УДК 539.375

© 2005 г. С. А. Назаров

ТРЕЩИНА НА СТЫКЕ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ. СИНГУЛЯРНОСТИ УПРУГИХ ПОЛЕЙ И КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ КОНТАКТЕ БЕРЕГОВ

Критерий В.В. Новожилова хрупкого квазистатического разрушения применяется для определения угла отклонения отростка трещины с сомкнутыми берегами на стыке двух анизотропных тел. Исследуется асимптотика упругих полей вблизи вершины трещины и приводятся следствия критерия Новожилова в асимптотической формулировке. Обсуждаются нормировки сингулярных решений, приспособленные к силовым и деформационным критериям разрушения. В частности, установлено, что при общей анизотропии отсутствует осцилляция берегов, которая может появляться при решении линейной задачи для раскрытой трещины.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоское составное тело $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, каждая из частей которого однородная и анизотропная. На линии соединения $\Upsilon^0 = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$, лежащей на оси x_1 декартовых координат $x = (x_1, x_2)$, имеется трещина-отрезок M^0, для определенности краевая. Начало координат O совместим с вершиной трещины и обозначим (r, φ) полярные координаты с полярной осью, направленной вдоль продолжения трещины, т.е. $r = |x|$ и $\varphi \in (-\pi, \pi)$. На отрезке $\Gamma^0 = \Upsilon^0 \setminus \overline{M^0}$ предполагаем полное сцепление материалов: непрерывны вектор смещений $u^\pm = (u_1^\pm, u_2^\pm)$ и вектор нормальных напряжений $\sigma^{(2)\pm} = (\sigma_{21}^\pm, \sigma_{22}^\pm)$.

Известно (см. [1–9] и др.), что степенные решения (поля смещений)

$$U(x) = r^\Lambda \Phi(\varphi) \tag{1.1}$$

модельной задачи о составной плоскости с полубесконечным разрезом, описывающие поведение упругих полей вблизи вершины раскрытой трещины, могут иметь комплексные показатели $\Lambda = \pm i\gamma + 1/2$, $\gamma > 0$. В этом случае решение линейной задачи теории упругости характеризуется взаимным проникانием берегов трещины при любых знаках коэффициентов интенсивности напряжений (КИН), что затрудняет его физическую интерпретацию и указывает на необходимость полного решения (нелинейной) задачи Синьорини, включающей постановку односторонних связей и позволяющей определить контактное множество, неизвестное заранее. Однако имеются и другие подходы к устранению упомянутого противоречия. Первый подход [10, 11] игнорирует взаимопроникание берегов, так как согласно расчетам во многих случаях оно локализовано в весьма малой окрестности вершины, вдали от которой отклонение от решения контактной задачи незначительно. Второй подход [12–14] также сохраняет линейные определяющие соотношения, но искусственно вводит зону контакта в устье трещины и предлагает методику вычисления длины этой зоны для нескольких конкретных задач о составной изотропной плоскости с разрезом. В данной статье рассматривается аналогичная ситуация, а именно предполагается, что в устье берега трещины налегают один на другой, однако предмет исследования – сингулярности упругих полей и их влияние на квазистатический процесс разрушения.

Для ответа на многие из сопутствующих вопросов достаточно изучить модельную задачу о составной плоскости с полубесконечным разрезом $M = \{x : x_1 \le 0, x_2 = 0\}$, т.е.

$$-\partial_1\sigma^{\pm}_{1k}(u^{\pm}; x) - \partial_2\sigma^{\pm}_{2k}(u^{\pm}; x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2_{\pm} = \{x: \pm x_2 > 0\} \tag{1.2}$$

$$u^{+}_k(x_1, 0) = u^{-}_k(x_1, 0), \;\; \sigma^{+}_{2k}(u^{+}; x_1, 0) = \sigma^{-}_{2k}(u^{-}; x_1, 0), \;\; x_1 \in \mathbb{R}^1_{+} = (0, +\infty); \;\; k = 1, 2 \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} u^{+}_2(x_1, 0) = u^{-}_2(x_1, 0), \;\; \sigma^{+}_{22}(u^{+}; x_1, 0) = \sigma^{-}_{22}(u^{-}; x_1, 0), \;\; \sigma^{\pm}_{12}(u^{\pm}; x_1, 0) = 0, \\ x_1 \in \mathbb{R}^1_{-} = (-\infty, 0) \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь

$$\sigma^{\pm}(u^{\pm}) = A^{\pm}\varepsilon(u^{\pm}) \tag{1.5}$$

$\sigma^{\pm}_{jk}$ – декартовы компоненты тензоров напряжений $\sigma^{\pm}$, $A^{\pm}$ – тензоры упругих модулей, постоянные и обладающие обычными свойствами положительности и симметричности, $\varepsilon(u)$ – тензор деформаций с компонентами $\varepsilon_{jk}(u) = (\partial_j u_k + \partial_k u_j)/2$, а $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ($j = 1, 2$). Если $A^{+} = A^{-}$ в законе Гука (1.5), то плоскость оказывается однородной и условия полного сцепления (1.3) можно опустить. Соотношения (1.4) означают, что берега $M_{\pm}$ полубесконечной трещины контактируют без трения. Подчеркнем, что в апостериорной проверке нуждается следующее условие "сжимающих напряжений", придающее физический смысл решению задачи (1.2)–(1.4):

$$\sigma^{+}_{22}(u^{+}; x_1, 0) = \sigma^{-}_{22}(u^{-}; x_1, 0) \le 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}^1_{-} \tag{1.6}$$

В разд. 2 определяются показатели возможных степенных решений (целые и полуцелые – вещественные, т.е. осцилляции сомкнутых берегов при нагружении не происходит, впрочем, она не противоречит постановке задачи), а также находится число линейно независимых решений (1.1) с одинаковыми показателями. В разд. 3 обсуждаются нормировки сингулярных решений, проверяется, что основная сингулярность напряжений для трещины в однородной плоскости удовлетворяет физическому условию (1.6) (левая часть равна нулю), и высказывается гипотеза об условиях его справедливости в случае составной плоскости. Разд. 4 и 5 посвящены применению критерия разрушения, предложенного В.В. Новожиловым [15].

Поясним причины выбора именно этого критерия. Введение времениподобного параметра нагружения, необходимое изначально для формулировки задачи *квазистатического* разрушения, требует *апостериорного* анализа формы вновь образовавшейся свободной поверхности. Таким образом, ввиду постулируемого соприкосновения берегов модельную задачу о трещине с малым отростком следует решать в полной формулировке, допуская расхождение берегов магистральной трещины и контакт берегов отрезка. Требуется явное решение или детальная информация о нем, к настоящему времени недоступные. Методы [16] анализа задач Синьорини для тел с трещинами и формулы [17, 18] для приращения потенциальной энергии деформации вследствие прямолинейного распространения трещины с контактирующими берегами не позволяют определить угол отклонения отростка трещины. Более того, из дальнейших результатов вытекает, что для изотропного тела сдвиговое нагружение, порождающее сингулярности напряжений в вершине, приводит к излому трещины, но при нормальном нагружении, побуждающем к прямолинейному развитию трещины, напряжения остаются ограниченными, а главный член приращения энергии [17, 18] становится нулевым.

Критерий Новожилова остается *априорным* даже после введения времениподобного параметра, и это его свойство используется для определения искомого угла и предсказания возможности ветвления. Кроме того, из асимптотической формулировки [19] критерия вытекают известные критерии максимальных разрывающих напряжений и отсутствия касательных напряжений (см. разд. 5).

2. Степенные решения. При произвольной анизотропии прямое вычисление показателей Λ в формулах (1.1) вряд ли возможно. Предложен подход [20] (см. также [21], гл. 7 и [22], § 7), позволяющий для широкого класса самосопряженных эллиптических краевых задач определять показатели Λ всех возможных степенных решений (1.1) (но не их угловые части Φ). Разработанный первоначально для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, он затем был приспособлен [9] к случаю кусочно постоянных коэффициентов со скачками на продолжении трещины. В итоге было установлено, что показатели Λ либо являются целыми $\Lambda = m$, либо имеют вид $\Lambda = i\gamma_n + m/2$, причем набор мнимых частей $\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ не зависит от $m \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Недостаток обсуждаемого подхода [20] заключается в невозможности определить условия, при которых все показатели Λ оказываются вещественными (впрочем, сказанное не относится к рассматриваемой задаче (1.2)–(1.4)). Вещественность показателей Λ для трещины в однородном анизотропном теле впервые доказана [23] при помощи анализа соответствующих граничных интегральных уравнений. Позднее были установлены [24] аналогичные по формулировке, но более глубокие результаты для общих эллиптических систем с одинаковыми краевыми условиями на берегах разреза. Вместе с тем, приемы, разработанные в [24], не годятся для составного тела.

Предложенный автором метод [9, 20] основан на нескольких соображениях, основным среди которых можно назвать *дифференцирование вдоль трещины*: производная степенного решения (1.1)

$$\partial_1 U(x) = r^{\Lambda - 1}\Psi(\varphi) \tag{2.1}$$

остается степенным решением задачи (1.2)–(1.4), причем $\Psi \neq 0$, если только U не является функцией одной переменной x_2. Вместе с общими результатами теории краевых задач в областях с кусочно гладкими границами (см. ключевые работы [25, 26] и, например, монографию [21]) связь степенных решений (1.1) и (2.1) приводит к следующим соотношениям для множества Σ показателей нетривиальных степенных решений:

$$\Lambda \in \Sigma \Rightarrow -\bar{\Lambda} \in \Sigma, \quad \Lambda \in \Sigma \Rightarrow \bar{\Lambda} \in \Sigma, \quad \Lambda \in \Sigma \Rightarrow \Lambda - 1 \in \Sigma \tag{2.2}$$

(черта означает комплексное сопряжение). Отметим, что первые два высказывания (2.2) вытекают соответственно из формальной самосопряженности задачи (1.2)–(1.4) и из вещественности коэффициентов (тензоры $A^{\pm}$ в законе Гука (1.5)). Последнее утверждение (2.2) нуждается в дополнительной аргументации, которая будет приведена ниже.

Еще один важный момент – полиномиальное свойство [22] системы теории упругости: функционал упругой энергии вырождается только на жестких смещениях – векторных полиномах переменных x_1 и x_2. Оно обеспечивает следующее утверждение (см. [21], теорема 6.1.2 и [22], предложение 2.3):

$$\Lambda \in \Sigma, \quad \mathrm{Re}\Lambda = 0 \Rightarrow \Lambda = 0 \tag{2.3}$$

При этом степенные решения (1.1) с нулевым показателем Λ суть жесткие поступательные смещения, в частности, орты $e^1 = (1, 0)$ и $e^2 = (0, 1)$. Кроме того, существуют в точности два линейно независимых степенно-логарифмических решения

$$e^j \ln r + \mathcal{T}^j(\varphi), \quad j = 1, 2 \tag{2.4}$$

Они порождают сосредоточенные в точке O силы. Теперь, учитывая формулы (2.2), (2.3), убеждаемся, что на прямых $\{\Lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\Lambda = m \in \mathbb{Z}\}$ расположены только вещественные, а значит, целые показатели нетривиальных степенных решений (1.1).

Очередной этап – проверка отсутствия обсуждаемых показателей в полосе $\{\Lambda \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,\Lambda < 1/2\}$. Для задачи (1.2)–(1.4) он дословно повторяет приведенные ранее рассуждения ([9], разд. 4) и здесь воспроизводиться не будет. Отметим, что при этом используются утверждения (2.2), интегральные формулы для КИН, а также монотонное убывание функционала потенциальной энергии деформации при удлиняющейся трещине, но фиксированной нагрузке. Обращаясь еще раз к приему дифференцирования вдоль трещины, заключаем, что

$$\Sigma = \{m, m \pm i\gamma_n + 1/2 : m \in \mathbb{Z}, n = 1, \ldots, N\} \tag{2.5}$$

Здесь $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$ – набор чисел, зависящий от упругих модулей материалов. Далее будет установлено, что $N = 1$ и $\gamma_1 = 0$.

Теперь займемся выяснением количества линейно независимых степенных решений при фиксированной вещественной части показателя $\lambda \in \Sigma$. Точки $\lambda \in \Sigma$ являются собственными числами некоторого операторного пучка на дуге $(-\pi, \pi)$ (см. [25], а также [21], § 3.5 и [9], разд. 2). Непрерывным изменением тензоров $A^{\pm}$ в законе Гука (1.5) этот пучок преобразуется в пучок, отвечающий задаче (1.2)–(1.4) об изотропной однородной плоскости с разрезом M, для которой известно следующее (см., например, [13, 27]): во-первых, в случае $\Lambda = 1$ имеется три линейно независимых решения, заданных формулой

$$r^1\Phi(\varphi) = (a_1x_1 - a_0x_2, a_2x_2 - a_0x_1), \quad a_q \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

и, во-вторых, если $\mathrm{Re}\,\Lambda = 1/2$, то $\Lambda = 1/2$ и любое степенное решение с таким показателем пропорционально решению (1.1), в котором $\Lambda = 1/2$ и

$$\begin{aligned} \Phi_r(\varphi) &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\mu}\left(3\sin\frac{3\varphi}{2} - (5 - 8\nu)\sin\frac{\varphi}{2}\right) \\ \Phi_\varphi(\varphi) &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\mu}\left(3\cos\frac{3\varphi}{2} - (7 - 8\nu)\cos\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

При этом $\lambda \geq 0$ и $\mu > 0$ – постоянные Ламе, $\nu = \lambda[2(\lambda + \mu)]^{-1}$ – коэффициент Пуассона (имеем дело с плоской деформацией). Отметим, что формулы (2.7) указывают полярные компоненты угловой части Φ, а вектор (2.6) записан в декартовой системе координат. Наконец, степенно-логарифмических решений с показателями $\Lambda = 1$ и $\Lambda = 1/2$ не существует.

Так как по доказанному ранее собственные числа Λ не могут покидать прямые $\{\Lambda : \mathrm{Re}\Lambda = m + 1/2\}$ или множество $\mathbb{Z}$, теорема [28] о сохранении полной кратности спектра при непрерывном изменении пучка утверждает, что при произвольных $A^{\pm}$ в законе (1.5) на прямой $\{\Lambda : \mathrm{Re}\,\Lambda = 1/2\}$ располагается лишь один показатель $\Lambda_{1/2}$, а показателю $\Lambda_1 = 1$ отвечают три линейно независимых степенных или степенно-логарифмических решения. Благодаря второму утверждению (2.2) $\Lambda_{1/2} = 1/2$ (при комплексном $\Lambda_{1/2}$ возникнет второй показатель $\overline{\Lambda}_{1/2} \neq \Lambda_{1/2}$ на той же прямой), а третье и первое утверждения (2.2) устанавливают, что $\gamma_1 = \ldots = \gamma_N = 0$ и каждому полуцелому показателю $\Lambda = m + 1/2$ соответствует лишь одно степенное решение, т.е. $N = 1$.

Осталось рассмотреть целые точки из множества (2.5). В изотропном случае среди решений (2.6) имеется поворот ($a_1 = a_2 = 0$), а также два решения U_j, для которых

$\sigma_{12}^{\pm}(U^j) = 0$ и $\sigma_{kk}^{\pm}(U^j) = \delta_{jk}$ ($j, k = 1, 2$). Аналогичные решения можно построить и для анизотропной составной плоскости – они оказываются кусочно линейными и образуют базис в линеале степенных решений с показателем $\Lambda = 1$. Их столько же, как и в изотропной ситуации, т.е. других, в частности, степенно-логарифмических, решений с показателем $\Lambda = 1$ не существует по доказанному ранее. Следовательно, для показателей $\Lambda = m > 1$ степенно-логарифмических решений также нет (множитель $\ln r$ не может быть уничтожен дифференцированием $\partial^{m-1}/\partial x_1^{m-1}$). Среди названных кусочно линейных решений есть одно, зависящее только от x_2 и исчезающее после дифференцирования по x_1, например, $a_0 = a_1 = 0$ в определении (2.6). Именно поэтому для показателя $\Lambda = 0$ удалось найти только два, а не три, полиномиальных решения e^1 и e^2. Решения (2.4), содержащие $\ln r$, не получаются из других решений дифференцированием вдоль трещины.

Пусть $m \neq 0, 1$, $a^{\pm} \in \mathbb{R}^2$ и $U^{\pm}(x) = a^{\pm} x_2^m$ – решения задачи (1.2)–(1.4). Тогда согласно уравнениям равновесия (1.2) $\partial_2 \sigma_{2k}^{\pm}(U^{\pm}) = 0$, а значит, справедливы равенства $\sigma_{2k}^{\pm}(U^{\pm}) = 0$ ($k = 1, 2$), которые вместе с очевидными формулами

$$\varepsilon_{11}(U^{\pm}) = 0, \quad \varepsilon_{12}(U^{\pm}) = \varepsilon_{21}(U^{\pm}) = m a_1^{\pm} x_2^{m-1}/2, \quad \varepsilon_{22}(U^{\pm}) = m a_2^{\pm} x_2^{m-1}$$

противоречат положительной определенности тензоров $A^{\pm}$. В частности, этот факт вместе с формулой (2.4) завершает проверку третьего высказывания (2.2). Кроме того, ни одно нетривиальное решение с показателем $\Lambda = m > 1$ не аннулируется дифференцированием $\partial/\partial x_1$, и поэтому в силу общих результатов [26] и третьего утверждения (2.2) (см. также [21], предложения 1.2.6 и 3.5.4) для $\Lambda = m$ и $\Lambda = -m$ найдется в точности столько же решений (1.1), как и в случае $\Lambda = 1$.

Основные свойства спектра (2.5) изучены. Именно, множество Σ состоит из целых и полуцелых чисел, причем $N = 1$ и $\gamma_1 = 0$ в формуле (2.5). При $m \in \mathbb{Z}$ показателю $\Lambda = m \neq 0$ отвечают три линейно независимых степенных решения и степенно-логарифмических решений нет. Если $\Lambda = 0$, то решения (1.1) – постоянные векторы, но имеется еще два решения (2.4). В обсуждаемом далее случае $\Lambda = m + 1/2$ существует только одно степенное решение (1.1).

3. О нормировке сингулярного решения. Решение задачи (1.2)–(1.4)

$$U(x) = r^{1/2}\Phi(\varphi) \tag{3.1}$$

имеющее показатель $\Lambda = 1/2$ и угловые части (2.7), соответствует второй (сдвиговой) моде для однородной изотропной плоскости с трещиной. При этом

$$\sigma_{22}^{\pm}(U^{\pm}; x_1, \pm 0) = 0, \quad x_1 < 0 \tag{3.2}$$

а множитель K в асимптотике упругих полей около вершины трещины

$$u(x) = c + KU(x) + O(r), \quad \sigma(u; x) = K\sigma(U; x) + O(1), \quad r \to +0 \tag{3.3}$$

находится согласно классическому определению КИН

$$K = K_{\mathrm{II}} = \lim_{r \to +0} (2\pi r)^{1/2} \sigma_{12}(u; r, 0) \tag{3.4}$$

Далее справедливость равенства (3.2) проверяется для анизотропной однородной плоскости, а значит, в силу представлений (3.3) нормальные напряжения на линии контакта остаются ограниченными. Иными словами, при любом нагружении трещина может быть закрыта наложением дополнительного достаточно большого сжимающего равномерного поля усилий. Таким образом, в однородных горных массивах, где преобладают именно сжимающие напряжения, разрушение происходит при полном контакте берегов трещин.

Для проверки непротиворечивости определения (3.4) в случае составной анизотропной плоскости воспользуемся схемой рассуждений, описанной ранее [9], и убедимся в возможности нормировки угловой части Φ степенного решения (3.1) соотношением

$$\sigma_{12}^{\pm}(U^{\pm};\, r, 0) = (2\pi r)^{-1/2} \tag{3.5}$$

Если предположить, что $\sigma_{12}^{\pm}(U^{\pm};\, r, 0) = 0$, то пара U^{+}, U^{-} окажется решением уравнений равновесия (1.2) с однотипными смешанными условиями сопряжения на линии раздела

$$U_2^{+}(x_1, 0) = U_2^{-}(x_1, 0),\ \ \sigma_{22}^{+}(U^{+};\, x_1, 0) = \sigma_{22}^{-}(U^{-};\, x_1, 0),\ \ \sigma_{12}^{\pm}(U^{\pm};\, x_1, 0) = 0,\ \ x_1 \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

Ввиду полиномиального свойства [22] и формальной самосопряженности задача (1.2), (3.6) эллиптическая, т.е. ограниченное в окрестности точки O решение $U = U^{\pm}$ оказывается [29] гладким и потому не обладает сингулярностью $O(r^{1/2})$. Полученное противоречие устанавливает, что касательные напряжения на продолжении трещины не обращаются в нуль, т.е. условие (3.5) всегда можно соблюсти.

Нормировку (3.5), приспособленную к *силовым* критериям разрушения, можно заменить следующей нормировкой, обслуживающей *деформационный* критерий разрушения:

$$[U_1](-r) = 8(2\pi)^{-1/2} b r^{1/2} \tag{3.7}$$

Здесь $[U_k](x_1) = U_k^{+}(x_1, 0) - U_k^{-}(x_1, 0)$ – скачок смещений на берегах трещины M, а $b = (B_{11,\,11}^{+} + B_{11,\,11}^{-})/2$ и $B_{jk,\,pq}^{\pm}$ – элементы тензоров податливости, обратных к тензорам жесткости $A^{\pm}$ в законе Гука (1.5). Для изотропной однородной плоскости

$$b = B_{11,\,11}^{\pm} = [4\mu(\lambda + \mu)]^{-1}(\lambda + 2\mu) \tag{3.8}$$

причем множитель в правой части равенства (3.7), первоначально отсутствовавший [30], подобран так, чтобы угловые части (2.7) удовлетворяли условию (3.7) с коэффициентом (3.8).

Поясним причины появления в формуле (3.7) элемента $G_{11,\,11}$, а не ожидаемого $G_{12,\,12}$. Пусть плоскость однородная, т.е. $A^{+} = A^{-}$ в законе Гука (1.5). В силу соотношений (3.1) и (3.7)

$$[\sigma_{11}(U)](-r) = \sigma_{11}^{0} r^{-1/2}, \quad r^{-1/2}[\varepsilon_{11}(U)](-r) = -4(2\pi)^{1/2} G r^{-1/2}$$

Подчеркнем, что $[\sigma_{2k}(U)](-r) = 0$ ($k = 1, 2$) согласно условиям сопряжения (1.3). Обозначив e тензор второго ранга с декартовыми компонентами $e_{11} = 1$ и $e_{jk} = 0$ при $j + k > 2$, вычисляем множитель σ_{11}^{0} :

$$\sigma_{11}^{0} r^{-1/2} e = [\sigma(u)](-r) = A[\varepsilon(U)](-r)$$

$$\sigma_{11}^{0} G_{11,\,11} r^{-1/2} = \sigma_{11}^{0} r^{-1/2} e A^{-1} e = e[\varepsilon(U)](-r) = [\varepsilon_{11}(U)](-r)$$

Итак, $\sigma^0_{11} = -4(2\pi)^{-1/2}$ и нормировка (3.7) эквивалентна следующей:

$$[\sigma_{11}(U)](-r) = -4(2\pi r)^{-1/2} \tag{3.9}$$

Поскольку корневая сингулярность напряжений характеризуется лишь одним КИН, а нормировки (3.5) и (3.7) по сути дела равносильны, критерии разрушения, оперирующие с КИН K, можно считать как силовыми, так и деформационными. Более того, согласно равенству (3.9) для однородного тела КИН L, соответствующий "деформационной нормировке" (3.7), определяется так:

$$L = -\frac{1}{4}\lim_{r \to +0}(2\pi r)^{1/2}[\sigma_{11}(u)](-r) \tag{3.10}$$

Подчеркнем, что в правой части равенства (3.10) фигурирует скачок напряжений $\sigma_{11}(u)$ на берегах трещины, который по доказанному не обращается в нуль.

Для раскрытой трещины, т.е. при замене условий сопряжения (1.3) краевыми условиями

$$\sigma^{\pm}_{2k}(u^{\pm}; x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}^1_+, \quad k = 1, 2 \tag{3.11}$$

имеется [9] два решения U^1 и U^2 вида (1.1) с показателями $\Lambda = \pm i\gamma + 1/2$. Если $\gamma = 0$ и взаимопроникание берегов отсутствует, то при помощи рассуждений, приведших к формуле (3.5), убеждаемся в возможности деформационной нормировки базиса $\{U^1, U^2\}$ степенных решений (3.1) задачи (1.2), (1.4), (3.11):

$$[U^j_k](-r) = 8(2\pi)^{-1/2}br^{1/2}\delta_{j,\,3-k} \tag{3.12}$$

В силу краевых условий (3.11) и равенства (3.12) при $j = k = 2$ решение U^2, отвечающее сдвиговой моде, удовлетворяет соотношениям (1.2)–(1.4) и (3.2), а значит, и физическому требованию (1.6).

Если же $\gamma \neq 0$, никакая нетривиальная линейная комбинация $W = c_1U^1 + c_2U^2$ не может иметь нулевой скачок $[\sigma_{22}(W)](-r)$ на берегах трещины. Действительно, в противном случае поле W оказывается решением задачи (1.2)–(1.4), но обладает комплексными показателями однородности Λ, что противоречит доказанному в разд. 2. С другой стороны, при $\gamma \neq 0$ решение (3.1) задачи (1.2)–(1.4) не удовлетворяет условию (3.2) – иначе оно становится решением задачи (1.2), (1.4), (3.11) с показателем $\Lambda \neq \pm i\gamma + 1/2$. Нарушение равенства (3.2) означает, что решение (3.3) подчинено физически правильному условию сжимающих напряжений (1.6) лишь при *определенном знаке* КИН K.

Преобразования, проделанные в приведенном выше замечании, позволяют высказать гипотезу: в случае краевых условий (3.11) все показатели Λ нетривиальных степенных решений (1.1) вещественны тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$B^+_{11,\,11} = B^-_{11,\,11} \tag{3.13}$$

Для изотропных материалов условие (3.13) совпадает с условием Дундурса [31].

4. Критерий Новожилова. Критерий квазистатического разрушения

$$\frac{1}{d}\int_0^d \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi)|_{\varphi = \theta}\,dr = \sigma_c \tag{4.1}$$

предложенный В.В. Новожиловым [15] для определения равновесного состояния трещин, был приспособлен [19, 32–34] к нахождению критических нагрузок в случае иных концентраторов напряжений. В левой части соотношения (4.1) интегрирование ведется по отрезку $I(\theta) = \{x : r \in [0, d], \varphi = \theta\}$ длиной d, исходящему из вершины O.

Поскольку материал не предполагается изотропным и однородным, в точке O его характеристики $d = d(\theta)$ и $\sigma_c = \sigma_c(\theta)$, характерный размер среды (например, диаметр зерна [19]) и критическое напряжение (теоретическая прочность [35]), считаем зависящими от направления $\theta \in (-\pi, \pi)$ отрезка $I = I(\theta)$. Внутри каждой из полуплоскостей $\mathbb{R}^2_\pm$, т.е. при $\pm\theta \in (0, \pi)$, эти зависимости разумно брать гладкими, но в точке $\theta = 0$ (линия раздела) у них допускаются разрывы первого рода. Если склейка ненадежная и теоретические прочности материалов в $\mathbb{R}^2_\pm$ значительно превосходят величину $\sigma_c(0)$, то прямолинейное распространение трещины оказывается предпочтительным [36]. В остальных случаях первостепенным становится вопрос определения угла отклонения отростка трещины от оси Ox_1.

Вернемся к рассмотрению ограниченного составного тела $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ с краевой трещиной M^0. Пусть в отсутствие объемных сил к внешней поверхности $\partial\Omega\backslash\Upsilon^0$ приложена нагрузка $p(x;\, \tau)$, зависящая от безразмерного времениподобного параметра τ (строго монотонного по отношению к реальному времени t); скорость изменения τ считаем малой в сравнении со скоростью распространения упругих волн, отнесенной к характерному размеру l тела Ω (например, к длине трещины – не путать с параметром $d \ll l$). Такая постановка позволяет обоснованно пренебречь силами инерции и сформулировать задачу квазистатического разрушения следующим образом: требуется определить момент $\tau = \tau_*$, в который равенство (4.1) реализуется для какого-нибудь угла θ, но при $\tau < \tau_*$ левая часть (4.1) строго меньше $\sigma_c(\theta)$ при любом θ. Соответствующая нагрузка $p(x;\, \tau_*)$ и будет критической. Отметим, что при простом нагружении указанную формулировку, пригодную для многих критериев разрушения, можно вывести из динамического критерия разрушения [34]. Говоря по-другому, функция

$$(-\pi, \pi) \ni \theta \mapsto F(\tau_*;\, \theta) - \sigma_c(\theta) \tag{4.2}$$

где

$$F(\tau;\, \theta) = \frac{1}{d(\theta)} \int\limits_0^{d(\theta)} \sigma_{\varphi\varphi}(\tau;\, x)|_{\varphi = \theta} ds \tag{4.3}$$

должна достигать глобального максимума (равного нулю) в одной или нескольких точках, но для $\tau < \tau_*$ оставаться отрицательной при всех θ. При множественности нулей функции (4.2) следует ожидать появления нескольких отростков и говорить о ветвлении трещины.

Остановимся на случае однородной ($A^+ = A^-$) плоскости, для которой величины $d(\theta)$ и $\sigma_c(\theta)$ гладко зависят от угла θ. Фиксируем θ и введем декартовы координаты (s, n), направив ось s вдоль отрезка $I(\theta)$. Используя уравнения равновесия (1.2), переписанные в новых координатах,

$$-\partial_s\sigma_{ss} - \partial_n\sigma_{ns} = 0, \quad -\partial_s\sigma_{sn} - \partial_n\sigma_{nn} = 0 \tag{4.4}$$

преобразуем производную F' функции (4.3) по переменной θ следующим образом:

$$F'(\tau;\, \theta) = -\frac{d'(\theta)}{d(\theta)} F(\tau;\, \theta) + d'(\theta)\sigma_{nn}(\tau;\, d(\theta), \theta) + \frac{1}{d(\theta)} J(\tau;\, \theta)$$

$$J = \int\limits_0^d \frac{\partial}{\partial\theta}\sigma_{nn}|_{n=0} ds = \int\limits_0^d s\frac{\partial}{\partial n}\sigma_{nn}|_{n=0} ds = -\int\limits_0^d s\frac{\partial}{\partial s}\sigma_{sn}|_{n=0} ds = \int\limits_0^d \sigma_{sn}|_{n=0} ds - d\sigma_{sn}|_{s=d,\, n=0}$$

В результате получаем соотношение

$$F'(\tau;\,\theta) = \frac{1}{d(\theta)}\int\limits_0^{d(\theta)}\{\sigma_{ns}(\tau;\,x) - d'(\theta)\sigma_{ns}(\tau;\,x)\}|_{\varphi=0}ds -$$

$$-\{\sigma_{ns}(\tau;\,x) - d'(\theta)\sigma_{ns}(\tau;\,x)\}|_{r=d(\theta),\,\varphi=0} =$$

$$= \frac{1}{D(\theta)}\left\{\frac{1}{d(\theta)}\int\limits_0^{d(\theta)}\sigma_{nN}(\tau;\,x)|_{\varphi=0} - \sigma_{nN}(\tau;\,x)|_{r=d(\theta),\,\varphi=0}\right\},\ D(\theta) = \left(1+\left[\frac{d'(\theta)}{d(\theta)}\right]^2\right)^{-1/2} \tag{4.5}$$

Под $N = N(\theta)$ понимается единичный вектор, касательный к графику функции $r = d(\varphi)$ в точке $\varphi = \theta$; его проекции на оси s и n имеют вид

$$N_s = D(\theta),\quad N_n = -D(\theta)d'(\theta)/d(\theta)$$

Итак, при образовании отростка, исходящего из вершины O в направлении θ, выражение (4.5) в момент $\tau = \tau_*$ совпадает с производной $\sigma_c'(\theta)$, т.е.

$$\frac{1}{d(\theta)}\int\limits_0^{d(\theta)}\sigma_{nN}(\tau_*;\,x)|_{\varphi=\theta}ds - \sigma_{nN}(\tau_*;\,x)|_{r=d(\theta),\,\varphi=0} = D(\theta)\sigma_c'(\theta) \tag{4.6}$$

Если прочностные свойства изотропные (упругие свойства тела могут сохранять анизотропию), то $d'(\theta) = 0$, $\sigma_c'(\theta) = 0$ и обнаруженное условие упрощается до такого:

$$\sigma_{r\varphi}(\tau_*;\,d,\theta) = \frac{1}{d}\int\limits_0^d\sigma_{r\varphi}(\tau_*;\,r,\theta)ds \tag{4.7}$$

Иными словами, касательное напряжение в конце отрезка $I(\theta)$ совпадает со средним этого напряжения по отрезку. В случае простого нагружения $p(x;\,\tau) = \tau p^0(x)$ угол θ не зависит от момента разрушения и аргумент τ_* из соотношений (4.6) и (4.7) можно убрать.

Отметим, что условия (4.7) и (4.6) являются только необходимыми. Так, например, берега трещины свободны от напряжений, т.е. $\sigma_{r\varphi}(r,\pm\pi) = 0$ и равенство (4.6) выполняется для $\theta = \pm\pi$, однако $\sigma_{\varphi\varphi}(r,\pm\pi) = 0$ согласно соотношению (3.2), и требование (4.1) заведомо нарушено. Вычисляя вторую производную функции (4.3) при постоянном d и преобразуя ее при учете уравнений равновесия (4.4), имеем

$$F'' = \frac{1}{d}J' = \frac{1}{d}\int\limits_0^d\frac{\partial}{\partial\theta}\sigma_{sn}|_{n=0}ds - \frac{\partial}{\partial\theta}\sigma_{sn}|_{s=d,\,n=0} = \frac{1}{d}\int\limits_0^d s\frac{\partial}{\partial n}\sigma_{sn}|_{n=0}ds - d\frac{\partial}{\partial n}\sigma_{sn}|_{s=d,\,n=0} =$$

$$= -\frac{1}{d}\int\limits_0^d s\frac{\partial}{\partial s}\sigma_{ss}|_{n=0}ds - d\frac{\partial}{\partial s}\sigma_{ss}|_{s=d,\,n=0} = \frac{1}{d}\int\limits_0^d\sigma_{ss}|_{n=0}ds - \left.\left(\sigma_{ss} - d\frac{\partial}{\partial s}\sigma_{ss}\right)\right|_{s=d,\,n=0} \tag{4.8}$$

В точке строгого локального максимума величина $F''(\tau_*;\,\theta)$, которая содержит только растягивающие напряжения для направлений, перепендикулярных отрезку $I(\theta)$, оказывается отрицательной. При переменных $d(\theta)$ и $\Sigma_c(\theta)$ выражение для второй производной функции (4.2) весьма громоздко. Тем не менее и в случае составной плоскости можно пользоваться необходимым и достаточным условиями локальных максимумов при $\pm\theta \in (0,\,\pi)$, не забывая при этом включить $\theta = 0$ в число "подозрительных" точек.

5. Следствия критерия Новожилова. Если размер d существенно мал, то с некоторой погрешностью напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}(\tau_*;\, r,\, \varphi)$ и $\sigma_{r\varphi}(\tau_*;\, r,\, \varphi)$ в формулах (4.1) и (4.7) можно заменить [19] главными членами $r^{-1/2}\Sigma_{\varphi\varphi}(\tau_*;\, \varphi)$ и $r^{-1/2}\Sigma_{r\varphi}(\tau_*;\, \varphi)$ их асимптотических разложений вблизи вершины трещины. В результате из равенства (4.1), а при изотропных прочностных свойствах и из равенства (4.7) вытекают совсем простые условия

$$\frac{2}{\sqrt{d}}\Sigma_{\varphi\varphi}(\tau^*;\, \theta) = \sigma_c \tag{5.1}$$

$$\Sigma_{r\varphi}(\tau^*;\, \theta) = 0 \tag{5.2}$$

Соотношение (5.1) логично назвать *асимптотической формой* критерия Новожилова. После добавления условия глобального максимума в точке θ оно напоминает известный критерий максимальных растягивающих напряжений, а необходимое условие (5.2) – критерий "$K_{\mathrm{II}} = 0$" (трещина развивается в направлении отсутствия касательных напряжений). Впрочем, для раскрытой трещины в изотропном теле известно [30, 37, 38], что упомянутые критерии в апостериорной формулировке (КИН K_{I} – максимальный среди возможных, а КИН K_{II} в вершине малой трещины-отростка равен нулю) указывают направление, отличающееся от найденного согласно формулам (5.1) и (5.2).

Достаточное условие локального максимума $F''(\tau_*;\, \theta) < 0$ превращается согласно выкладке (4.8) в неравенство

$$\Sigma_{rr}(\tau_*;\, \theta) < 0$$

Таким образом, направление развития трещины характеризуется *максимальным разрывающим* напряжением $r^{-1/2}\Sigma_{\varphi\varphi}(\tau_*;\, \theta)$, *нулевым сдвиговым* напряжением $r^{-1/2}\Sigma_{r\varphi}(\tau_*;\, \theta)$ и *отрицательным продольным* напряжением $r^{-1/2}\Sigma_{rr}(\tau_*;\, \theta)$.

Отметим, что в статье [19], посвященной анализу направления распространения открытой трещины в ортотропном материале, использовался не сам критерий Новожилова (4.1), а именно его асимптотический вариант (5.1); при этом параметр d считался постоянным, а величина $\sigma_c(\theta)$ бралась равной $\sigma_{cx}\sin^2\theta + \sigma_{cy}\cos^2\theta$, т.е. причины обнаруженного [19] отклонения трещины от прямолинейного пути обусловлены только переменностью прочностной характеристики σ_c.

Известна [34] необходимость привлечения многочленных асимптотик в критерии инкубационного времени [33], обобщающем критерий (4.1) на случай динамического разрушения. Поскольку согласно равенству (3.2) во многих ситуациях наличие контакта берегов не определяется главным членом асимптотики напряжений, учет младших членов становится еще более важным. Оценим погрешность вычисления угла отклонения отростка трещины в однородном изотропном теле при использовании асимптотического критерия (5.1).

Разложение поля напряжений вблизи вершины трещины O выглядит так:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(x) = -\frac{1}{4}\frac{K}{(2\pi r)^{1/2}}\left\{3\sin\frac{\varphi}{2} + 3\sin\frac{3\varphi}{2}\right\} + \sigma_{11}^0\sin^2\varphi + \sigma_{22}^0\cos^2\varphi + O(r^{1/2}) \tag{5.3}$$

$$\sigma_{r\varphi}(x) = \frac{1}{4}\frac{K}{(2\pi r)^{1/2}}\left\{\cos\frac{\varphi}{2} + 3\cos\frac{3\varphi}{2}\right\} + (\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)\sin\varphi\cos\varphi + O(r^{1/2}) \tag{5.4}$$

Здесь K – КИН, который считается ненулевым, а σ_{11}^0 и σ_{22}^0 – конечные составляющие напряжений в вершине трещины, причем $\sigma_{22}^0 \le 0$ в соответствии с формулами (1.6) и

(3.2). Известно, что асимптотический критерий Новожилова указывает следующие критический КИН и угол отклонения:

$$|K^\star| = \frac{1}{4}\sigma_c(6\pi d)^{1/2}, \quad \theta^\star = -2\operatorname{sign}K\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{5.5}$$

Считая величину $\delta = |K|^{-1}|\sigma^0_{22} - \sigma^0_{11}|d^{1/2}$ малой и пользуясь необходимым условием (4.7), находим главный член поправки к углу отклонения

$$\theta^* = -\operatorname{sign}K\left\{2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{27}(3\pi d)^{1/2}\frac{1}{K}(\sigma^0_{22} - \sigma^0_{11})\right\} \tag{5.6}$$

Теперь вычислим левую часть равенства (4.1) на асимптотике (5.3) при $\theta = \theta^*$ и обнаружим, что разрушение не происходит при выполнении неравенства

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}(2\pi d)^{-1/2}K + \frac{1}{9}(8\sigma^0_{11} + \sigma^0_{22}) < \sigma_c \tag{5.7}$$

При неизменных K и $\sigma^0_{22} \lessgtr 0$ в случае растягивающего (сжимающего) напряжения вдоль трещины угол отклонения уменьшается (увеличивается). Разумеется, формулы (5.6) и (5.7) приближенные, и их точность определяется величинами δ^2 и $\max\limits_{r\le d}\{|\tilde\sigma_{\varphi\varphi}(r,\varphi)| + |\tilde\sigma_{r\varphi}(r,\varphi)|\}$, где $\tilde\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\tilde\sigma_{r\varphi}$ – остатки в разложении (5.3) и (5.4).

Вернемся к асимптотическому критерию Новожилова. Из формулы (5.2) вытекает один занятный факт, справедливый для трещины на оси упругой симметрии однородной среды. Поскольку в силу равенства (3.2) угловая часть $\Sigma_{\varphi\varphi}(\tau;\varphi)$ разрывающих напряжений обращается в нуль при $\varphi = \pm\pi$, она принимает максимальное (или минимальное) значение в точке $\varphi_\bullet$ внутри интервала $(-\pi, \pi)$. При этом $\Sigma_{\varphi r}(-\varphi; \varphi_\bullet) = 0$ и, следовательно, угловая часть сдвигового напряжения должна менять знак на интервале $(-\pi, \pi)$ при любом анизотропном материале. Как упоминалось, в согласии с условиями (5.1) и (5.2) для ветвления трещины необходимо, чтобы угловая часть $\Sigma_{r\varphi}$ при $r^{-1/2}$ по крайней мере дважды обращалась в нуль внутри интервала $(-\pi, \pi)$, меняя при этом знак с плюса на минус. Сказанное означает, что функция $\Sigma_{\varphi r}$ обязана обладать не менее пятью нулями на отрезке $[-\pi, \pi]$. Названного свойства у гармонического полинома третьей степени от переменной $\varphi/2$, разумеется, нет. Итак, в рамках асимптотического критерия Новожилова, т.е. при существенно малом параметре d, ветвления трещины не происходит. По той же причине обнаружению возможности ветвления трещины не помогает и рассмотрение двучленной асимптотики напряжений (5.3) и (5.4), что вполне согласуется с известным экспериментальным фактом: квазистатическое (без влияния динамических эффектов) ветвление трещины в однородном изотропном хрупком материале не наблюдается.

Изложенная схема применения критерия Новожилова годится и в случае раскрытой трещины. Разумеется приходится изменить асимптотические формулы (5.3), (5.4), а именно положить $\sigma^0_{22} = 0$ и ввести слагаемые, отвечающие первой (разрывающей) моде и имеющие положительный КИН $K_{\mathrm{I}} > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00835).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams M.L.* The stresses around a fault or crack in dissimilar media // Bull. Seismol. Soc. America. 1959. V. 49. № 2. P. 199–204.
2. *Черепанов Г.П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластине с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 131–137.
3. *Rice J.R., Sih G.C.* Plane problems of cracks in dissimilar materials // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 2. P. 418–423.
4. *Clements D.L.* A crack between dissimilar anisotropic media // Intern. J. Eng. Sci. 1971. V.9. № 2. P. 257–265.
5. *Ting T.C.T.* Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites // Intern. J. Solids Structures. 1986. V. 22. № 9. P. 965–983.
6. *Rice J.R.* Elastic fracture mecanics concepts for interfacial cracks // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 1. P. 98–103.
7. *Suo Z.* Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1990. V. 427. № 1873. P. 331–358.
8. *Gao H.* Weight function method for interface cracks in anisotropic bimatherials // Intern. J. Fracture. 1992. V. 56, № 2. P. 139–158.
9. *Назаров С.А.* Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 489–502.
10. *Салганик Р.Л.* О хрупком разрушении склеенных тел // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 957–962.
11. *Гольдштейн Р.В., Салганик Р.Л.* О трещинах, распространяющихся между плоскими пластинками на прямолинейной границе склейки // ПМТФ. 1963. № 5. С. 62–68.
12. *Comninou M.* The interface crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. № 4. P. 631–636.
13. *Comninou M.* The interface crack in a shear field // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1978. V. 45. № 2. P. 287–290.
14. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in a conbined tension-compression and shear field // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1979. V. 46. № 2. P. 345–348.
15. *Новожилов В.В.* К основам теории равновесных трещин в упругих телах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 797–812.
16. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
17. *Соколовски Я., Хлуднев А.М.* О производной функционала энергии по длине трещины в задачах теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 467–475.
18. *Khludnev A.M., Sokolowski J.* Griffith formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks // Europ. J. Mech. A. Solids. 2000. V. 19. № 1. P. 105–120.
19. *Морозов Н.Ф., Новожилов В.В.* Некоторые проблемы структурной механики разрушения // Физ.-хим. механика материалов. 1988. Т. 24. № 1. С. 21–26.
20. *Назаров С.А.* Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Вып. 1. С. 17–31.
21. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994. 520 p.
22. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5. С. 77–142.
23. *Duduchava R., Wendland W.L.* The Wiener-Hopf method for systems of pseudodifferential equations with an application to crack problems // Integral Equations Operator Theory. 1995. V. 23. № 3. P. 294–335.
24. *Costabel M., Dauge M.* Crack singularities for general elliptic systems // Math. Nachr. 2002. Bd. 235. P. 29–49.

25. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 208–292.
26. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
27. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
28. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
29. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* Общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. с. 1034–1037.
30. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Высвобождение энергии при изломе трещины в плоском анизотропном теле // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 502–514.
31. *Dundurs J.* Effect of elastic constants on stress in a composite under plane deformations // J. Compos. Mater. 1967. V.1. № 3. P. 310–322.
32. *Морозов Н.Ф.* Исследование разрушающей нагрузки для области, ослабленной вырезом в виде лунки // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1336–1338.
33. *Морозов Н.Ф., Петров Ю.В.* Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб : Изд-во С.петерб. ун-та, 1997. 129 с.
34. *Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Уткин А.А.* О направлении роста трещины в условиях асимметричного ударного воздействия // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 6. С. 763–765.
35. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
36. *Leguillon D., Sanchez-Palencia E.* Fracture in heterogeneous materials. Weak and strong singularities // New Advances in Computational Structural Mechanics / Ed. P. Ladevése and O.C. Zienkevicz. Amsterdam: Elsilver, 1992. P. 423–434.
37. *Melin S.* Fracture from a straight crack subjected to mixed mode loading // Intern. J. Fracture. 1987. V. 32. № 4. P. 257–263.
38. *Amestoy M., Leblond J.B.* Crack paths in plane situations – II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors // Intern. J. Solids Structures. 1992. V. 29. № 4. P. 465–501.
39. *Петров Ю.В., Поникаров Н.В.* О направлении роста трещины в ортотропном материале // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 40. С. 180–184.

Санкт-Петербург
email : serna@snark.ipme.ru

Поступила в редакцию
25.II.2004