q_p, t)e_2 + \Delta\Theta_c(e_1, t)\dot{q}_p \\ \Delta\Theta_c(e_1, t) = \Theta_c(e_1 + q_p, t) - \Theta_c(q_p, t) \end{gathered} \tag{5.11}$$

$$|\Delta Q_c(e_1, e_2, t)| \le k_{\Delta Qc1}|e_1| + k_{\Delta Qc2}|e_2|, \quad \forall e_1, e_2 \in R^m, \quad t \ge t_0$$

$k_{\Delta Qc1} \ge 0$, $k_{\Delta Qc2} > 0$ – некоторые постоянные;

$$\Delta b(e_1, e_2, t) = b(q, \dot{q}, t) - b(q_p, \dot{q}_p, t) = k_0 i_p(\dot{q} - \dot{q}_p) +$$

$$+ i_p^{-1}\eta_p^{-1}(b_0(q, \dot{q}, t) - b_0(q_p, \dot{q}_p, t)) = k_0 i_p e_2 + i_p^{-1}\eta_p^{-1}\Delta b_0(e_1, e_2, t) \tag{5.12}$$

$$\Delta b_0(e_1, e_2, t) = b_0(e_1 + q_p, e_2 + \dot{q}_p, t) - b_0(q_p, \dot{q}_p, t) \tag{5.13}$$

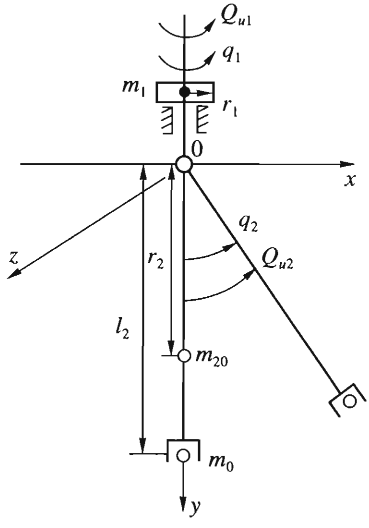
При учете соотношений (5.1)–(5.13) заключаем, что имеют место оценки

$$\begin{gathered} |\Delta b(e_1, e_2, t)| \le k_{\Delta b1}|e_1| + k_{\Delta b2}|e_2| + k_{\Delta b22}|e_2|^2 \\ |\Delta b_0(e_1, e_2, t)| \le k_{\Delta b01}|e_1| + k_{\Delta b02}|e_2| + k_{\Delta b022}|e_2|^2 \\ \forall e_1, e_2 \in R^m, \quad t \ge t_0 \end{gathered} \tag{5.14}$$

где $k_{\Delta bj} \ge 0$, $k_{\Delta b22} > 0$, $k_{\Delta b0j} \ge 0$, $k_{\Delta b022} > 0$ – некоторые постоянные.

Из соотношений (5.1)–(5.14) вытекает, что имеют место соотношения (1.11)–(1.15), и следовательно, НУДС (1.5), (5.1)–(5.14) относится к НУДС вида (1.5)–(1.14).

Пример. Рассмотрим электромеханический робот, ИМ которого – пространственный двухстепенной манипулятор [7], кинематическая схема которого изображена на фигуре. Здесь q_1, q_2 – обобщенные координаты ИМ – углы, образуемые соот-



ветствующими звеньями – степенями подвижности ИМ с осями неподвижной декартовой системы координат $Oxyz$; l_i, m_i – длина i-го звена и его масса; r_1 – радиус вала-шарнира первого звена – однородного цилиндра; r_2 – расстояние центра тяжести второго звена (с учетом массы груза m_0, находящегося в его схвате) до его оси вращения; Q_{ui} – момент нагрузки i-го звена ИМ; $i = 1, 2$; $m = 2$ – число степеней свободы (подвижности) ИМ.

В уравнении динамики ИМ такого робота (см. первое уравнение системы (5.1) и соотношения (5.3), (5.4), (5.6))

$$A_0(q) = \mathrm{diag}(2J_{01} + m_{20}r_2^2\sin^2 q_2, m_{20}r_2^2) \tag{5.15}$$

– диагональная (2 × 2)- матрица кинетической энергии ИМ, где $J_{01} = m_1 r_1^2/2$ – момент инерции первого звена ИМ относительно его продольной оси вращения, $m_{20} = m_2 + m_0$;

$$\Pi(q_2) = m_{20}\tilde{g}r_2(1 - \cos q_2) \tag{5.16}$$

– потенциальная энергия ИМ, где $\tilde{g}$ – ускорение силы тяжести;

$$\Theta_c = \mathrm{diag}(k_{BT1}, k_{BT2}) \tag{5.17}$$

– диагональная (2 × 2)- матрица, где $k_{BTi} > 0$ ($i = 1, 2$) – коэффициенты демпфирирования (вязкого трения).

Можно убедиться, что для описанного робота, уравнения динамики которого имеют вид (5.1)–(5.3), (5.7), (5.8), (5.15)–(5.17), справедливы оценки (5.2), (5.5), (5.9)–(5.14), из которых вытекает, что имеют место соотношения (1.10)–(1.15) и, следовательно, НУДС (5.1)–(5.3), (5.7), (5.8), (5.15)–(5.17) относится к НУДС вида (1.1), (1.5)–(1.15).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00250А) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ–2257.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.;Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
4. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
5. *Фурасов В.Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 248 с.
6. *Чеховой Ю.Н.* Приложение метода функций Ляпунова к некоторым квазилинейным задачам теории устойчивости регулируемых систем // Функции Ляпунова и их применение. Новосибирск: Наука, 1986. С. 146–158.
7. *Кулешов В.С., Лакота Н.А.* Динамика систем управления манипуляторами. М.: Энергия, 1971. 304 с.

Санкт-Петербург
e-mail: zyuko@mail.ru

Поступила в редакцию
28.X.2003