

УДК 539.375: 534.1

© 2005 г. А. О. Ватульяв, А. Н. Соловьев

**О РЕКОНСТРУКЦИИ ПЛОСКИХ ТРЕЩИН
В АНИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ**

Предлагаются два способа идентификации плоских трещин в анизотропной упругой среде, основанных либо на использовании функционала “невозвратности”, либо на неклассическом методе граничных интегральных уравнений и приводящих к решению некоторых трансцендентных уравнений. Рассмотрены примеры реконструкции прямолинейных трещин в квадратной области.

В задачах об идентификации трещин в упругих телах по полю на его поверхности основой получения разрешающих операторных уравнений, как правило, служат разные варианты метода граничных интегральных уравнений (ГИУ). На основе подходов метода ГИУ можно сформулировать системы нелинейных операторных уравнений, которые решаются путем привлечения итерационных схем [1–3]. В последние годы интенсивно стали развиваться подходы к идентификации трещин, основанные на функционале “невозвратности” (для уравнения Лапласа при регистрации тепловых или электрических полей) и априорной информации о том, что трещина (или система трещин) расположена в некоторой плоскости [4–7]. Наличие такой априорной информации значительно упрощает процедуру реконструкции трещин и для определения параметров плоскости приводит либо к системе трансцендентных уравнений, либо к проблеме минимизации некоторого неквадратичного функционала невязки. Отметим, что расчет волновых полей в упругих телах, опирающийся на теорему взаимности, интенсивно развивается в последние годы [8, 9].

Ниже рассмотрены два способа определения расположения плоскости с трещинами: первый связан с формулировкой функционала “невозвратности” и выбором пробных решений, второй основан на неклассических ГИУ для анизотропных тел с трещинами, обобщающий полученные ранее результаты [10–12] для тел без дефектов.

1. Постановка задачи. Пусть упругое тело, занимающее конечную односвязную область V с границей S , совершает установившиеся колебания с круговой частотой ω , причем тело ослаблено системой трещин

$$\Gamma = \bigcup_{p=1}^M \Gamma_p \quad (\Gamma_p = \Gamma_p^+ \cup \Gamma_p^-)$$

которые моделируются разрезами, расположенными в сечении S_c области V некоторой поверхностью Π .

Уравнения установившихся колебаний имеют вид [13]

$$\sigma_{ij,j} = -\rho\omega^2 u_i, \quad \sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}, \quad i = 1, 2, 3, \quad x \in V \setminus \Gamma \tag{1.1}$$

Будем считать, что в прямой задаче на внешней границе S задан вектор напряжений, а берега трещин не взаимодействуют между собой в процессе колебаний

$$t_i|_S = \sigma_{ij} n_j|_S = \phi_i, \quad t_i|_{\Gamma_p^\pm} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, M \tag{1.2}$$

При постановке обратной задачи, в которой определению подлежит уравнение поверхности Π и геометрия трещин, будем считать, что на границе S известны все компоненты вектора перемещений

$$u_i|_S = \Psi_i, \quad (1.3)$$

Замечание. В принципе для решения обратной задачи достаточно знать поле перемещений на части границы, а для продолжения поля на всю границу тела использовать методику, предложенную ранее [14–16].

2. Регистрация трещин. Трещины в теле могут быть обнаружены по несогласованности между граничными волновыми полями напряжений и смещений для тела с дефектами и без них. В качестве меры этой несогласованности введем в рассмотрение линейный функционал

$$F(\underline{u}^*, \omega) = G(\phi, \psi, \underline{u}^*) = \int_S (\psi_i \phi_i^* - \psi_i^* \phi_i) dS \quad (2.1)$$

на множестве пробных решений u_i^* , удовлетворяющих уравнениям движения в области V без трещин

$$\sigma_{ij,j}^* = -\rho \omega^2 u_i^*, \quad \sigma_{ij}^* = c_{ijkl} u_{k,l}^* \quad i = 1, 2, 3, \quad \underline{x} \in V \quad (2.2)$$

где ψ_i^* , ϕ_i^* – компоненты вектора смещений и вектора напряжений пробного решения на границе S :

$$u_1^*|_S = \psi_i^*, \quad t_i^*|_S = \sigma_{ij}^* n_j|_S = \phi_i^* \quad * \quad (2.3)$$

Заметим, что в качестве таких решений могут быть использованы плоские волны в неограниченной упругой среде.

Применяя теорему взаимности [13], можно показать, что

$$\int_{\Gamma^+} \chi_i q_i^* dS = G(\phi, \psi, \underline{u}^*) = F(\underline{u}^*, \omega) \quad (2.4)$$

где $\chi_i = u_i|_{\Gamma^+} - u_i|_{\Gamma^-}$ – скачки перемещений на трещинах, $q_i^*|_{\Gamma^+} = \sigma_{ij}^* n_j|_{\Gamma^+}$ – компоненты вектора пробных напряжений на берегах трещин.

В случае, когда трещины отсутствуют, функционал $F(\underline{u}^*, \omega)$ тождественно равен нулю, так как соотношение (2.4) превращается в известное соотношение взаимности. Отметим, что функционал (2.1) в постановке настоящей работы, когда поля смещений и напряжений известны на всей границе тела, может быть вычислен для любого пробного поля. Таким образом, зная точность измерения граничных полей и точность вычисления интеграла (2.1), по отклонению функционала от нулевого значения можно судить о наличии или отсутствии трещин в теле. Наиболее просто решается обратная задача в случае априорной информации о том, что поверхность Π представляет собой плоскость.

3. Выбор пробных решений и определение плоскости Π .

Анизотропное упругое тело. Из равенства (2.4) при соответствующем выборе пробных решений, обладающих достаточным функциональным произволом, может быть получена система интегральных уравнений для нахождения скачков перемещений на трещинах. Первый этап этой процедуры – определение плоскости Π , которая может быть задана тремя независимыми параметрами (например, двумя углами Эйлера и расстоянием c до начала координат). Пробные решения необходимо выби-

рять таким образом, чтобы параметры, характеризующие плоскость П, находились наиболее просто, причем один из способов такого выбора приводит к исключению неизвестных скачков перемещений.

Для этого введем новую систему координат $O\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3$, в которой уравнение плоскости П имеет вид $\mathbf{X}_3 = c$. Положение такой системы координат относительно исходной определяется двумя углами φ и θ , причем угол φ задает поворот вокруг оси Ox_3 , угол θ – вокруг оси $O\mathbf{X}_1$.

Обозначим через U_i и U_i^* ($i = 1, 2, 3$) соответственно компоненты векторов – решения краевой задачи (1.1), (1.2) и пробного решения (2.2), (2.3) в новой системе координат. Левая часть соотношения (2.4) в принятых обозначениях примет вид

$$\int_{\Gamma^+} \chi_i q_i^* dS = \int_{\Gamma^+} \mathbf{X}_i Q_i^* dS \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{X}_i = U_i|_{\Gamma^+} - U_i|_{\Gamma^-}, \quad Q_i^* = \sigma_{\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_3}^* \tag{3.2}$$

В качестве пробных решений выберем систему функций, представляющих собой волны, распространяющиеся вдоль оси \mathbf{X}_3 ,

$$U_k^* = A_k \exp(i\alpha \mathbf{X}_3) \tag{3.3}$$

Подставляя выражения (3.3) в уравнения (2.2), из условия существования ненулевых пробных решений для волнового параметра α получим известное уравнение Кристоффеля [13], которое имеет три пары решений – действительных многообразий (среди которых могут встречаться и кратные значения)

$$\alpha_j^\pm = \pm \alpha_j(c_{iklm}, \varphi, \theta), \quad j = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

соответствующих разным типам волн, распространяющихся в бесконечной упругой анизотропной среде. Подстановка соответствующего набора из шести решений (3.3), (3.4) в соотношение (2.4) приводит к системе шести алгебраических уравнений относительно φ, θ, c и I_1, I_2, I_3

$\left(I_i = \int_{\Gamma^+} \mathbf{X}_i dS \right)$, в которую величины I_i входят линейно, что

позволяет их исключить и получить три трансцендентных уравнения относительно параметров плоскости П.

Изотропное упругое тело. Для изотропной среды эта совокупность шести решений имеет достаточно простой вид, отвечающих продольной и двум поперечным волнам

$$\begin{aligned} \underline{U}^{*1} &= (\cos k_2 \mathbf{X}_3, 0, 0), & \underline{U}^{*2} &= (\sin k_2 \mathbf{X}_3, 0, 0) \\ \underline{U}^{*3} &= (0, \cos k_2 \mathbf{X}_3, 0), & \underline{U}^{*4} &= (0, \sin k_2 \mathbf{X}_3, 0) \\ \underline{U}^{*5} &= (0, 0, \cos k_1 \mathbf{X}_3), & \underline{U}^{*6} &= (0, 0, \sin k_1 \mathbf{X}_3) \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $k_1 = \sqrt{\rho\omega^2/(\lambda + 2\mu)}$, $k_2 = \sqrt{\rho\omega^2/\mu}$ – соответственно продольное и поперечное волновые числа. Векторы пробных напряжений в сечении S_c соответственно имеют вид

$$\underline{Q}^{*1} = (-\mu k_2 \sin k_2 c, 0, 0), \quad \underline{Q}^{*2} = (\mu k_2 \cos k_2 c, 0, 0)$$

$$\underline{Q}^{*3} = (0, -\mu k_2 \sin k_2 c, 0), \quad \underline{Q}^{*4} = (0, \mu k_2 \cos k_2 c, 0) \quad (3.6)$$

$$\underline{Q}^{*5} = (0, 0, -(\lambda + 2\mu)k_1 \sin k_1 c), \quad \underline{Q}^{*6} = (0, 0, -(\lambda + 2\mu)k_1 \cos k_1 c)$$

Подставляя выражения (3.6) в соотношения (2.4), получим шесть уравнений относительно шести неизвестных $\varphi, \theta, c, I_1, I_2, I_3$

$$\begin{aligned} -I_1 \mu k_2 \sin k_2 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*1}), & I_1 \mu k_2 \cos k_2 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*2}) \\ -I_2 \mu k_2 \sin k_2 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*3}), & I_2 \mu k_2 \cos k_2 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*4}) \\ -I_3 (\lambda + 2\mu) k_1 \sin k_1 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*5}), & I_3 (\lambda + 2\mu) k_1 \cos k_1 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*6}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Считая, что I_1, I_2, I_3 не равны нулю, сведем систему (3.7) к трем уравнениям относительно φ, θ, c , определяющим плоскость Π ,

$$F_{12}(\varphi, \theta) - F_{34}(\varphi, \theta) = 0 \quad (3.8)$$

$$\operatorname{tg} k_2 c = F_{34}(\varphi, \theta), \quad \operatorname{tg} k_1 c = F_{56}(\varphi, \theta) \quad (3.9)$$

где

$$F_{ij}(\varphi, \theta) = -G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*i}) / G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*j})$$

Плоская деформация изотропного упругого тела. В случае плоской деформации (в плоскости Ox_2x_3) положение плоскости Π определяется углом θ и расстоянием c . Эти параметры вместе с интегральными скачками I_2, I_3 связаны четырьмя уравнениями вида (3.7), которые после исключения параметров I_2, I_3 приводятся к системе уравнений вида (3.9) при $\varphi = 0$.

Если d – диаметр сечения (в плоскости Ox_2x_3) области V , то для частот колебаний

$$f = \frac{\omega}{2\pi} < \frac{1}{4d} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

эта система сводится к одному уравнению

$$\operatorname{arctg} F_{34}(0, \theta) - \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \operatorname{arctg} F_{56}(0, \theta) = 0, \quad \theta \in [0, \pi] \quad (3.10)$$

после решения которого расстояние c находится по одной из формул

$$c = k_1^{-1} \operatorname{arctg} F_{56}(0, \theta) \quad \text{или} \quad c = k_2^{-1} \operatorname{arctg} F_{34}(0, \theta) \quad (3.11)$$

4. Определение плоскости c помощью ГИУ 1-го рода.

Сведение краевой задачи (1.1), (1.2) к ГИУ 1-го рода. Для конечных изотропных тел был предложен [10] способ формулировки систем ГИУ 1-го рода с гладкими ядрами для трещиноватых тел, не требующий знания фундаментальных решений оператора теории упругости. Этот подход был распространен [11, 12] на конечные анизотропные тела без дефектов. Обобщим этот результат на случай анизотропного тела с трещиной или системой трещин, расположенных на некоторой поверхности.

В рамках подхода теории дислокаций [13] задача (1.1), (1.2) эквивалентна краевой задаче для сплошного тела V с массовыми силами

$$f_i = -(c_{ijkl} n_k \chi_l \delta(\zeta))_{,j}$$

сосредоточенными на поверхности Γ , n_k – компоненты вектора нормали к поверхности Γ , $\delta(\zeta)$ – дельта-функция Дирака, ζ – координата, отсчитываемая по нормали к Γ .

Умножим уравнения движения на $e^{i(\alpha, x)}$ где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, и проинтегрируем по V . Используя теорему Гаусса – Остроградского, для нахождения трансформант Фурье

$$\tilde{u}_k(\alpha) = \int_V u_k(x) e^{i(\alpha, x)} dV_x$$

имеем следующую систему уравнений:

$$A_{sk}(\alpha)\tilde{u}_k = (c_{sjkl}\alpha_j\alpha_l - \rho\omega^2\delta_{sk})\tilde{u}_k(\alpha) = F_s(\alpha) + W_s(\alpha) \tag{4.1}$$

где

$$F_s(\alpha) = \int_S (\sigma_{sj}n_j - i\alpha_j c_{sjkl}u_k n_l) e^{i(\alpha, x)} dS_x \tag{4.2}$$

$$W_s(\alpha) = -i\alpha_j c_{sjkl} \int_{\Gamma} n_k^0 \chi_l e^{i(\alpha, x)} dS_x$$

Разрешив систему (4.1) относительно трансформант \tilde{u}_k , получим

$$\tilde{u}_k(\alpha) = \frac{p_{ks}(\alpha)(F_s(\alpha) + W_s(\alpha))}{p_0(\alpha)}, \quad p_0(\alpha) = \det A \tag{4.3}$$

Здесь $p_{ks}(\alpha)$ – компоненты присоединенной по отношению к $A = \{A_{ks}\}$ матрице. Отметим, что $p_0(\alpha)$ – полином шестой степени, $p_{ks}(\alpha)$ – полином четвертой степени относительно α , а $p_0(\alpha) = 0$ – уравнение Кристоффеля, имеющее три корня

$$\gamma = |\alpha| = k\zeta_m(\eta), \quad m = 1, 2, 3, \quad (|\eta| = 1, k = \omega(c_{3333}/\rho)^{-1/2})$$

соответствующие трем поверхностям, которые в дальнейшем будем считать различными (хотя это ограничение выполняется не всегда; например, оно не выполняется в изотропном случае, когда две из поверхностей совпадают).

Трансформанты Фурье $\tilde{u}_k(\alpha)$ в силу представления (4.3) – мероморфные функции, однако, с другой стороны, известно, что преобразование Фурье функции из $L_p(V)$, $p > 1$ функция целая. Таким образом, необходимо потребовать обращения в нуль числителя правой части равенства в (4.3) на множествах

$$\alpha^{(m)}(\eta) = k\zeta_m(\eta)\eta, \quad m = 1, 2, 3$$

что приводит к системе разрешающих уравнений, из которых независимыми являются три, например следующие:

$$p_{1s}(\alpha^{(m)}(\eta))(F_s(\alpha^{(m)}(\eta)) + W_s(\alpha^{(m)}(\eta))) = 0; \quad |\eta| = 1, \quad m = 1, 2, 3 \tag{4.4}$$

Равенства (4.4) можно трактовать как систему граничных уравнений, связывающих граничные смещения и напряжения со скачками смещений на трещине. Отметим, что эта система уравнений пригодна для осуществления процедуры реконструкции плоских трещин.

Определение плоскости П. Считая известными все компоненты вектора смещений и вектора напряжений на всей внешней границе тела, определенные в соотношениях (1.2), (1.3), операторы $F_s(k\zeta_m(\eta)\eta)$ можно вычислить для любого единичного

вектора η . Таким образом, из уравнений (4.4) необходимо определить скачки χ_l и носитель трещины – поверхность Γ . В случае, когда имеется априорная информация о том, что Γ – плоская область ($\Gamma \subset \Pi$), то можно составить уравнения для определения параметров, характеризующих плоскость Π , не находя самих скачков χ_l .

Пусть $x = c\eta_0 + \eta_1 t_1 + \eta_2 t_2$ – параметрическое уравнение плоскости Π , причем

$$|\eta_0| = |\eta_1| = |\eta_2| = 1, \quad (t_1, t_2) \in D, \quad (\eta_0, \eta_1) = (\eta_0, \eta_2) = 0, \quad n^0 = \eta_0$$

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} G_m(\eta, t_1, t_2) &= (\alpha^{(m)}(\eta), x) = k\zeta_m(\eta)(\eta, c\eta_0 + \eta_1 t_1 + \eta_2 t_2) = \\ &= k\zeta_m(\eta)[c(\eta, \eta_0) + t_1(\eta, \eta_1) + t_2(\eta, \eta_2)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Полагая здесь $\eta = \eta_0$, находим, что

$$G_m(\eta_0, t_1, t_2) = k\zeta_m^0 c, \quad \zeta_m^0 = \zeta_m(\eta_0)$$

и не зависит от t_1, t_2 . Таким образом, обозначая

$$\int_D \chi_l(x(t)) dt_1 dt_2 = Y_l$$

из соотношений (4.4) получим, что

$$W_s(k\zeta_m^0 \eta_0) = -ik\zeta_m^0 c_{sjkl} \eta_{0j} \eta_{0k} \exp[i\vartheta_m^0] Y_l, \quad \vartheta_m^0 = k\zeta_m^0 c$$

Для нахождения Y_l получим линейную алгебраическую систему

$$\sum_{l=1}^3 D_{lm} Y_l = b_m \quad (4.6)$$

$$D_{lm} = ikp_{1s}(k\zeta_m^0 \eta_0) \zeta_m^0 c_{sjkl} \eta_{0j} \eta_{0k}, \quad b_m = \exp[-i\vartheta_m^0] p_{1s}(k\zeta_m^0 \eta_0) F_s(k\zeta_m^0 \eta_0)$$

Учитывая, что Y_l вещественны, а D_{lm} – чисто мнимые величины, получим систему трех трансцендентных уравнений для определения компонент единичного вектора η_0 и постоянной c

$$\operatorname{Re}(b_m) = 0, \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.7)$$

Плоская деформация ортотропного тела. Приведем вид уравнений для определения η_0 в случае плоской деформации ортотропного тела с границей L (в плоскости Ox_1x_3). Соответствующие операторы и кривые $\zeta_m^0 = \zeta_m(\eta_0)$ ($m = 1, 2$) приведены в [12]. Введем в рассмотрение угол φ_0 такой, что $\eta_0 = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$. Тогда, вводя обозначение $\xi_m^0(x) = (\eta_0, x)k\zeta_m^0$ и учитывая свойство $p_{ij}(ky) = k^2 p_{ij}(y)$, находим

$$F_j(k\zeta_m^0 \eta_0) = \int_L [t_j(x) - ik\zeta_m^0 a_{jk}^0 u_k(x)] \exp[i\xi_m^0(x)] dl_x, \quad j = 1, 3; \quad m = 1, 2$$

где

$$t_j(x) = \sigma_{jk} n_k / c_{33}, \quad a_{jk}^0 = a_{jk}(\eta_0, n)$$

$$a_{11}^0 = \gamma_1 n_1 \sin \varphi_0 + \gamma_5 n_3 \cos \varphi_0, \quad a_{13}^0 = \gamma_5 n_1 \sin \varphi_0 + \gamma_7 n_3 \cos \varphi_0$$

$$a_{31}^0 = \gamma_7 n_1 \sin \varphi_0 + \gamma_5 n_3 \cos \varphi_0, \quad a_{33}^0 = \gamma_5 n_1 \cos \varphi_0 + n_3 \sin \varphi_0$$

$$p_{11}(\zeta_m^0 \eta_0) = (\gamma_5 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)(\zeta_m^0)^2 - 1$$

$$p_{13}(\zeta_m^0 \eta_0) = -(\gamma_5 + \gamma_7) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 (\zeta_m^0)^2$$

(γ_j – безразмерные упругие постоянные), а система двух уравнений вида (4.7) для нахождения φ_0 и c приобретает вид

$$p_{1s}(\zeta_m^0 \eta_0) \int_L [t_s(x) \cos(\xi_m^0(x) - \vartheta_m^0) + k \zeta_m^0 a_{sk}^0 u_k(x) \sin(\xi_m^0(x) - \vartheta_m^0)] dl_x = 0, \quad m = 1, 2 \quad (4.8)$$

5. Численные эксперименты. В качестве примера применения, предложенного в заключительной части разд. 3 метода определения расположения трещины (пример 1) и примера использования системы (4.8) (пример 2) рассматривались установившиеся колебания с частотой $f = 1.0$ кГц квадрата со стороной 0.1 м в условиях плоской деформации, ослабленного прямолинейной трещиной. Для решения прямой задачи использовался конечноэлементный комплекс ACELAN [17], в расчетах конечно-элементная сетка искусственно сгущалась в окрестности вершин трещины, общее количество узлов равнялось 1181 в примере 1 и 1550 в примере 2. На сторонах квадрата, кроме узлов в его вершинах, было выбрано по 9 внутренних узлов, равноотстоящих друг от друга. Найденные смещения в этих узлах моделировали процесс измерения граничных полей. При вычислении функционала (2.4) сомножители подынтегральных функций интерполировались непрерывными кусочно-линейными функциями.

Пример 1. Определение трещины в изотропном квадрате. Координаты концов трещины $A(0.02; 0.06)$, $B(0.04; 0.08)$ (фиг. 1, а). Материал квадрата – сталь. На нижней и верхней сторонах квадрата задавалась уравновешенная нагрузка в виде нормального напряжения (равномерно распределенного с интенсивностью $Q_0 = 10^3$ Н/м и изменяющегося по линейному закону от нуля до Q_0), боковые стороны свободны от нагрузок.

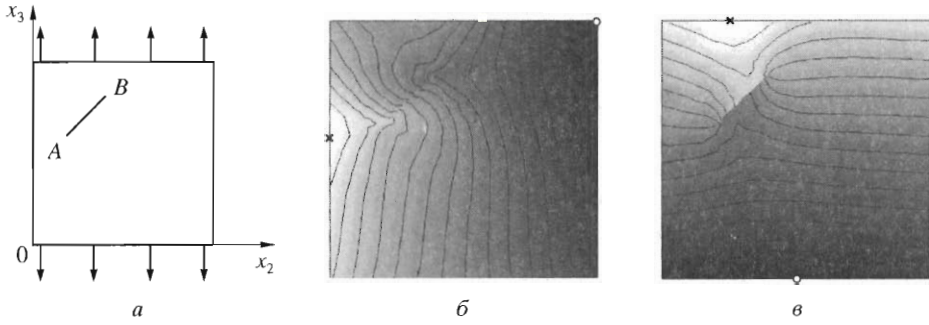
На фиг. 1, б, в на недеформированном состоянии области представлены распределения (с сеткой изолиний) амплитудных значений компонент вектора смещений: компоненты u_2 (фиг. 1, б), причем максимальное значение амплитуды, равное 1.15×10^{-9} м и отмеченное крестиком, соответствует светлому фону, а минимальное значение, равное -1.06×10^{-9} м и отмеченное светлой точкой, соответствует темному фону и компоненты u_3 (фиг. 1, в), причем максимальное значение равно 2.98×10^{-9} м, минимальное равно -2.45×10^{-9} м.

Отметим, что в результате численного решения нелинейного уравнения (3.10) было найдено несколько его корней, и для отбора единственного решения необходимо было либо анализировать исходную систему в некотором наборе частот, либо изменить характер нагрузки (равномерное распределение напряжений заменялось линейным распределением). В численном эксперименте изучалось влияние размера дефекта на относительные погрешности определения угла θ и расстояния c

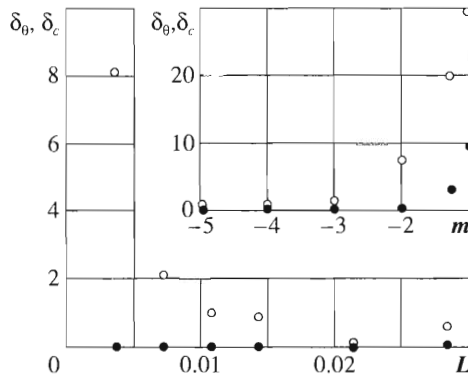
$$\delta_\theta = [(\theta_0 - \theta_n)/\theta_0] \times 100\%, \quad \delta_c = [(c_0 - c_n)/c_0] \times 100\%$$

где $\theta_0 = \pi/4$ и $c_0 = 0.04 \sqrt{2}$ м – точные значения, θ_n и c_n – найденные значения параметров.

В левой и нижней частях фиг. 2 светлыми точками отмечены значения δ_c при изменении длины трещины L от 0.0035 до 0.0283 м, при этом значения δ_θ (темные точки) по модулю не превышают 1%.



Фиг. 1



Фиг. 2

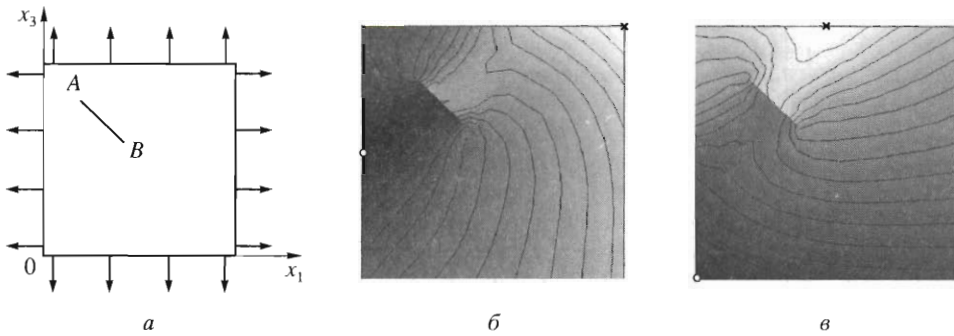
Проверка устойчивости алгоритма восстановления трещины к случайным ошибкам входных данных моделировалась псевдослучайными возмущениями амплитуд “измеренных” величин таким образом, что

$$\tilde{u}_i(x_{(k)}) = u_i(x_{(k)})(1 + (2R_k - 1)\epsilon)$$

где возмущенные значения отмечены тильдой, k – номер точки на границе, в которой проводятся “измерения”, R_k – равномерно распределенная на интервале $(0,1)$ случайная величина, $\epsilon = 10^m$ – малый параметр. В правой верхней части фиг. 2 представлены зависимости погрешностей δ_c и δ_θ при изменении показателя m от -5 до -1 ; видно, что порядок ошибки восстановления не превышает порядка ошибки входных данных.

Пример 2. Определение трещины в ортотропном квадрате. Координаты трещины $A(0.02; 0.08)$, $B(0.04; 0.06)$ (фиг. 3, а). Материал квадрата – аустенитная сталь [12] На всех сторонах квадрата задавалась уравновешенная нагрузка в виде равномерно распределенного нормального напряжения с интенсивностью $Q_0 = 10^4$ Н/м.

На фиг. 3, б, в на недеформированном состоянии области представлены распределения (с сеткой изолиний) амплитудных значений компонент вектора смещений: компоненты u_1 (фиг. 3, б), причем максимальное значение амплитуды, равное 1.68×10^{-9} м и отмеченное крестиком, соответствует светлому фону, а минимальное значение, равное -1.72×10^{-9} м и отмеченное светлой точкой, соответствует темному фону, и ком-



Фиг. 3

поненты u_3 (фиг. 3, в), причем максимальное значение равно 2.38×10^{-9} м, минимальное равно -2.29×10^{-9} м.

В результате численного решения нелинейной системы уравнений (4.8) было найдено несколько его решений, причем для однозначного определения истинного решения и фильтрации “фантомных” решений необходимо было или изменить характер нагрузки (боковые стороны освободить от напряжений), или проводить численный эксперимент в некотором наборе частот. Погрешность найденных значений угла и расстояния при $\varphi_0 = \pi/4$ и $c = 0.05\sqrt{2}$ м не превысила 1%.

Проверка устойчивости алгоритма восстановления трещины к ошибкам входных данных привела к результатам, аналогичным данным для примера 1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01124) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-2113.2003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanaka M., Nakamura M., Yamagiwa K. Application of boundary element method for elastodynamics to defect shape identification // *Math. Comput. Modeling* 1991. V. 15. № 3–5. P. 295–302.
2. Kress R. Inverse elastic scattering from a crack // *Inverse Problems*. 1996. V. 12. № 5. P. 667–684.
3. Ватульян А.О. Об определении конфигурации трещины в анизотропной среде // *ПММ*. 2004. Т. 68. Вып. 1. С. 180–188.
4. Andrieux S.B., Abda A. Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // *Inverse Problems*. 1996. V. 12. № 5. P. 553–563.
5. Bannour T.B., Abda A., Jaoua M. A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks // *Inverse Problems*. 1997. V. 13. № 4. P. 899–917.
6. Alves C.J.S., Ha Duong T. Inverse scattering for elastic plane cracks // *Inverse Problems*. 1999. V. 15. № 1. P. 91–97.
7. Ватульян А.О., Баранов И.В., Гусева И.А. Идентификация трещиноподобного дефекта в ортотропном слое // *Дефектоскопия*. 2001. № 10. С. 48–52.
8. Achenbach J.D. Calculation of wave fields using elastodynamic reciprocity // *Intern. J. of Solids and Structures*. 2000. V. 37. № 46/47. P. 7043–7053.
9. Achenbach J.D. *Reciprocity in Elastodynamics*. // Cambridge: Univ. Press, 2003. 266 p.
10. Бабешко В.А. К проблеме исследования динамических свойств трещиноватых тел // *Докл. АН СССР*. 1989. Т. 304. № 2. С. 318–321.
11. Ватульян А.О. О граничных интегральных уравнениях 1^{го} рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // *Докл. РАН*. 1993. Т. 333. № 3. С. 312–314.

12. Ватульян А.О., Садчиков Е.В. О новой формулировке граничных интегральных уравнений в задачах о колебаниях анизотропных тел // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С.78–84.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
14. Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 1. С. 64–74.
15. Weigl W., Andra H., Schnack E. An alternating iterative algorithm for the reconstruction of internal cracks in a three-dimensional solid body // Inverse Problems. 2001. V. 17. № 6. P. 1957–1975.
16. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. Восстановление поля в анизотропной упругой среде // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 4. С. 451–455.
17. Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 491–501.

Ростов-на-Дону
e-mail: soloviev@math.rsu.ru

Поступила в редакцию
1.VII.2003