

УДК 539.375

© 2005 г. В. С. Никишин

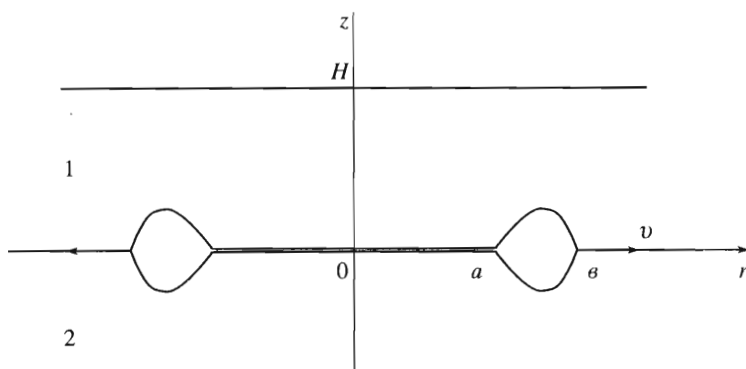
## СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ ПО ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СЛОЯ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Дается точное аналитическое решение прямой осесимметричной стационарной динамической задачи теории упругости о движении с произвольной постоянной дозвуковой скоростью  $v = c$  по границе раздела жестко сцепленных слоя  $0 \leq z \leq H$  и полупространства  $z \leq 0$  круговой трещины  $0 \leq r \leq r^0 + ct$  ( $r^0 \leq 0$ ) поперечного сдвига с каверной и без каверны при вершине. При помощи преобразования Ганкеля через биволновые потенциалы построены общее решение основных уравнений движения теории упругости и базовые решения первой основной краевой задачи отдельно для слоя и полупространства при произвольных нормальных и касательных напряжениях на плоскости раздела  $z = 0$  в движущейся цилиндрической системе координат  $r_1 = r + ct$ ,  $z_1 = z$ . Проведена специальная регуляризация базового решения для слоя, обеспечивающая сходимость интегралов для всех напряжений и перемещений с сохранением сколь угодно высокой точности решения [1, 2]. На основе базовых решений дается математическая постановка смешанной задачи о движении трещины поперечного сдвига с каверной при вершине и ее сведение к системе трех сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши, допускающей регуляризацию методом Карлемана – Векуа через замкнутое решение соответствующей характеристической системы сингулярных интегральных уравнений. При обращении ширины каверны в нуль одно из уравнений системы разрешает задачу о трещине поперечного сдвига без каверны. Обоснованы критерии существования каверны и ее отсутствия в зависимости от упругих и скоростных характеристик слоя и полупространства и от скорости движения трещины.

Представленная задача предназначена для исследования интерференционных и собственных поверхностных и пограничных волн Релея и Стоунли, которые по закону синхронизма генерируются движущейся трещиной. Можно усмотреть ее возможное отношение к источнику движущих сил землетрясения.

**1. К постановке базовых и смешанных задач.** Рассматриваемое двухслойное полупространство состоит из слоя произвольной толщины  $H$  и слоя-основания бесконечной толщины (однородного полупространства) с присвоенными им номерами соответственно 1 и 2. Модули упругости Юнга  $E_i$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_i$  и плотности  $\rho_i$  материала ( $i = 1, 2$ ) могут принимать различные и произвольные значения. Начало отсчета цилиндрической системы координат  $r, z$  принимаем на плоскости раздела слоев и направляем ось  $Oz$  вверх ортогонально слоям. В этой системе координат верхний слой  $0 \leq z \leq H$  и слой-основание  $z \leq 0$  разделяются плоскостью  $z = 0$ , а плоскость  $z = H$  является верхней границей верхнего слоя (фиг. 1).

Внешняя граница  $z = H$  свободна от напряжений. На плоскости раздела слоев  $z = 0$  в начальный момент времени  $t = 0$  спонтанно возникает и начинает движение с произвольной постоянной дозвуковой скоростью  $v = c$  круговая трещина поперечного сдвига  $0 \leq r + ct \leq r^0 + ct$  ( $r^0 \geq 0$ ), а вне трещины должны выполняться условия жест-



Фиг. 1

кого сцепления слоев, обеспечивающие непрерывность нормальных и касательных компонент напряжений и перемещений. Сначала предполагаем, что берега трещины всюду находятся в контакте, имеют двусторонние связи и при движении трутся друг по другу с трением, закон которого подложит определению из условия синтеза всех краевых условий в плоскости трещины  $0 \leq r + ct, z = 0$ . Такая постановка задачи будет корректна только при условии, если осевые нормальные напряжения во всей области трещины  $0 \leq r + ct \leq r^0 + ct$  будут сжимающими (отрицательного знака). Если же в области трещины появится зона (зоны) растягивающих нормальных напряжений, то при наличии односторонних связей в этой зоне (зонах) берега трещины оторвутся друг от друга и образуют каверну (каверны). Установить знаки осевых нормальных напряжений во всей области трещины возможно только в результате численного решения задачи. Исключением является вершина трещины  $r = r^0 + ct$ , в которой осевые нормальные напряжения претерпевают бесконечный разрыв. Аналитическое решение исходной задачи о трещине без каверны позволило доказать, что коэффициент интенсивности осевых нормальных напряжений в ее вершине в диапазоне изменения упругих и скоростных характеристик слоев при любой дозвуковой скорости движения трещины меняет знак. Следовательно, при определенных упругих и скоростных характеристиках слоев в окрестности вершины появится зона растягивающих нормальных напряжений, и, стало быть, при условиях односторонних связей берегов трещины в этой зоне при вершине образуется каверна.

Приведенные выше положения обеспечивают достаточные основания для постановки рассматриваемых ключевых задач о трещине поперечного сдвига (без каверны) и с одной каверной при вершине. Численная реализация аналитических решений этих задач позволит установить конкретные характеристики слоев и скорость движения трещины  $v = c$ , при которых они корректны, и выяснить возможность появления промежуточных каверн при иных характеристиках задачи. Последнее, в свою очередь, обеспечит достаточные основания для постановки обобщенной задачи о движении трещины поперечного сдвига при наличии произвольного конечного числа каверн.

Излагаемые ниже аналитические решения базовых и смешанной задачи даются в движущейся цилиндрической системе координат  $r_1 = r + ct, z_1 = z$  в безразмерных переменных  $\rho = r_1/b, \zeta = z_1/H$ , где  $b = r^0 + ct$  – величина радиуса окружности, принятая за линейную единицу измерения. Здесь следует напомнить и пояснить, что в рассматриваемой стационарной задаче все механические характеристики и искомые напряжения и перемещения не зависят от времени  $t$ . Поэтому отношение  $\rho = r_1/b$  надлежит рассматривать как независимую безразмерную переменную на радиальной по-

луоци  $0 \leq \rho$ . На безразмерной вертикальной полуоци  $O\zeta$  верхний слой ( $i = 1$ ) расположен на отрезке  $0 \leq \zeta \leq 1$ , а слой-основание ( $i = 2$ ) – на неограниченном интервале  $\zeta \leq 0$ . Трещина расположена в плоскости  $\zeta = 0$  на площади круга  $0 \leq \rho \leq 1$ , а каверна – на площади кольца  $\alpha^0 \leq \rho \leq 1$ , где  $\alpha^0 = a/b$  – безразмерный радиус внутреннего контура каверны, который подлежит определению из условия обращения в нуль коэффициента интенсивности осевых нормальных напряжений (фиг. 1). Величины отношений

$$\lambda = H/b, \quad \delta = E_1/E_2, \quad \chi = \delta(1 + \nu_2)/(1 + \nu_1), \quad G_i = E_i/(2(1 + \nu_i)), \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

являются характерными геометрическими и упругими параметрами смешанной задачи; скорости продольных волн растяжения – сжатия  $c_{1i}$  и поперечных волн сдвига  $c_{2i}$ :

$$c_{1i} = \sqrt{\frac{2(1 + \nu_i)G_i}{1 - 2\nu_i \rho_i}}, \quad c_{2i} = \sqrt{\frac{G_i}{\rho_i}}, \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

представляют собой скоростные характеристики слоев. Осевые нормальные и касательные напряжения, осевые и радиальные перемещения в слое с номером  $i = 1, 2$  обозначаем соответственно через  $\sigma_{zi}(\rho, \zeta)$ ,  $\tau_{rzi}(\rho, \zeta)$ ,  $w_i(\rho, \zeta)$ ,  $u_i(\rho, \zeta)$ .

**2. Общее решение основных уравнений движения.** Основные уравнения движения теории упругости в перемещениях  $u_i(r, z)$ ,  $w_i(r, z)$  в слоях  $i = 1, 2$

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)u_i + \frac{1}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial l_i}{\partial r} = \frac{\rho_i}{G_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \Delta w_i + \frac{1}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial l_i}{\partial z} = \frac{\rho_i}{G_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad l_i = \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{\partial w_i}{\partial z}$$

в движущейся системе координат  $r_1 = r + ct$ ,  $z_1 = z$  при учете соотношений

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) - \frac{1}{r_1^2} \right) u_i, \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) w_i$$

записывается в форме

$$\left( \Delta_{2i} - \frac{k_{2i}^2}{r_1^2} \right) u_i + \frac{1}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial l_i}{\partial r_1} = 0, \quad \Delta_{2i} w_i + \frac{1}{1 - 2\nu_i} \frac{\partial l_i}{\partial z_1} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta_{2i} = k_{2i}^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \quad k_{2i} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{2i}^2}}, \quad l_i = \frac{\partial u_i}{\partial r_1} + \frac{u_i}{r_1} + \frac{\partial w_i}{\partial z_1} \quad (2.2)$$

Общее решение уравнений получено в форме

$$u_i = -\frac{1 + \nu_i}{E_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r_1 \partial z_1}, \quad w_i = \frac{1 + \nu_i}{E_i} \left( 2(1 - \nu_i) \Delta_{2i} + \frac{c^2}{c_{2i}^2} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \varphi_i \quad (2.3)$$

где  $\varphi_i(r_1, z_1)$  – произвольные функции, удовлетворяющие биволновому уравнению

$$\Delta_{1i} \Delta_{2i} \varphi_i(r_1, z_1) = 0 \quad (2.4)$$

с операторами  $\Delta_{2i}$  (2.2) и

$$\Delta_{1i} = k_{1i}^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \quad k_{1i} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{1i}^2}} \tag{2.5}$$

Нормальные осевые и касательные напряжения определяются через перемещения по закону Гука

$$\sigma_{zi} = \frac{\partial}{\partial z_1} \left( (2 - \nu_i) \Delta_{2i} + \frac{c^2}{c_{2i}^2} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \varphi_i(r_1, z_1) \tag{2.6}$$

$$\tau_{rzi} = \frac{\partial}{\partial r_1} \left( (1 - \nu_i) \Delta_{2i} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{c_{2i}^2} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) \varphi_i(r_1, z_1)$$

В случае дозвуковой скорости движения трещины при выполнении условий  $1 - c^2/c_{2i}^2 > 0$  ( $i = 1, 2$ ), при которых радикалы  $k_{1i}$  (2.5) и  $k_{2i}$  (2.2) принимают действительные значения, за биволновые функции  $\varphi_i(r_1, z_1)$  ( $i = 1, 2$ ) принимаем общее решение уравнения (2.4) в форме интеграла Ганкеля

$$\varphi_i = \int_0^\infty (A_i^*(\alpha) e^{k_{2i}\alpha z_1} + B_i^*(\alpha) e^{k_{1i}\alpha z_1} + C_i^*(\alpha) e^{-k_{2i}\alpha z_1} + D_i^*(\alpha) e^{-k_{1i}\alpha z_1}) J_0(\alpha r_1) d\alpha \tag{2.7}$$

где  $A_i^*$ ,  $B_i^*$ ,  $C_i^*$ ,  $D_i^*$  – произвольные функции от переменной интегрирования, которые подлежат определению из краевых условий базовых и смешанной задач, за исключением  $C_2^*(\alpha) \equiv D_2^*(\alpha) \equiv 0$  ( $0 \leq \alpha < \infty$ ). Функции  $\varphi_i(r_1, z_1)$  в форме интеграла (2.7) представляют собой биволновые потенциалы, через которые по формулам (2.3), (2.6), получаем конструктивные выражения перемещений и напряжений в слоях  $i = 1, 2$ . Вводим в них безразмерные переменные  $\rho = r_1/b$ ,  $\zeta = z_1/H$  и новые неизвестные функции  $A_i(\beta)$ ,  $B_i(\beta)$ ,  $C_i(\beta)$ ,  $D_i(\beta)$  от параметра  $\beta = b\alpha$  с надлежащими нормирующими множителями, исключаящими возрастающие экспоненты и этим самым обеспечивая корректность решения. В результате нормальные и касательные напряжения и осевые и радиальные перемещения представляем в форме

$$\sigma_{zi} = \int_0^\infty \beta \Delta_{zi}(\zeta, \beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad \tau_{rzi} = \int_0^\infty \beta \Delta_{\tau i}(\zeta, \beta) J_1(\rho\beta) d\beta \tag{2.8}$$

$$\frac{E_i}{(1 + \nu_i)b} w_i = \int_0^\infty \Delta_{wi}(\zeta, \beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad \frac{E_i}{(1 + \nu_i)b} u_i = \int_0^\infty \Delta_{ui}(\zeta, \beta) J_1(\rho\beta) d\beta$$

$$\Delta_{zi} = -A_i k_{2i} \eta_{2i} + B_i n_i \eta_{1i} + C_i k_{2i} \psi_{2i} - D_i n_i \psi_{1i}$$

$$\Delta_{\tau i} = A_i m_i \eta_{2i} + B_i s_i \eta_{1i} + C_i m_i \psi_{2i} + D_i s_i \psi_{1i}$$

$$\Delta_{wi} = -A_i \eta_{2i} + B_i f_i \eta_{1i} - C_i \psi_{2i} + D_i f_i \psi_{1i} \tag{2.9}$$

$$\Delta_{ui} = A_i k_{2i} \eta_{2i} + B_i k_{1i} \eta_{1i} - C_i k_{2i} \psi_{2i} - D_i k_{1i} \psi_{1i}$$

$$\begin{aligned} \eta_{ji} &= \exp(-\lambda\beta k_{ji}(\zeta_{i-1} - \zeta)), \quad \psi_{ji} = \exp(-\lambda\beta k_{ji}(\zeta - \zeta_i)), \quad \zeta_0 = 1, \quad \zeta_1 = 0 \\ n_i &= k_{1i}((1 - \nu_i)(k_{1i}^2 - k_{2i}^2) - 1), \quad m_i = (1 + k_{2i}^2)/2 \\ s_i &= \nu_i(k_{1i}^2 - k_{2i}^2) + (1 + k_{2i}^2)/2, \quad f_i = (1 - 2\nu_i)(k_{1i}^2 - k_{2i}^2) - 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

**3. Регуляризованное базовое решение для верхнего слоя.** Регуляризованное базовое решение для верхнего слоя строится при следующих краевых условиях на внешней поверхности  $\zeta = 1$  и на границе раздела слоев  $\zeta = 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{z1} &= p^*(\rho), \quad \tau_{rz1} = q^*(\rho) \quad \text{при } \zeta = 1 \\ \sigma_{z1} &= p(\rho), \quad \tau_{rz1} = q(\rho) \quad \text{при } \zeta = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $p(\rho), q(\rho)$  – произвольные функции на полуоси  $0 \leq \rho < \infty$ , представимые интегралами Ганкеля

$$p(\rho) = \int_0^\infty \beta \bar{p}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad q(\rho) = \int_0^\infty \beta \bar{q}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta \quad (3.2)$$

$$\bar{p}(\beta) = \int_0^\infty \rho p(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad \bar{q}(\beta) = \int_0^\infty \rho q(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho \quad (3.3)$$

$p^*(\rho), q^*(\rho)$  ( $0 \leq \rho < \infty$ ) – сколь угодно малые функции, предназначенные для регуляризации решения задачи (3.1)–(3.3). Регуляризованное решение этой задачи ищем в форме суперпозиции двух отдельных решений, соответствующих нормальной нагрузке  $p(\rho)$  с малой пригрузкой  $p^*(\rho)$  при  $q(\rho) \equiv q^*(\rho) \equiv 0$  и касательной нагрузке  $q(\rho)$  с малой пригрузкой  $q^*(\rho)$  при  $p(\rho) \equiv p^*(\rho) \equiv 0$ . Функции малой пригрузки представляем в форме

$$\begin{aligned} p^*(\rho) &= -\int_0^\infty \beta R(\beta) \Delta_{wp1}(1, \beta) J_0(\rho\beta) d\beta \\ q^*(\rho) &= -\int_0^\infty \beta R(\beta) \Delta_{uq1}(1, \beta) J_1(\rho\beta) d\beta \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\Delta_{wp1}(1, \beta), \Delta_{uq1}(1, \beta)$  – функции податливости, представляемые формулами  $\Delta_{wi}(\zeta, \beta), \Delta_{ui}(\zeta, \beta)$  (2.9) на внешней поверхности слоя  $\zeta = 1$  соответственно при нормальной  $p(\rho)$  и касательной  $q(\rho)$  нагрузках, причем принимаем, что

$$R(\beta) = \varepsilon \exp(-n\beta), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad n \gg 1 \quad (3.5)$$

Поясним, что введение функций пригрузки  $p^*(\rho), q^*(\rho)$  (3.4) в краевые условия (3.1) предназначено только для обеспечения через функцию  $R(\beta)$  (3.5) сходимости интегралов (2.8) для перемещений, которые в случае  $R(\beta) \equiv 0$  и, стало быть, при  $p^*(\rho) \equiv q^*(\rho) \equiv 0$  расходятся в нижних пределах. Но при этом требуется, чтобы модули  $|p^*(\rho)|, |q^*(\rho)|$  ( $0 \leq \rho < \infty$ ) и модуль главного вектора пригрузки  $p^*(\rho)$  (главный вектор пригрузки  $q^*(\rho)$  обращается в нуль по условию симметрии) не превышали сколь угодно малой величины  $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$ , зависящей от постоянных  $\varepsilon, n$  функции  $R(\beta)$  (3.5). При  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$  имеем  $\delta(\varepsilon, n) = O(n^{-1} \sqrt{\varepsilon n})$ , и, стало быть, функции  $p^*(\rho), q^*(\rho)$ , в краевых условиях (3.1) можно интерпретировать как бесконечно малые функции

регуляризации базового решения с сохранением его формы и сколь угодно высокой точности.

Подставляя формулы (2.8), (3.2), (3.4) в краевые условия (3.1), получаем краевые условия для функций  $\Delta_{vs1}(\zeta, \beta)$  ( $v = z, \tau, w, u$ ) (2.9) выраженных через отмеченные индексом  $s$  наборы неизвестных функций  $A_{s1}(\beta)$ ,  $B_{s1}(\beta)$ ,  $C_{s1}(\beta)$ ,  $D_{s1}(\beta)$  ( $0 \leq \rho < \infty$ ), для случая нормальной нагрузки ( $s = p$ )

$$\begin{aligned} \Delta_{zp1}(1, \beta) + R(\beta)\Delta_{wp1}(1, \beta) &= 0, \quad \Delta_{\tau p1}(1, \beta) = 0 \\ \Delta_{zp1}(0, \beta) &= \bar{p}(\beta), \quad \Delta_{\tau p1}(0, \beta) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

и для случая касательной нагрузки ( $s = q$ )

$$\begin{aligned} \Delta_{zq1}(1, \beta) &= 0, \quad \Delta_{\tau q1}(1, \beta) + R(\beta)\Delta_{uq1}(1, \beta) = 0 \\ \Delta_{zq1}(0, \beta) &= 0, \quad \Delta_{\tau q1}(0, \beta) = \bar{q}(\beta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Равенства (3.6), (3.7) в развернутом виде с подстановкой в них формул (2.9) представляют собой корректные системы функциональных уравнений (СФУ) для определения неизвестных функций  $A_{s1}(\beta)$ ,  $B_{s1}(\beta)$ ,  $C_{s1}(\beta)$ ,  $D_{s1}(\beta)$  ( $s = p, q$ ) при нормальной и касательной нагрузках. Разрешая развернутые СФУ (3.6), (3.7) по правилу Крамера, находим в аналитическом виде эти неизвестные функции, выраженные соответственно через трансформанты  $\bar{p}(\beta)$ ,  $\bar{q}(\beta)$  (3.3), и подставляем их в общее решение (2.8). В результате получаем регуляризованные решения краевой задачи для верхнего слоя ( $i = 1$ ) отдельно при нормальной  $p(\rho)$  и касательной  $q(\rho)$  нагрузках на его нижней граничной плоскости  $\zeta = 0$ . Суперпозиция этих решений дает искомое регуляризованное базовое решение задачи (3.1)–(3.3) – для верхнего слоя ( $i = 1$ ).

Для постановки рассматриваемой ниже смешанной задачи о движении трещины из описанного выше базового решения требуются следующие представления осевых и радиальных перемещений  $w_1(\rho, \zeta)$ ,  $u_1(\rho, \zeta)$  на нижней границе слоя  $\zeta = 0$ :

$$w_1(\rho, 0) = \int_0^{\infty} \Delta_{w1}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad u_1(\rho, 0) = \int_0^{\infty} \Delta_{u1}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta \quad (3.8)$$

$$\Delta_{v1} = E_1^{-1}(1 + \nu_1)bD_{v1}(\beta), \quad D_{v1}(\beta) = \Delta_{vp1}(\beta)\bar{p}(\beta) + \Delta_{vq1}(\beta)\bar{q}(\beta); \quad v = w, u \quad (3.9)$$

Опуская громоздкие аналитические выражения функций  $\Delta_{vs1}(\beta)$  ( $v = w, u$ ;  $s = p, q$ ), которые можно получить по описанной выше методике с заменой в СФУ (3.6), (3.7), трансформант  $\bar{p}(\beta)$ ,  $\bar{q}(\beta)$  на единицу, представляем только главные члены их асимптотических разложений при  $\beta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \Delta_{wp1}(\beta), \Delta_{uq1}(\beta) &= -\varepsilon^{-1} + O(\beta) \\ (\Delta_{wq1}(\beta), \Delta_{up1}(\beta)) &= -2 \left( \frac{1}{1 - k_{21}^2}, \frac{\nu_1}{1 + \nu_1 - (1 - \nu_1)k_{21}^2} \right) + O(\beta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

и при  $\beta \rightarrow \infty$

$$\left\| \begin{array}{cc} \Delta_{wp1}(\beta) & \Delta_{wq1}(\beta) \\ \Delta_{up1}(\beta) & \Delta_{uq1}(\beta) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -A_{wp1} & A_{wq1} \\ A_{up1} & -A_{uq1} \end{array} \right\| + O(\exp(-2\lambda k_{21}\beta)) \quad (3.11)$$

$$A_{vs1} = \frac{a_{vs}}{R_{l1}}, \quad v = w, u; \quad s = p, q$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 a_{wp1} &= (k_{11} + k_{21})(1 + (1 - 2v_1)k_{21}^2) \\
 a_{up1} &= 1 + k_{21}^2 - 2v_1k_{21}(k_{11} + k_{21}) \\
 a_{wq1} &= 2(1 - (k_{11} + k_{21})((1 - v_1)k_{11} - (1 - 2v_1)k_{21})) \\
 a_{uq1} &= 2(1 - v_1)k_{11}k_{21}(k_{11} + k_{21}) \\
 R_{l1} &= 2v_1k_{21}(k_{11} + k_{21}) + (1 + k_{21}^2)((1 - v_1)k_{11}(k_{11} + k_{21}) - 1)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Опираясь на асимптотические формулы (3.10)–(3.12), можно дать строгое обоснование сходимости регуляризованных интегралов (3.8) независимо от ограниченных неизвестных трансформант  $\bar{p}(\beta)$ ,  $\bar{q}(\beta)$ , что позволяет применить развитый ниже метод сведения исходной смешанной задачи к системе сингулярных интегральных уравнений.

В заключение данного раздела необходимо попутно остановиться на свойствах асимптотических функций (3.11), (3.12) на бесконечности, которые определяют характер решения смешанной задачи и особенности в вершине трещины в зависимости от ее скорости  $v = c > 0$ . Все величины  $A_{vs1}$ ,  $a_{vs1}$  ( $v = w, u$ ;  $s = p, q$ ),  $R_{l1}$  (3.10), (3.11) через радикалы  $k_{21}$  (2.2),  $k_{11}$  (2.5) зависят от постоянной дозвуковой скорости  $c < c_{21}$  как параметра конкретной задачи и, стало быть, являются функциями от  $c$ . В этом случае очевидны или легко доказуемы свойства

$$a_{vs1}(c) > 0, \quad v = w, u; \quad s = p, q \tag{3.13}$$

Особую роль в решении смешанной задачи о движении трещины играет функция  $R_{l1}(c)$  (3.12), которая представляет собой аналог функции Релея в одноименной динамической задаче о поверхностных волнах в однородном полупространстве. Нули функции  $R_{l1}(c)$  определяются из иррационального алгебраического уравнения  $R_{l1}(c) = 0$ , которое сводится к следующему известному рациональному алгебраическому уравнению Релея относительно  $x_1 = c^2/c_{21}^2$ :

$$(1 - v_1)x_1^3 - 8(1 - v_1)x_1^2 + 8(2 - v_1)x_1 - 8 = 0 \tag{3.14}$$

Через действительный корень уравнения (3.14)  $x_{1R}$  определяется резонансная скорость  $c_R = c_{21}\sqrt{x_{1R}}$  собственных недиспергирующих волн Релея, движущихся по внешней поверхности двухслойного полупространства.

**4. Базовое решение для слоя-основания.** Базовое решение первой основной задачи для слоя-основания ( $i = 2$ ) должно удовлетворять тем же краевым условиям на границе раздела слоев  $\zeta = 0$ , что и в аналогичной задаче для верхнего слоя, а именно, условиям (3.1):

$$\sigma_{z2} = p(\rho), \quad \tau_{rz2} = q(\rho) \quad \text{при } \zeta = 0 \tag{4.1}$$

Функции  $p(\rho)$ ,  $q(\rho)$  определены формулами (3.2), (3.3).

Подставляя выражения (2.8), (3.2) для напряжений  $\sigma_{z2}$ ,  $\tau_{rz2}$  и функций  $p(\rho)$ ,  $q(\rho)$  в равенства (4.1) и учитывая соотношения (2.9) и  $C_2(\beta) \equiv D_2(\beta) \equiv 0$ , приходим к СФУ относительно  $A_2(\beta)$ ,  $B_2(\beta)$

$$-k_{22}A_2 + n_2B_2 = \bar{p}(\beta), \quad m_2A_2 + s_2B_2 = \bar{q}(\beta) \tag{4.2}$$

Кoeffициенты  $n_2$ ,  $m_2$ ,  $s_2$  определены формулами (2.10) при  $i = 2$ .

Из системы (4.2) находим выражения функций  $A_2(\beta)$ ,  $B_2(\beta)$  и подставляем их в общее решение (2.8) при  $i = 2$ , в результате получаем искомое базовое решение для слоя-основания. Необходимые для дальнейшего использования представления осевых и радиальных перемещений  $w_2(\rho, \zeta)$ ,  $u_2(\rho, \zeta)$  на границе раздела слоев  $\zeta = 0$  имеют вид

$$w_2(\rho, 0) = \int_0^{\infty} \Delta_{w_2}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad u_2(\rho, 0) = \int_0^{\infty} \Delta_{u_2}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta \quad (4.3)$$

$$\Delta_{v_2}(\beta) = E_2^{-1}(1 + \nu_2) b D_{v_2}(\beta), \quad D_{v_2}(\beta) = \Delta_{vp_2}(\beta) \bar{p}(\beta) + \Delta_{vq_2}(\beta) \bar{q}(\beta) \quad (4.4)$$

$$\Delta_{vs_2} = A_{vs_2} = \frac{a_{vs_2}(c)}{R_{I_2}(c)}; \quad v = w, u; \quad s = p, q$$

Функции  $a_{vs_2}(c)$ ,  $R_{I_2}(c)$  от скорости  $c$  как параметра определяются по формулам (3.12) при учете замены  $\nu_1, k_{11}, k_{21}$  на  $\nu_2, k_{12}, k_{22}$  соответственно. Все отмеченные в конце разд. 3 свойства функций  $a_{vs_1}$ ,  $R_{I_1}$  распространяются на функции  $a_{vs_2}$  ( $v = w, u; s = p, q$ ),  $R_{I_2}$  в интервале  $0 < c < c_{22}$ . В частности, уравнение (3.14) при учете замены  $\nu_1, x_1$  на  $\nu_2, x_2 = c^2/c_{22}^2$  является дисперсионным уравнением для слоя-основания (полупространства). Через действительный корень этого уравнения  $x_{2S}$  определяется резонансная скорость  $c_S = c_{22} \sqrt{x_{2S}}$  собственных недиспергирующих волн Стоунли, движущихся по границе слоя и полупространства  $\zeta = 0$ .

**5. Постановка и решение смешанной задачи о движении трещины с каверной при вершине.** Вся неограниченная область  $L = (0 \leq \rho < \infty)$  внешней граничной плоскости  $\zeta = 1$  свободна от нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_{z1} = 0, \quad \tau_{rz1} = 0, \quad \rho \in L \quad (5.1)$$

На границе раздела слоев  $\zeta = 0$  в области контакта берегов движущейся трещины  $L_1 = (0 \leq \rho < \alpha^0)$  должен выполняться пока неизвестный закон трения  $q_T(\rho)$  для касательных напряжений, направленных навстречу движению (со знаком минус), и условия непрерывности осевых перемещений:

$$\tau_{rz1} = \tau_{rz2} = -q_T(\rho), \quad w_1 = w_2, \quad \rho \in L_1 \quad (5.2)$$

В области каверны  $L_2 = (\alpha^0 < \rho < 1)$  заданы осевые и касательные напряжения

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2} = 0, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2} = 0, \quad \rho \in L_2 \quad (5.3)$$

а вне трещины в области  $L_3 = (1 \leq \rho < \infty)$  должны выполняться условия непрерывности осевых и радиальных перемещений

$$w_1 = w_2, \quad u_1 = u_2, \quad \rho \in L_3 \quad (5.4)$$

и нормальных и касательных напряжений

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2}, \quad \rho \in L_3 \quad (5.5)$$

Базовые решения разд. 3, 4 автоматически удовлетворяют всем краевым условиям (5.1) и (5.5) при произвольных трансформантах  $\bar{p}(\beta)$ ,  $\bar{q}(\beta)$  осевых и касательных напряжений на границе раздела слоев  $\zeta = 0$ , которые подлежат определению из краевых условий (5.2)–(5.4). Синтез всех этих условий должен обеспечить выбор закона сил

трения  $q_T(\rho)$  ( $0 \leq \rho < \alpha^0$ ), под которым понимается сведение решения исходной смешанной задачи (5.1)–(5.5) к единственной однозначно разрешимой системе интегральных уравнений. Используемый при этом математический аппарат позволяет однозначно определить функцию  $q_T(\rho)$ .

Далее будет установлено, что синтезирующим краевые условия и вместе с тем удовлетворяющим условию осевой симметрии задачи является обобщенный закон трения Кулона

$$q_T(\rho) = \rho(\mu p_T(\rho) + Q), \quad \rho \in L_1 \tag{5.6}$$

Здесь  $p_T(\rho)$  – интенсивность давления трущихся слоев друг на друга в области контакта берегов движущейся трещины,  $\mu$  – безразмерный постоянный коэффициент трения,  $Q$  – касательная составляющая постоянной силы сцепления слоев. Закон трения (5.6) будет востребован на заключительном этапе вывода системы разрешающих интегральных уравнений, а пока начинаем последовательные преобразования краевых условий (5.2)–(5.4), полагая функцию  $q_T(\rho)$  произвольной.

Подставляя выражения (3.2), (3.8), (4.3) для интегральных представлений напряжений и базовых решений для перемещений в плоскости трещины  $\zeta = 0$  в краевые условия (5.2)–(5.4), приходим к системе тройных интегральных уравнений относительно трансформант Ганкеля  $\bar{p}(\beta)$ ,  $\bar{q}(\beta)$

$$\int_0^\infty \beta \bar{q}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = -q_T(\rho), \quad \int_0^\infty D_{w12}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_1 \tag{5.7}$$

$$\int_0^\infty \beta \bar{p}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^\infty \beta \bar{q}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_2 \tag{5.8}$$

$$\int_0^\infty D_{w12}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^\infty D_{u12}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_3 \tag{5.9}$$

где

$$D_{v12}(\beta) = \Delta_{vp12}(\beta) \bar{p}(\beta) + \Delta_{vq12}(\beta) \bar{q}(\beta); \quad v = w, u \tag{5.10}$$

$$\Delta_{vs12}(\beta) = \Delta_{vs1}(\beta) - \chi \Delta_{vs2}(\beta); \quad v = w, u; \quad s = p, q \tag{5.11}$$

Функции  $\Delta_{vs1}(\beta)$ ,  $\Delta_{vs2}(\beta)$  определены в разд. 3, 4 формулами (3.9), (4.4).

В системе уравнений (5.7)–(5.9) переходим от исходных трансформант  $\bar{p}(\beta)$ ,  $\bar{q}(\beta)$  к новым неизвестным трансформантам  $\bar{f}(\beta)$ ,  $\bar{g}(\beta)$  по формулам

$$\bar{f}(\beta) = D_{u12}(\beta), \quad \bar{g}(\beta) = D_{w12}(\beta) \tag{5.12}$$

соответствующим локальным функциям  $f(\rho)$ ,  $g(\rho)$ :

$$f(\rho) = \begin{cases} f_1(\rho), & \rho \in L_1 \\ f_2(\rho), & \rho \in L_2; \\ 0, & \rho \in L_3 \end{cases} \quad g(\rho) = \begin{cases} g_2(\rho), & \rho \in L_2 \\ 0, & \rho \in L_1 \cup L_3 \end{cases} \tag{5.13}$$

трансформанты которых

$$\bar{f}(\beta) = \bar{f}_1(\beta) + \bar{f}_2(\beta), \quad \bar{g}(\beta) = \bar{g}_2(\beta) \quad (5.14)$$

определяются интегралами Ганкеля

$$\bar{f}_k(\beta) = \int_{L_k} \rho f_k(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad k = 1, 2; \quad \bar{g}_2(\beta) = \int_{L_2} \rho g_2(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho \quad (5.15)$$

Равенства (5.12) при учете конструктивных выражений функций  $D_{v12}(\beta)$  ( $v = w, u$ ) (5.10) представляют собой СФУ относительно трансформант  $\bar{p}(\beta)$ ,  $\bar{q}(\beta)$ . Из этой СФУ находим выражения исходных трансформант  $\bar{p}(\beta)$ ,  $\bar{q}(\beta)$  через новые  $\bar{f}(\beta)$ ,  $\bar{g}(\beta)$ :

$$\bar{p}(\beta) = N_u(\beta), \quad \bar{q}(\beta) = N_w(\beta) \quad (5.16)$$

$$N_v(\beta) = \Delta_{vf}(\beta)\bar{f}(\beta) + \Delta_{vg}(\beta)\bar{g}(\beta), \quad v = w, u \quad (5.17)$$

где

$$\Delta_{wf} = \frac{\Delta_{wp12}}{\Delta_{pq}}, \quad \Delta_{wg} = -\frac{\Delta_{up12}}{\Delta_{pq}}, \quad \Delta_{uf} = -\frac{\Delta_{wq12}}{\Delta_{pq}}, \quad \Delta_{ug} = \frac{\Delta_{uq12}}{\Delta_{pq}}, \quad (5.18)$$

$$\Delta_{pq} = \Delta_{wp12}\Delta_{uq12} - \Delta_{wq12}\Delta_{up12}$$

Подставляя выражения (5.12) и (5.16) в уравнения (5.7)–(5.9), получаем следующую систему тройных интегральных уравнений относительно новых трансформант  $\bar{f}(\beta)$ ,  $\bar{g}(\beta)$ :

$$\int_0^\infty \beta N_w(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = -q_T(\rho), \quad \int_0^\infty \bar{g}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_1 \quad (5.19)$$

$$\int_0^\infty \beta N_u(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^\infty \beta N_w(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_2 \quad (5.20)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^\infty \bar{f}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_3 \quad (5.21)$$

Далее проводим следующие преобразования уравнений (5.19)–(5.21). Первое уравнение (5.19) интегрируем по  $\rho$  в пределах от 0 до  $\rho$ , а второе – дифференцируем по  $\rho$ ; первое уравнение (5.20) умножаем на  $\rho$  и интегрируем по  $\rho$  в пределах от  $\alpha^0$  до  $\rho$ , а затем делим на  $\rho$ ; второе уравнение (5.20) интегрируем по  $\rho$  в пределах от  $\alpha^0$  до  $\rho$ ; первое уравнение (5.21) дифференцируем по  $\rho$ , а второе – умножаем на  $\rho$  и дифференцируем по  $\rho$ , а затем делим на  $\rho$ . В результате преобразованные уравнения приобретают вид

$$\int_0^\infty N_w(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = F(\rho) + C_1, \quad \int_0^\infty \beta \bar{g}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_1 \quad (5.22)$$

$$\int_0^\infty N_u(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = \frac{D_2}{\rho}, \quad \int_0^\infty N_w(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = C_2, \quad \rho \in L_2 \quad (5.23)$$

$$\int_0^{\infty} \beta \bar{g}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^{\infty} \beta \bar{f}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_3 \quad (5.24)$$

где

$$F(\rho) = \int_0^{\rho} q_T(x) dx \quad (5.25)$$

$C_1, C_2, D_2$  – произвольные постоянные, которые определяются ниже. По теореме обращения Ганкеля трансформанты  $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta)$ , (5.14), (5.15) обращают в тождества второе уравнение (5.22) и оба уравнения (5.24), и поэтому последние исключаются из дальнейшего рассмотрения. Подчеркнем, что далее ссылки на формулы (5.22) означают только первое уравнение, а тождество сыграло свою роль и больше не требуется.

Оставшиеся уравнения (5.22), (5.23) на ограниченных смежных контурах  $L_1 = (0 \leq \rho < \alpha^0)$ ,  $L_2 = (\alpha^0 < \rho < 1)$  при учете формул (5.14) образуют замкнутую систему для определения неизвестных трансформант  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{g}_2$ , (5.15). Для дальнейшего преобразования этой системы уравнений необходимо выделить главные члены функций (5.18) на бесконечности при  $\beta \rightarrow \infty$

$$\Delta_{vr}(\beta) = A_{vr} + \Delta_{vr}^*(\beta); \quad v = w, u; \quad r = f, g \quad (5.26)$$

где

$$\begin{aligned} A_{wf} &= \frac{A_{wp12}}{A_{pq}}, \quad A_{wg} = -\frac{A_{up12}}{A_{pq}}, \quad A_{uf} = -\frac{A_{wq12}}{A_{pq}}, \quad A_{ug} = \frac{A_{uq12}}{A_{pq}} \\ A_{pq} &= A_{wp12}A_{uq12} - A_{wq12}A_{up12} \\ A_{wp12} &= -(A_{wp1} + \chi A_{wp2}), \quad A_{wq12} = A_{wq1} - \chi A_{wq2} \\ A_{up12} &= A_{up1} - \chi A_{up2}, \quad A_{uq12} = -(A_{uq1} + \chi A_{uq2}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Величины  $A_{vs1}, A_{vs2}$  ( $v = w, u; s = p, q$ ), представляющие собой иррациональные алгебраические функции от скорости  $c$ , определены формулами (3.12), (4.4).

Определяемые по формулам (5.26) функции  $\Delta_{vr}^*(\beta) = \Delta_{vr}(\beta) - A_{vr}$  при  $\beta \rightarrow \infty$  имеют порядки бесконечно малых функций:

$$\Delta_{vr}^*(\beta) = O(\exp(-2\lambda k_2 \beta)); \quad v = w, u; \quad r = f, g; \quad k_2 = \min(k_{21}, k_{22}) \quad (5.28)$$

На систему интегральных уравнений (5.22), (5.23) в развернутом виде при учете представлений функций  $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta), N_v(\beta), \Delta_{vr}(\beta)$  и асимптотики  $\Delta_{vr}^*(\beta)$  по формулам (5.14), (5.17), (5.26), (5.28) полностью распространяется специальный математический аппарат исследования аналогичной системы интегральных уравнений в основной смешанной задаче теории упругости<sup>1</sup>. Применяя его и учитывая при этом синте-

<sup>1</sup> *Никишин В.С.* Корректная постановка и численное решение основных и смешанных задач теории упругости для многослойных и непрерывно-неоднородных сред: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.07. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 413 с.

зирующий закон трения  $q_T(\rho)$  (5.6) в формуле  $F(\rho)$  (5.25), сводим развернутую систему интегральных уравнений (5.22), (5.23) для трансформант  $\bar{f}_1(\beta)$ ,  $\bar{f}_2(\beta)$ ,  $\bar{g}_2(\beta)$  (5.15) к следующей разрешающей исходную смешанную задачу о движущейся трещине системе трех сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с ядрами Коши для функций действительного переменного  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$A_{wp12}\varphi_1(x) - \frac{A_{wg12}\mu x}{\pi} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\varphi_1(t)}{t-x} dt + \frac{A_{pq}}{\pi} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} K_{11}(x, t)\varphi_1(t) dt + \\ + \frac{2A_{pq}}{\pi} \int_{\alpha^0}^1 \frac{K_{12}(x, t)\varphi_2(t) + K_{13}(x, t)\varphi_3(t)}{\sqrt{t-\alpha^0}} dt = \frac{2A_{pq}}{\pi}(Qx^2 + C_1), \quad -\alpha^0 \leq x \leq \alpha^0 \quad (5.29)$$

$$A_{wp12}\varphi_2(x) - \frac{A_{up12}}{\pi} \int_{\alpha^0}^1 \frac{\varphi_3(t)}{t-x} dt + \chi_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; x) = \frac{2A_{pq}}{\pi} \frac{C_2 x}{\sqrt{x^2 - \alpha^{02}}}, \quad \alpha^0 < x \leq 1 \quad (5.30)$$

$$A_{uq12}\varphi_3(x) + \frac{A_{wg12}}{\pi} \int_{\alpha^0}^1 \frac{\varphi_2(t)}{t-x} dt + \chi_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; x) = \frac{2A_{pq}}{\pi} \frac{D_2}{\sqrt{x^2 - \alpha^{02}}}, \quad \alpha^0 < x \leq 1 \quad (5.31)$$

Здесь

$$\chi_j(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; x) = \frac{2A_{pq}}{\pi} \left( \int_0^{\alpha^0} \frac{K_{j1}(x, t)\varphi_1(t)}{\sqrt{x-\alpha^0}} dt + \right. \\ \left. + \int_{\alpha^0}^1 \frac{K_{j2}(x, t)\varphi_2(t) + K_{j3}(x, t)\varphi_3(t)}{\sqrt{(x-\alpha^0)(t-\alpha^0)}} dt \right), \quad j = 2, 3$$

$$K_{11} = G_{0011} - \mu x G_{1011}, \quad K_{12} = A_{wf} t \eta_1(x, t) + G_{0112} - \mu x t G_{1012}$$

$$K_{13} = A_{wg} / \sqrt{\alpha^0 + t} + G_{0113} - \mu x (A_{ug} x \eta_1(x, t) + G_{1113}) \quad (5.32)$$

$$K_{21} = A_{wf} x \eta_1(x, t) + x G_{0021}, \quad K_{22} = x t G_{0022} + A_{wf} M_{22}, \quad K_{23} = x G_{0123} + A_{wg} M_{23}$$

$$K_{31} = A_{uf} / \sqrt{\alpha^0 + x} + G_{1031}, \quad K_{32} = t G_{1032} + A_{ug} M_{32}, \quad K_{33} = G_{1133} + A_{ug} M_{33}$$

$$G_{kmjn} = \int_0^{\infty} b_{kmjn} S_{kj}(x, \beta) S_{mn}(t, \beta) d\beta; \quad k, m = 0, 1; \quad j, n = 1, 2, 3$$

$$b_{0011} = b_{0021} = b_{0022} = b_{0112} = \Delta_{wf}^*(\beta), \quad b_{0113} = b_{0123} = \Delta_{wg}^*(\beta)$$

$$b_{1011} = b_{1012} = b_{1031} = b_{1032} = \Delta_{uf}^*(\beta), \quad b_{1113} = b_{1133} = \Delta_{ug}^*(\beta)$$

$$S_{01}(x, \beta) = \cos(x\beta), \quad S_{11}(x, \beta) = \sin(x\beta)$$

$$S_{0j}(x, \beta) = \frac{J_0(\alpha^0 \beta)}{\sqrt{x + \alpha^0}} - \beta \sqrt{x - \alpha^0} \int_{\alpha^0 \sqrt{x^2 - \rho^2}}^x \frac{J_1(\rho \beta)}{\rho \sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho, \quad j = 2, 3$$

$$S_{1j}(x, \beta) = \frac{\alpha^0 J_1(\alpha^0 \beta)}{\sqrt{x + \alpha^0}} + \beta \sqrt{x - \alpha^0} \int_{\alpha^0 \sqrt{x^2 - \rho^2}}^x \frac{\rho J_0(\rho \beta)}{\rho \sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho, \quad j = 2, 3 \tag{5.33}$$

$$M_{jj} = \frac{2m_{jj}(x, t)}{\pi \eta_2^+(x, t)}, \quad j = 2, 3; \quad M_{23} = \frac{\eta_2^-(x, t)}{t - x} \eta_3(x, t), \quad M_{32} = -\frac{\eta_2^-(x, t)}{t - x} \eta_3(t, x)$$

$$m_{22} = \frac{xt}{2(x^2 - t^2)} \left( \frac{1}{x} \eta_4(x) - \frac{1}{t} \eta_4(t) \right), \quad m_{33} = -\alpha^0 + \frac{1}{2(x^2 - t^2)} (x \eta_4(x) - t \eta_4(t))$$

$$\eta_1(x, t) = \frac{1}{t^2 - x^2} \sqrt{\frac{\alpha^{02} - x^2}{\alpha^0 + t}}, \quad \eta_2^\pm(x, t) = \sqrt{(x \pm \alpha^0)(t \pm \alpha^0)}$$

$$\eta_3(x, t) = \frac{x}{t + x} \sqrt{\frac{t^2 - \alpha^{02}}{x^2 - \alpha^{02}}} - \frac{1}{2}, \quad \eta_4(x, t) = (x^2 - \alpha^{02}) \ln \frac{x + \alpha^0}{x - \alpha^0}$$

Отметим, что функции  $M_{jj}(x, t)$  (5.33), определенные в квадрате  $\alpha^0 \leq xt \leq 1$ , имеют устранимые подвижные особенности на диагонали  $t = x$ . Значения этих функций при  $t = x$  принимаются равными их предельным значениям при  $t \rightarrow x$ , которые определяются по правилу Лопиталья.

Неизвестные трансформанты  $\bar{f}_1(\beta)$ ,  $\bar{f}_2(\beta)$ ,  $\bar{g}_2(\beta)$  (5.15) выражаются через функции  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), удовлетворяющие системе СИУ (5.29)–(5.31), по формулам

$$\bar{f}_1(\beta) = \int_0^{\alpha^0} \varphi_1(x) \cos(x\beta) dx, \quad \bar{f}_2(\beta) = \int_{\alpha^0}^1 \frac{x \varphi_2(x) S_{02}(x, \beta)}{\sqrt{x - \alpha^0}} dx$$

$$\bar{g}_2(\beta) = \int_{\alpha^0}^1 \frac{\varphi_3(x) S_{12}(x, \beta)}{\sqrt{x - \alpha^0}} dx \tag{5.34}$$

Из теории тождественного преобразования системы уравнений (5.22), (5.23) для трансформант  $\bar{f}(\beta) = \bar{f}_1(\beta) + \bar{f}_2(\beta)$ ,  $\bar{g}(\beta) = \bar{g}_2(\beta)$  (5.15) в систему СИУ (5.29)–(5.31) автоматически следует, что трансформанты  $\bar{f}(\beta)$ ,  $\bar{g}(\beta)$  при учете формул (5.34) обращают в тождества все уравнения (5.22), (5.23) и исходной системы (5.19)–(5.21), за возможным исключением уравнений (5.21). Последние уравнения в процессе преобразований продифференцированы по  $\rho$  и поэтому подлежат проверке путем подстановки в них трансформант  $\bar{f}_1(\beta)$ ,  $\bar{f}_2(\beta)$ ,  $\bar{g}_2(\beta)$  (5.34). Проверка показала, что уравнения (5.21) удовлетворяются только при дополнительных условиях

$$\int_0^{\alpha^0} \varphi_1(x) dx = 0, \quad \int_{\alpha^0}^1 \frac{x \varphi_2(x)}{\sqrt{x^2 - \alpha^{02}}} dx = 0, \quad \int_{\alpha^0}^1 \frac{\varphi_3(x)}{\sqrt{x^2 - \alpha^{02}}} dx = 0 \tag{5.35}$$

из которых определяются произвольные постоянные  $C_1, C_2, D_2$  в правой части системы СИУ (5.29)–(5.31).

Чтобы удовлетворить условиям (5.35), решение системы СИУ (5.29)–(5.31) ищем в форме

$$\varphi_j(x) = \varphi_{j1}(x) + C_1\varphi_{j2}(x) + C_2\varphi_{j3}(x) + D_2\varphi_{j4}(x), \quad j = 1, 2, 3 \quad (5.36)$$

где  $\varphi_{jn}(x)$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) – частные решения системы при учете в ее правой части соответственно следующих равенств: 1)  $C_1 = C_2 = D_2 = 0$ ; 2)  $Q = 0$ ,  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = D_2 = 0$ , 3)  $Q = 0$ ,  $C_2 = 1$ ,  $C_1 = D_2 = 0$ , 4)  $Q = 0$ ,  $D_2 = 1$ ,  $C_1 = C_2 = 0$ .

Кроме определенных выше постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  в правой части системы СИУ (5.29)–(5.31) имеется и теоретически неопределимая постоянная  $Q > 0$ , представляющая собой величину направленной навстречу движению трещины касательной силы, зависящей от силы сцепления (адгезии) поверхностей разнородных слоев. Однако структура системы СИУ (5.29)–(5.31) позволяет построить решение в случае произвольной постоянной  $Q > 0$  в форме

$$\varphi_j(x) = Q\varphi_j^0(x), \quad j = 1, 2, 3 \quad (5.37)$$

где  $\varphi_j^0(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – частное решение при  $Q = 1$ . Попутно следует отметить гипотетический случай  $Q = 0$ , при котором система СИУ (5.29)–(5.31) имеет только тривиальное решение  $\varphi_j^0(x) \equiv 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ), что свидетельствует о вырождении исходной задачи и этим самым подчеркивает особую роль силы  $\vec{Q}$  в синтезирующем законе трения (5.6).

Далее кратко охарактеризуем метод построения решения СИУ (5.29)–(5.31) и исследования его особенностей. Процесс начинается с построения и исследования особенностей решения характеристической системы СИУ (5.29)–(5.31) в комплексной форме

$$A_{wp12}\varphi_1(x) - i\frac{A_{wq12}\mu x}{\pi i} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\varphi_1(t)}{t-x} dt = \frac{2A_{pq}}{\pi}(Qx^2 + C_1), \quad -\alpha^0 \leq x \leq \alpha^0 \quad (5.38)$$

$$A\varphi(x) + \frac{B}{\pi i} \int_{\alpha^0}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = A_{pq}f(x), \quad \alpha^0 \leq x \leq 1 \quad (5.39)$$

Здесь

$$A = \begin{vmatrix} A_{wp12} & 0 \\ 0 & A_{uq12} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -iA_{up12} \\ iA_{wq12} & 0 \end{vmatrix}, \quad \varphi(x) = \begin{vmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{vmatrix} \quad (5.40)$$

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_2(x) \\ f_3(x) \end{vmatrix}, \quad f_j(x) = \frac{f_j^0(x)}{\pi\sqrt{x-\alpha^0}}, \quad j = 2, 3; \quad f_2^0(x) = \frac{C_2x}{\sqrt{x+\alpha^0}}, \quad f_3^0(x) = \frac{D_2}{\sqrt{x+\alpha^0}}$$

Уравнения (5.38) и (5.39) взаимно независимы, обладают нулевыми индексами и имеют единственные замкнутые аналитические решения, которые строятся по известной теории [3, 4]. При этом уравнение (5.39), (5.40) в матричной форме сводится к задаче Римана – Гильберта. В процессе построения замкнутых аналитических решений характеристических СИУ (5.38) и (5.39), (5.40) выявляются и выделяются в явном виде их особенности на концах отрезков интегрирования  $x = \alpha^0$  и  $x = 1$ :

$$\varphi_1^+(x) \sim c^+ \ln(\alpha^0 - x), \quad \varphi_1^-(x) \sim c^-(\alpha^0 - x)^{-\theta} \quad \text{при } x \rightarrow \alpha^0 - 0 \quad (5.41)$$

$$\varphi_j^+(x) \sim c \ln(1 - x), \quad j = 2, 3 \quad \text{при } x \rightarrow 1 - 0$$

Верхние индексы функций  $\Phi_j^\pm(x)$  соответствуют знакам отношения  $\xi = A_{wq12}/A_{wp12} = \pm|\xi|$  в диапазоне изменения механических характеристик задачи, постоянная  $\theta$  определена формулой (7.7) в приложении 1, а конкретные величины постоянных  $c^\pm$ ,  $c$  далее не потребуются.

Замкнутое аналитическое решение системы характеристических СИУ (5.38), (5.39) применяется для регуляризации полной системы СИУ (5.29)–(5.31) по методу Карлемана – Векуа. При этом регулярные ядра и свободные члены на концах  $x = \alpha^0, 1$  сохраняют корневые и приобретают новые особенности (5.41), которые после их выделения устраняются вместе с корневыми особенностями путем тождественных преобразований. В результате регуляризации система СИУ (5.29)–(5.31) сводится к однозначно разрешимой системе трех регулярных интегральных уравнений типа Фредгольма второго и третьего рода с непрерывными ядрами относительно функций  $\Phi_j(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), связанных с искомыми функциями  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) исходной системы СИУ соотношениями

$$\varphi_1^+ = \Phi_1^+ \ln(\alpha^0 - x), \quad \varphi_1^- = \Phi_1^-(\alpha^0 - x)^{-\theta}, \quad \varphi_j^\pm = \Phi_j^\pm \ln(1 - x), \quad j = 2, 3 \quad (5.42)$$

Подставляя трансформанту  $\bar{p}(\beta)$ , выраженную по формулам (5.16), (5.17), (5.14) через трансформанты  $\bar{f}_1(\beta)$ ,  $\bar{f}_2(\beta)$ ,  $\bar{g}_2(\beta)$  (5.34), в интеграл Ганкеля для  $\sigma_z(\rho) = p(\rho)$  (3.2) проводим ряд последовательных преобразований двойных интегралов и в результате при учете соотношений (5.42) устанавливаем главные члены нормальных напряжений  $\sigma_z(\rho)$  на контурах каверны  $\alpha^0 < \rho < 1$ :

$$\sigma_z(\rho) = \frac{A_{uf}\Phi_1^+(\alpha^0)\gamma_1^+(\rho, \alpha^0) + A_{ug}\Phi_3^+(\alpha^0)\gamma_3(\alpha^0)}{\sqrt{\alpha^{02} - \rho^2}} + O(1) \text{ при } \rho \rightarrow \alpha^0 - 0 \quad (5.43)$$

$$\sigma_z(\rho) = -\frac{A_{ug}\Phi_3^+(1)\ln|1 - \rho|}{\sqrt{\rho^2 - 1}} + O(1) \text{ при } \rho \rightarrow 1 + 0 \quad (5.44)$$

где

$$\gamma_1^+ = \ln(\alpha^{02} - \rho^2), \quad \gamma_1^- = \frac{C^-(1 - 2\theta)}{2^\theta(\alpha^{02} - \rho^2)^\theta}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2}\alpha^0 \ln(1 - \alpha^0) \quad (5.45)$$

$$0 < C^- = \int_0^{\alpha^0} \frac{dt}{(\alpha^{02} - t^2)^\theta} < \infty$$

Из предельных формул (5.43)–(5.45) при учете неравенства  $\ln|1 - \rho| < 0$  заключаем, что критерий существования каверны  $\alpha^0 < \rho < 1$  для обоих вариантов решения сводится к следующим условиям (см. разд. 1):

$$\Phi_1^2(\alpha^0) + \Phi_3^2(\alpha^0) = 0, \quad A_{ug}\Phi_3(1) > 0 \quad (5.46)$$

при которых нормальные напряжения  $\sigma_z(\rho)$  на внутреннем контуре  $\rho = \alpha^0$  ограничены, а на контуре вершины трещины  $\rho = 1$  являются растягивающими (положительного знака) и претерпевают бесконечный разрыв  $\sigma_z(1) = +\infty$ . Анализируя формулы (5.27), (3.12), (3.13), (4.4), можно убедиться, что величина  $A_{ug}$  как функция от скорости  $c$  меняет знак в точке резонанса  $c = c_R$  волн Релея в случае  $c_{21} < c_{22}$  или в точке

$c = c_S$  волн Стоунли в случае  $c_{22} < c_{21}$ . В обоих случаях в промежулке дорезонансной скорости  $0 < c < \min(c_R, c_S)$  имеем  $A_{уг} < 0$ , а в промежулке пострезонансной скорости  $\min(c_R, c_S) < c < \min(c_{21}, c_{22})$  имеем  $A_{уг} > 0$ . В случае резонанса волн Релея или Стоунли при  $c \rightarrow \min(c_R \mp 0, c_S \mp 0)$  имеем  $A_{уг} \rightarrow \mp \infty$ .

Следует пояснить, что переход к резонансу волн Релея или Стоунли при  $c \rightarrow c_v$  ( $v = r, s$ ) сопровождается секулярным ростом амплитуд  $A$  колебания всех напряжений и перемещений по гиперболическому закону  $A = K/(c - c_v)$  ( $K = \text{const}$ ) и при  $c = c_v$  завершается катастрофическим глобальным взрывом, при котором все напряжения и перемещения обращаются в бесконечность с мгновенной переменной знака.

На основе критерия (5.46) численно определяется величина внутреннего радиуса каверны  $\alpha^0$  и подбираются соответствующие этому случаю данные параметры задачи (1.1), (1.2).

Для обоснования корректности построенного выше решения, кроме удовлетворения критерию (5.46), требуется, чтобы непрерывные осевые напряжения  $\sigma_z(\rho)$  на контактирующих берегах трещины были сжимающими (отрицательного знака)  $\sigma_z(\rho) < 0$  ( $0 \leq \rho \leq \alpha^0$ ). Последнее условие, которое должно свидетельствовать об отсутствии промежуточных каверн (разд. 1), можно проверить только численно.

**6. Задача о движении трещины поперечного сдвига без каверны.** Задача о движении трещины поперечного сдвига без каверны рассматривается как частный случай задачи из разд. 5, в которой

$$\alpha^0 \equiv 1, \quad \bar{f}_2(\beta) \equiv \bar{g}_2(\beta) \equiv 0, \quad \varphi_2(x) \equiv \varphi_3(x) \equiv 0 \quad (6.1)$$

Ниже в разд. 6 при ссылках на формулы разд. 5 всегда имеется в виду их частный случай, соответствующий выполнению условий (6.1).

Рассматриваемая задача сводится к СИУ (5.29) относительно функции  $\varphi_1(x)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Трансформанта  $\bar{f}_1(\beta)$  выражается через  $\varphi_1(x)$  по формуле (5.34). Постоянная  $C_1$  определяется из дополнительного условия (5.35) для  $\varphi_1(x)$ . Чтобы удовлетворить этому условию, решение СИУ (5.29) ищем в форме

$$\varphi_1(x) = \varphi_{11}(x) + C_1 \varphi_{12}(x) \quad (6.2)$$

где  $\varphi_{1j}(x)$  ( $j = 1, 2$ ) – частные решения СИУ (5.29) соответственно при 1)  $C_1 = 0$ , 2)  $Q = 0$ ,  $C_1 = 1$ . Подставляя функцию  $\varphi_1(x)$  в равенство (5.35), получаем уравнение относительно  $C_1$ , из которого находим

$$C_1 = \int_0^1 \varphi_{11}(x) dx \left( \int_0^1 \varphi_{12}(x) dx \right)^{-1} \quad (6.3)$$

Метод построения решения СИУ (5.29) и исследования его особенностей подробно описан в разд. 5. Замкнутое решение характеристического СИУ (5.38) строится в двух формах  $\varphi_1^\pm(x)$ , имеющих при  $x \rightarrow 1$  особенности (5.41). Полное СИУ (5.29) в результате регуляризации сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода в двух формах относительно непрерывных функций  $\Phi_1^\pm(x)$ , связанных с решениями  $\varphi_1^\pm(x)$  исходной СИУ (5.29) по формулам (5.42).

Главные члены напряжений  $\sigma_z(\rho)$  на контуре вершины трещины  $\rho = 1$  для обоих вариантов решения определяются по формуле (5.44)

$$\sigma_z(\rho) = \frac{A_{uf}\Phi_1^+(1)\gamma_1^+(\rho, 1)}{\sqrt{1-\rho^2}} + O(1) \text{ при } \rho \rightarrow 1-0 \tag{6.4}$$

Функции  $\gamma_1^+(\rho, 1)$  определяются по формуле (5.45).

Из предельной формулы (6.4) при учете равенства  $\gamma_1^+ = \ln(1-\rho^2) < 0$  заключаем, что необходимый критерий корректности построенного решения сводится к условиям

$$A_{uf}\Phi_1^+(1) > 0, \quad A_{uf}\Phi_1^-(1) < 0 \tag{6.5}$$

$$\sigma_z(\rho) < 0, \quad 0 \leq \rho < 1 \tag{6.6}$$

Из условий (6.5) отбираются данные параметры задачи (1.1), (1.2), а условие (6.6) должно численно подтвердить, что напряжения  $\sigma_z(\rho)$  на берегах трещины  $0 \leq \rho < 1$  являются сжимающими (разд. 1).

Знак  $A_{uf}(c)$  как функции от  $c$ , в отличие от знака  $A_{ug}(c)$  в задаче разд. 5, существенно зависит от величины параметра  $\chi$  (1.1) по сравнению с величиной отношения  $A_{12}(c^0) = A_{wq1}(c^0)/A_{wq2}(c^0)$ , где  $c^0$  – произвольно взятая дорезонансная скорость  $0 < c^0 < \min(c_R, c_S)$ . В случае  $c_{21} < c_{22}$ : 1) при  $\chi > A_{12}(c^0)$  ( $0 < c^0 < c_R$ ) имеем  $A_{uf}(c) > 0$  ( $0 < c < c^0$ ),  $A_{uf}(c) < 0$  ( $c^0 < c < c_R$ ); 2) при  $\chi < A_{12}(c^0)$  имеем  $A_{uf}(c) < 0$  ( $0 < c < c_R$ ). В случае  $c_{22} < c_{21}$ : 1) при  $\chi > A_{12}(c^0)$  ( $0 < c^0 < c_S$ ) имеем  $A_{uf}(c) > 0$  ( $0 < c < c_S$ ); 2) при  $\chi < A_{12}(c^0)$  имеем  $A_{uf}(c) < 0$  ( $0 < c < c^0$ ),  $A_{uf}(c) > 0$  ( $c^0 < c < c_S$ ). В случае резонанса  $A_{uf}(c) \rightarrow \mp\infty$  при  $c \rightarrow c_R \mp 0$  и  $A_{uf}(c) = \pm\infty$  при  $c \rightarrow c_S \mp 0$ .

Резонанс волн Релея и Стоунли в данном решении имеет точно такой же характер, как в решении задачи разд. 5.

**7. Приложение 1. Замкнутое решение характеристической системы СИУ (5.38)–(5.40).** Строим решение уравнения (5.38). Сначала для упрощения выкладок перейдем от уравнения (5.38) к эквивалентному уравнению

$$a(x)\varphi_1(x) + \frac{b(x)}{\pi i} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\varphi_1(t)}{t-x} dt = \tilde{f}_1(x), \quad -\alpha^0 \leq x \leq \alpha^0 \tag{7.1}$$

где

$$a(x) = \frac{A_{wp12}}{\Delta(x)}, \quad b(x) = -\frac{iA_{wq12}\mu x}{\Delta(x)}, \quad \tilde{f}_1(x) = \frac{2A_{pq}}{\pi\Delta(x)}(Qx^2 + c_1) \tag{7.2}$$

$$\Delta^2(x) = A_{wp12}^2 + (A_{wq12}\mu x)^2, \quad a^2(x) - b^2(x) = 1$$

Решение СИУ (7.1) ищем в следующей форме [3]:

$$\varphi_{1h}(x) = a(x)\tilde{f}_1(x) - \frac{b(x)Z(x)}{\pi i} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\tilde{f}_1(t)dt}{Z(t)(t-x)} + b(x)Z(x)P_{\kappa-1}(x) \tag{7.3}$$

Через  $\varphi_{1h}(x)$  обозначено решение характеристического СИУ (7.1),  $Z(x)$  – каноническая функция этого уравнения:

$$Z(x) = (x + \alpha^0)^{\lambda_1} (x - \alpha^0)^{\lambda_2} \exp(\Gamma(x))$$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\ln G(t)}{t-x} dt, \quad G(x) = \frac{a(x) - b(x)}{a(x) + b(x)} \quad (7.4)$$

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – целые числа, подчиненные условиям

$$-1 \leq \alpha_k + \lambda_k < 1, \quad k = 1, 2 \quad (7.5)$$

$$\alpha_1 = \operatorname{Re}\left(-\frac{\ln G(-\alpha^0)}{2\pi i}\right), \quad \alpha_2 = \operatorname{Re}\left(\frac{\ln G(\alpha^0)}{2\pi i}\right)$$

$\kappa = -(\lambda_1 + \lambda_2)$  – индекс СИУ (7.1),  $P_{\kappa-1}(x)$  – полином степени  $\kappa-1$  с произвольными коэффициентами, причем при  $\kappa \leq 0$  следует положить  $P_{\kappa-1}(x) \equiv 0$ .

По формуле (7.4) при учете соотношения (7.2) находим

$$G(x) = \frac{1 + i\xi\mu x}{1 - i\xi\mu x}, \quad \xi = \frac{A_{wq12}}{A_{wp12}}, \quad |G(x)| = 1, \quad \ln G(x) = 2i \operatorname{arctg}(\xi\mu x) \quad (7.6)$$

Анализируя величины  $A_{wq12} = A_{wq1} - \chi A_{wq2}$  и  $A_{wp12} = -(A_{wp1} + \chi A_{wp2})$  как функции от  $c < \min(c_{12}, c_{22})$ , можно установить, что их отношение  $\xi$  в диапазоне изменения упругих и скоростных характеристик двухслойного полупространства меняет знак. Следовательно, необходимо искать два варианта решения уравнения (7.1): при  $\xi > 0$  и при  $\xi < 0$ . Для обоих вариантов решения  $\varphi_{1h}^{\pm}(x)$  (7.3), соответственно отмечаемых верхними индексами  $\pm$ , по формулам (7.4)–(7.6) находим

$$\Gamma(x) = \pm \tilde{\Gamma}(x), \quad \tilde{\Gamma}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \operatorname{arctg}(|\xi|\mu t) \frac{dt}{t-x}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \pm\theta, \quad \theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(|\xi|\mu\alpha^0), \quad 0 < \theta < \frac{1}{2} \quad (7.7)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \kappa = -(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

В обоих случаях  $\xi > 0$  и  $\xi < 0$  характеристическое СИУ (7.1) имеет нулевой индекс и его замкнутые варианты решения  $\varphi_{1h}^{\pm}(x)$  определяются по формуле (7.3) при учете соотношений и тождества  $P_{\kappa-1}(x) \equiv 0$ . Имеем

$$\varphi_{1h}^{\pm}(x) = \frac{A_{wp12}}{\Delta(x)} \tilde{f}_1(x) + \frac{A_{wq12}\mu x \exp(\pm \tilde{\Gamma}(x))}{\pi \Delta(x)} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\tilde{f}_1(t) \exp(\mp \tilde{\Gamma}(t))}{t-x} dt \quad (7.8)$$

Далее исследуем и выделяем в явном виде особенности решений  $\varphi_{1h}^{\pm}(x)$  (7.8) на концах  $\pm\alpha^0$  отрезка интегрирования. С этой целью вводим в рассмотрение непрерывные и ограниченные функции на отрезке  $-\alpha^0 \leq x \leq \alpha^0$ :

$$\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(|\xi|\mu x), \quad \gamma(x) = \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\alpha(t) - \alpha(x)}{t-x} dt \quad (7.9)$$

и, учитывая выраженные через них функции

$$\pm\tilde{\Gamma}(x) = \pm\gamma(x) \pm \alpha(x) \ln \frac{\alpha^0 - x}{\alpha^0 + x}$$

получаем представление канонических функций

$$Z^\pm(x) = \exp(\pm\tilde{\Gamma}(x)) = \exp(\pm\gamma(x)) \left( \frac{\alpha^0 - x}{\alpha^0 + x} \right)^{\pm\alpha(x)} \quad (7.10)$$

Учитывая непрерывность функций  $\alpha(x)$  и  $\gamma(x)$  (7.9), устанавливаем, что функция  $Z^\pm(x)$  (7.10) непрерывна на отрезке  $-\alpha^0 \leq x \leq \alpha^0$  и обращается в нуль на его концах:

$$Z^\pm(\pm\alpha^0) = 0 \quad (7.11)$$

Функция  $Z(x)$  (7.10) непрерывна на интервале  $-\alpha^0 < x < \alpha^0$ , а на его концах при  $x \rightarrow \pm\alpha^0$  претерпевает бесконечные разрывы по закону

$$Z^\pm(x) \sim \tilde{c}(\alpha^0 \mp x)^{-\theta}, \quad \tilde{c} = \exp(-\gamma(\alpha^0)) \quad (7.12)$$

Переходим к выделению особенностей замкнутых решений  $\varphi_{1h}^\pm(x)$  (7.8) характеристического СИУ (7.1). В случае  $\varphi_{1h}^+(x)$  интеграл в (7.8) представляем в форме

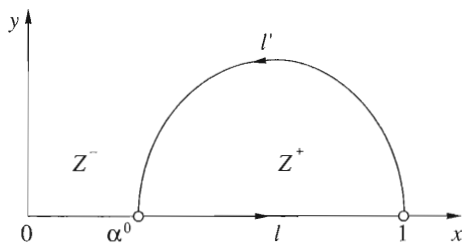
$$\begin{aligned} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\tilde{f}_1(t) \exp(-\tilde{\Gamma}(t))}{t-x} dt &= \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\tilde{f}_1(t) - \tilde{f}_1(x)}{t-x} \exp(-\tilde{\Gamma}(t)) dt + \\ &+ \tilde{f}_1(x) \exp(-\tilde{\Gamma}(x)) \left( \ln \frac{\alpha^0 - x}{\alpha^0 + x} - \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\exp(\tilde{\Gamma}(t)) - \exp(\tilde{\Gamma}(x))}{t-x} \exp(-\tilde{\Gamma}(t)) dt \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

а в случае  $\varphi_{1h}^-(x)$  – в форме

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\tilde{f}_1(t) \exp(\tilde{\Gamma}(t))}{t-x} dt &= \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\tilde{f}_1(t) \exp(\tilde{\Gamma}(t)) - \tilde{f}_1(x) \exp(\tilde{\Gamma}(x))}{t-x} dt + \\ &+ \tilde{f}_1(x) \exp(\tilde{\Gamma}(x)) \ln \frac{\alpha^0 - x}{\alpha^0 + x} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Учитывая, что функции  $\tilde{f}_1(x)$  (7.2) и  $\alpha(x)$  (7.9) имеют на отрезке  $-\alpha^0 \leq x \leq \alpha^0$  первую и вторую производные, можно доказать сходимость параметрических интегралов в правых частях равенств (7.13), (7.14) к непрерывным функциям от  $x$  на всем отрезке  $-\alpha^0 \leq x \leq \alpha^0$ . Опираясь на это утверждение, при помощи формул (7.13), (7.14) находим особенности двух вариантов решения  $\varphi_{1h}^\pm(x)$  (7.8) характеристического СИУ (7.1) на концах отрезка интегрирования при  $x \rightarrow \pm\alpha^0$ :

$$\varphi_{1h}^+(x) \sim N_{1h}^+ \ln(\alpha^0 \mp x), \quad \varphi_{1h}^-(x) \sim N_{1h}^-(\alpha^0 \mp x)^{-\theta} \quad (7.15)$$



Фиг. 2

Постоянные  $N_{1h}^{\pm}$  при учете выражения для  $\tilde{c}$  (7.12) даются формулами

$$N_{1h}^{+} = \frac{A_{wq12} \mu \alpha^0 \tilde{f}_1(\alpha^0)}{\pi \Delta(\alpha^0)}, \quad N_{1h}^{-} = \tilde{c} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{\tilde{f}_1(t) \exp(\tilde{\Gamma}(t)) - \tilde{f}_1(\alpha^0) \exp(\tilde{\Gamma}(\alpha^0))}{t - \alpha^0} dt \quad (7.16)$$

Переходим к построению замкнутого аналитического решения характеристической матричной системы СИУ (5.39). Сначала замкнем контур интегрирования СИУ (5.39)  $l = (\alpha^0 \leq x \leq 1)$  гладкой дугой  $l'$  и перейдем к эквивалентному СИУ на замкнутом контуре  $L = l + l'$  (фиг. 2):

$$\tilde{A} \varphi(x) + \frac{\tilde{B}}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = A_{pq} \tilde{f}(x) \quad (7.17)$$

где квадратные матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  ( $4 \times 4$ ) и матрица-столбец  $\tilde{f}(x)$  ( $4 \times 1$ ) имеют вид

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & E \end{vmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{vmatrix} B & O \\ O & O \end{vmatrix}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{vmatrix} f(x) \\ 0 \end{vmatrix} \quad (7.18)$$

где  $E$  – единичная,  $O$  – нулевая матрица второго порядка или нулевой столбец с двумя элементами в случае  $\tilde{f}(x)$ .

Замкнутое аналитическое решение СИУ (7.17), (7.18) справедливое и для исходного СИУ (5.39), строим с помощью интеграла типа Коши на комплексной плоскости  $z = x + iy$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \quad (7.19)$$

Контур  $L = l + l'$  разбивает плоскость  $z$  на две области  $Z^+$  и  $Z^-$  соответственно слева и справа от указанного на фиг. 2 стрелками направления его обхода. Для граничных значений интеграла (7.19) справедливы формулы Сохоцкого – Племеля

$$\Phi^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$$

из которых вытекают равенства

$$\varphi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x), \quad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \Phi^+(x) + \Phi^-(x) \quad (7.20)$$

Подстановка выражений (7.20) в СИУ (7.17) сводит его к неоднородной задаче сопряжения Римана – Гильберта

$$\Phi^+(x) = \tilde{G}\Phi^-(x) + \tilde{g}(x) \tag{7.21}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \tilde{S}^{-1}\tilde{D}, \quad \tilde{g}(x) = \tilde{S}^{-1}A_{pq}\tilde{f}(x) \\ \tilde{S} = \tilde{A} + \tilde{B} &= \left\| \begin{array}{cc} S & 0 \\ 0 & E \end{array} \right\|, \quad \tilde{D} = \tilde{A} - \tilde{B} = \left\| \begin{array}{cc} D & 0 \\ 0 & E \end{array} \right\|, \quad S = A + B, \quad D = A - B \end{aligned} \tag{7.22}$$

По формулам (5.40), (7.18), (7.22) соответственно для матриц  $A$  и  $B$ ,  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{S}$  и  $\tilde{D}$  нетрудно проверить справедливость равенства  $\det \tilde{G} = \det S^{-1}D = 1$ , из которого вытекает, что задача сопряжения (7.21) имеет нулевой индекс  $\kappa$  [3, 4]:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg \det \tilde{G}]_L = 0 \tag{7.23}$$

В случае постоянной матрицы  $\tilde{G}$  однородная задача сопряжения разрешается в явном виде с помощью канонической матрицы

$$X(z) = \begin{cases} \tilde{G} & \text{при } z \in Z^+ \\ \tilde{E} & \text{при } z \in Z^- \end{cases}, \quad \tilde{E} = \left\| \begin{array}{cc} E & 0 \\ 0 & E \end{array} \right\| \tag{7.24}$$

Следовательно,  $\Phi^+ = X^+ = \tilde{G}$ ,  $\Phi^- = X^- = \tilde{E}$  и, стало быть,

$$X^+ = \tilde{G}X^-, \quad \tilde{G} = X^+[X^-]^{-1} \tag{7.25}$$

Решение неоднородной задачи сопряжения (7.21) при учете нулевого индекса  $\kappa = 0$  (7.23) дается следующим интегралом типа Коши [3, 4]:

$$X^{-1}\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{[X^+]^{-1}\tilde{g}(t)}{t-z} dt \tag{7.26}$$

Применяя граничные формулы Сохоцкого – Племелья к интегралу (7.26), по аналогии с равенствами (7.20) устанавливаем соотношения

$$\begin{aligned} [X^+]^{-1}\tilde{g}(z) &= [X^+]^{-1}\Phi^+(x) - [X^-]^{-1}\Phi^-(x) \\ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{[X^+]^{-1}\tilde{g}(t)}{t-x} dt &= [X^+]^{-1}\Phi^+(x) + [X^-]^{-1}\Phi^-(x) \end{aligned}$$

из которых находим

$$\Phi^\pm(x) = X^\pm \left\{ \pm \frac{1}{2}[X^+]^{-1}\tilde{g}(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{[X^+]^{-1}\tilde{g}(t)}{t-x} dt \right\} \tag{7.27}$$

По первой формуле (7.20) при учете формул (7.27) и равенств  $X^+ = \tilde{G} = \tilde{S}^{-1}\tilde{D}$ ,  $X^- = \tilde{E}$ ,  $\tilde{g}(x) = A_{pq}\tilde{S}^{-1}\tilde{f}(x)$  находим искомую функцию  $\phi(x)$  характеристического СИУ (7.17)

$$\varphi(x) = \frac{A_{pq}}{2} \left( \tilde{S}^{-1} \tilde{f}(x) + \frac{\tilde{S}^{-1}}{\pi i} \int_L \frac{\tilde{f}(t)}{t-x} dt \right) + \frac{A_{pq}}{2} \left( \tilde{G}^{-1} \tilde{S}^{-1} \tilde{f}(x) - \frac{\tilde{G}^{-1} \tilde{S}^{-1}}{\pi i} \int_L \frac{\tilde{f}(t)}{t-x} dt \right) \quad (7.28)$$

Далее, учитывая равенства  $\tilde{G}^{-1} = [\tilde{S}^{-1} \tilde{D}]^{-1} = \tilde{D}^{-1} \tilde{S}$ ,  $\tilde{G}^{-1} \tilde{S}^{-1} = \tilde{D}^{-1} \tilde{S} \tilde{S}^{-1} = \tilde{D}^{-1}$  и формулы

$$\tilde{S}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} S^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{array} \right\|, \quad S^{-1} = \frac{1}{A_{pq}} \left\| \begin{array}{cc} A_{uq12} & iA_{up12} \\ -iA_{wq12} & A_{wp12} \end{array} \right\|$$

$$\tilde{D}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} D^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{array} \right\|, \quad D^{-1} = \frac{1}{A_{pq}} \left\| \begin{array}{cc} A_{uq12} & -iA_{up12} \\ iA_{wq12} & A_{wp12} \end{array} \right\|$$

представляем  $\varphi(x)$  (7.28) в следующей окончательной форме:

$$\varphi(x) = \tilde{A}_* \tilde{f}(x) + \frac{\tilde{B}_*}{\pi} \int_L \frac{\tilde{f}(t)}{t-x} dt \quad (7.29)$$

где

$$\tilde{A}_* = \frac{1}{2}(\tilde{S}^{-1} + \tilde{D}^{-1}) = \left\| \begin{array}{cc} A_* & 0 \\ 0 & E \end{array} \right\|, \quad A_* = \left\| \begin{array}{cc} A_{uq12} & 0 \\ 0 & A_{wp12} \end{array} \right\| \quad (7.30)$$

$$\tilde{B}_* = \frac{1}{2}(\tilde{S}^{-1} - \tilde{D}^{-1}) = \left\| \begin{array}{cc} B_* & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad B_* = \left\| \begin{array}{cc} 0 & A_{up12} \\ -A_{wq12} & 0 \end{array} \right\|$$

Легко видеть, что решение исходного характеристического СИУ (5.39) совпадает с решением СИУ (7.17) на контуре  $l = (\alpha^0 \leq x \leq 1)$  и дается формулой (7.29):

$$\varphi(x) = A_* f(x) + \frac{B_*}{\pi} \int_{\alpha^0}^1 \frac{f(t)}{t-x} dt \quad (7.31)$$

СИУ (7.17) на контуре  $l'$  имеет очевидное тривиальное решение  $\varphi(x) \equiv 0$ , которое далее не потребуется.

Далее, учитывая формулы (5.40) для  $\varphi(x)$  и  $f(x)$ , представляем матричное решение (7.31) для характеристического СИУ (5.39) в развернутом виде

$$\Phi_{2h}(x) = A_{uq12} f_2(x) + \frac{A_{up12}}{\pi} \int_{\alpha^0}^1 \frac{f_3(t)}{t-x} dt, \quad \Phi_{3h}(x) = A_{wp12} f_3(x) - \frac{A_{wq12}}{\pi} \int_{\alpha^0}^1 \frac{f_2(t)}{t-x} dt \quad (7.32)$$

Подставляем в формулы (7.32) представления функций  $f_j(x)$  ( $j = 2, 3$ ) (5.40), тождественно преобразуем интегралы

$$\int_{\alpha^0}^1 \frac{f_j^0(t) dt}{\sqrt{t-\alpha^0}(t-x)} = \tilde{f}_j^0(x) + f_j^0(x) \int_{\alpha^0}^1 \frac{dt}{\sqrt{t-\alpha^0}(t-x)}, \quad \tilde{f}_j^0(x) = \int_{\alpha^0}^1 \frac{f_j^0(t) - f_j^0(x)}{\sqrt{t-\alpha^0}(t-x)} dt \quad (7.33)$$

$$\int_{\alpha^0}^1 \frac{dt}{\sqrt{t-\alpha^0}(t-x)} = \frac{1}{\sqrt{x-\alpha^0}} \ln \frac{1-x}{(\sqrt{1-\alpha^0} + \sqrt{x-\alpha^0})^2}$$

и выделяем из них особенности на концах отрезка интегрирования

$$\int_{\alpha^0}^1 \frac{f_j^0(t)dt}{\sqrt{t-\alpha^0}(t-x)} = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x-\alpha^0}} \left( \frac{\sqrt{x-\alpha^0}}{\ln(1-x)} \tilde{f}_j^0(x) + y(x)f_j^0(x) \right) \tag{7.34}$$

$$y(x) = 1 - 2 \frac{\ln(\sqrt{1-\alpha^0} + \sqrt{x-\alpha^0})}{\ln(1-x)}$$

Все функции  $y(x)$ ,  $\tilde{f}_j^0(x)$ ,  $f_j^0(x)$  ( $j = 2, 3$ ) непрерывны на отрезке  $\alpha^0 \leq x \leq 1$ .

Решение  $\varphi_{jh}(x)$  ( $j = 2, 3$ ) (7.32) при учете  $f_j(x)$  (5.40) и равенства (7.34) записывается в форме с выделенными в явном виде особенностями

$$\begin{aligned} \varphi_{jh}(x) &= \frac{2 \ln(1-x)}{\pi \sqrt{x-\alpha^0}} \Phi_{jh}(x), \quad j = 2, 3, \quad \alpha^0 \leq x \leq 1 \\ \Phi_{2h}(x) &= A_{uq12} \frac{f_2^0(x)}{\ln(1-x)} + \frac{A_{up12}}{\pi} \left( y(x)f_3^0(x) + \frac{\sqrt{x-\alpha^0}}{\ln(1-x)} \tilde{f}_3^0(x) \right) \\ \Phi_{3h}(x) &= A_{wp12} \frac{f_3^0(x)}{\ln(1-x)} - \frac{A_{wq12}}{\pi} \left( y(x)f_2^0(x) + \frac{\sqrt{x-\alpha^0}}{\ln(1-x)} \tilde{f}_2^0(x) \right) \end{aligned} \tag{7.35}$$

Функции  $\Phi_{jh}(x)$  ( $j = 2, 3$ ) непрерывны на всем отрезке  $\alpha^0 \leq x \leq 1$

**8. Приложение 2. Регуляризация системы СИУ (5.29)–(5.31).** Сначала проведем регуляризацию СИУ (5.29) с помощью замкнутого решения (7.8) характеристического СИУ (7.1). Перенесем все регулярные члены уравнения (5.29) в правую часть и применим к ним, как и к функции  $\tilde{f}_1(x)$ , формулу (7.8), заменив в последней  $t$  на  $\tau$ . Затем поменяем порядок интегрирования в двойных интегралах и перенесем все члены, содержащие неизвестные функции  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), в левую часть. В результате получаем следующие регуляризованные уравнения для обоих вариантов решения СИУ (5.29):

$$\varphi_1^\pm(x) + \frac{A_{pq}}{\pi} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} M_{11}^\pm(x, t) \varphi_1^\pm(t) dt + \frac{2A_{pq}}{\pi} \sum_{j=2}^3 \int_{\alpha^0}^1 \frac{M_{1j}^\pm(x, t)}{\sqrt{t-\alpha^0}} \varphi_j^\pm(t) dt = \varphi_{1h}^\pm(x) \tag{8.1}$$

$$M_{1j}^\pm = \frac{A_{wp12} K_{1j}(x, t)}{\Delta(x)} + \frac{A_{wq12} \mu x}{\pi \Delta(x)} \exp(\pm \tilde{\Gamma}(x)) \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{K_{1j}(\tau, t) \exp(\mp \tilde{\Gamma}(\tau))}{\tau - x} d\tau, \quad j = 1, 2, 3 \tag{8.2}$$

Нетрудно проверить, что функции  $\varphi_{1h}^\pm(x)$  и ядра  $M_{1j}^\pm(x, t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) (8.2) четны по переменной  $x$ , а ядра  $M_{11}^\pm(x, t)$  четны и по переменной  $t$ . В этом случае искомые функции  $\varphi_1^\pm(x)$  в обоих вариантах уравнения (8.1) четны и, стало быть, его можно и целесообразно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\varphi_1^\pm(x) + \frac{2A_{pq}}{\pi} \left( \int_0^{\alpha^0} M_{11}^\pm(x, t) \varphi_1^\pm(t) dt + \sum_{j=2}^3 \int_{\alpha^0}^1 \frac{M_{1j}^\pm(x, t)}{\sqrt{t-\alpha^0}} \varphi_j^\pm(t) dt \right) = \varphi_{1h}^\pm(x) \tag{8.3}$$

Сопоставляя выражения  $\Phi_{1h}^{\pm}(x)$  (7.8) и  $M_{1j}^{\pm}(x, t)$  (8.2) и учитывая дифференцируемость функций  $K_{1j}(x, t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) по переменной  $x$ , можно видеть, что ядра  $M_{1j}^{\pm}(x, t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и свободные члены  $\Phi_{1h}^{\pm}(x)$  уравнений (8.3) на конце  $x = \alpha^0$  имеют одни и те же особенности (7.15).

Действительно, представляя интегралы в правой части равенства (8.2) по формулам (7.13), (7.14), и заменяя при этом  $\tilde{f}_1(x)$  на  $K_{1j}(x, t)$ , по изложенной выше методике находим главные члены ядер  $M_{1j}^{\pm}(x, t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) при  $x \rightarrow \alpha^0$ :

$$M_{1j}^+(x, t) \sim N_{1j}^+(t) \ln(\alpha^0 - x), \quad M_{1j}^-(x, t) \sim N_{1j}^-(t) (\alpha^0 - x)^{-\theta} \quad (8.4)$$

где функции  $N_{1j}^{\pm}(t)$  с учетом  $\tilde{c}$  (7.12) даются следующими формулами:

$$N_{1j}^+(t) = \frac{A_{wq12} \mu \alpha^0 K_{1j}(\alpha^0, t)}{\pi \Delta(\alpha^0)} \quad (8.5)$$

$$N_{1j}^-(t) = \tilde{c} \int_{-\alpha^0}^{\alpha^0} \frac{K_{1j}(\tau, t) \exp(\tilde{\Gamma}(\tau)) - K_{1j}(\alpha^0, t) \exp(\tilde{\Gamma}(\alpha^0))}{\tau - \alpha^0} d\tau$$

Для устранения логарифмических особенностей (7.15), (8.4) в уравнении (8.3) для функций  $\Phi_j^+(x)$ , ( $j = 1, 2, 3$ ) вводим новые неизвестные функции

$$\Phi_1^+(x) = \frac{\Phi_1^+(x)}{\ln(\alpha^0 - x)}, \quad \Phi_j^+(x) = \frac{\Phi_j^+(x)}{\ln(1 - x)}, \quad j = 2, 3 \quad (8.6)$$

и получаем для них интегральное уравнение

$$\Phi_1^+(x) + \frac{2A_{pq}}{\pi} \left( \int_0^{\alpha^0} \tilde{M}_{11}^+(x, t) \ln(\alpha^0 - t) \Phi_1^+(t) dt + \sum_{j=2}^3 \int_{\alpha^0}^1 \frac{\tilde{M}_{1j}^+(x, t) \ln(1-t)}{\sqrt{t - \alpha^0}} \Phi_j^+(t) dt \right) = \Phi_{1h}^{\pm}(x), \quad 0 \leq x \leq \alpha^0 \quad (8.7)$$

где  $\tilde{M}_{1j}^+(x, t) = M_{1j}^+(x, t) / \ln(\alpha_0 - t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $\Phi_{1h}^+(x) = \Phi_1^+(x) / \ln(\alpha_0 - t)$  – непрерывные функции на соответствующих отрезках интегрирования, причем при  $x = \alpha^0$  имеем

$$\tilde{M}_{1j}^+(\alpha^0, t) = N_{1j}^+(t), \quad j = 1, 2, 3, \quad \Phi_{1h}^+(\alpha^0) = N_{1h}^+ \quad (8.8)$$

Корневую особенность во втором и третьем интегралах уравнения (8.7) устраняем путем замены переменной интегрирования по формулам

$$t_2(t) = \sqrt{t - \alpha^0}, \quad t(t_2) = \alpha^0 + t_2^2 \quad (8.9)$$

В результате приходим к интегральному уравнению

$$\Phi_1^+(x) + \frac{2A_{pq}}{\pi} \left( \int_0^{\alpha^0} \tilde{M}_{11}^+(x, t) \ln(\alpha^0 - t) \Phi_1^+(t) dt + \right. \\ \left. + 2 \sum_{j=2}^3 \int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} \tilde{M}_{1j*}^+(x, t) \ln(1-t(t_2)) \Phi_{j*}^+(t_2) dt_2 \right) = \Phi_{1h}^+(x), \quad 0 \leq x \leq \alpha^0 \quad (8.10)$$

где звездочкой отмечены функции

$$\tilde{M}_{1j*}^+(x, t) = \tilde{M}_{1j}^+(x, t(t_2)), \quad j = 1, 2, 3, \quad \Phi_{j*}^+(t_2) = \Phi_j^+(t(t_2)), \quad j = 2, 3$$

Логарифмические особенности в интегралах уравнения (8.10) устраняем путем их представления в следующих формах:

$$\int_0^{\alpha^0} \tilde{M}_{11}^+(x, t) \ln(\alpha^0 - t) \Phi_1^+(t) dt = \int_0^{\alpha^0} \tilde{M}_{11}^+(x, t) \ln(\alpha^0 - t) (\Phi_1^+(t) - \Phi_1^+(\alpha^0)) dt + \\ + \Phi_1^+(\alpha^0) \left( \int_0^{\alpha^0} (\tilde{M}_{11}^+(x, t) - \tilde{M}_{11}^+(x, \alpha^0)) \ln(\alpha^0 - t) dt + \tilde{M}_{11}^+(x, \alpha^0) \int_0^{\alpha^0} \ln(\alpha^0 - t) dt \right) \quad (8.11)$$

$$\int_0^{\alpha^0} \ln(\alpha^0 - t) dt = -\alpha^0 (1 - \ln \alpha^0)$$

$$\int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} \tilde{M}_{1j*}^+(x, t_2) \ln(1-t(t_2)) \Phi_{j*}^+(t_2) dt_2 = \\ = \int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} \tilde{M}_{1j*}^+(x, t_2) \ln(1-t(t_2)) (\Phi_{j*}^+(t_2) - \Phi_{j*}^+(\sqrt{1-\alpha^0})) dt_2 + \\ + \Phi_{j*}^+(\sqrt{1-\alpha^0}) \left( \int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} (\tilde{M}_{1j*}^+(x, t_2) - \tilde{M}_{1j*}^+(x, \sqrt{1-\alpha^0})) \ln(1-t(t_2)) dt_2 + \right. \quad (8.12)$$

$$\left. + \tilde{M}_{1j*}^+(x, \sqrt{1-\alpha^0}) \int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} \ln(1-t(t_2)) dt_2 \right) \\ \int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} \ln(1-t(t_2)) dt_2 = \int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} \ln(1-\alpha^0 - t_2^2) dt_2 = -2\sqrt{1-\alpha^0} (1 - \ln(2\sqrt{1-\alpha^0}))$$

Для устранения степенной (7.15) и логарифмической (7.35) особенностей в уравнении (8.3) для функций  $\bar{\varphi}_j(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) вводим новые неизвестные функции

$$\Phi_1^-(x) = (\alpha^0 - x)^\theta \bar{\varphi}_1^-(x), \quad \Phi_j^-(x) = \frac{\bar{\varphi}_j^-(x)}{\ln(1-x)}, \quad j = 2, 3 \quad (8.13)$$

и получаем для них интегральное уравнение

$$\Phi_1^-(x) + \frac{2A_{pq}}{\pi} \left( \int_0^{\alpha^0} \frac{\tilde{M}_{11}^-(x, t)}{(\alpha^0 - t)^\theta} \Phi_1^-(t) dt + \sum_{j=2}^3 \int_{\alpha^0}^1 \frac{\tilde{M}_{1j}^-(x, t) \ln(1-t)}{\sqrt{t - \alpha^0}} \Phi_j^-(t) dt \right) = \Phi_{1h}^-(x) \quad (8.14)$$

$$0 \leq x \leq \alpha^0$$

Для непрерывных функций

$$\tilde{M}_{1j}^-(x, t) = M_{1j}^-(x, t)(\alpha^0 - x)^\theta, \quad j = 1, 2, 3, \quad \Phi_{1h}^-(x) = \varphi_{1h}^-(x)(\alpha^0 - x)^\theta \quad (8.15)$$

в соответствующих областях их определения при  $x = \alpha^0$  имеем

$$\tilde{M}_{1j}^-(\alpha^0, t) = N_{1j}^-(t), \quad j = 1, 2, 3, \quad \Phi_{1h}^-(\alpha^0) = N_{1h}^- \quad (8.16)$$

Корневую особенность во втором и третьем интегралах уравнения (8.14) устраняем путем замены переменной интегрирования  $t$  по формулам (8.9), а степенную особенность в первом интеграле путем замены переменной интегрирования  $t$  по формулам

$$t_1(t) = \int_0^t \frac{dt}{(\alpha^0 - t)^\theta} = \frac{\alpha^{01-\theta} - (\alpha^0 - t)^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad t(t_1) = \alpha^0 - (\alpha^{01-\theta} - (1-\theta)t_1)^{1/(1-\theta)} \quad (8.17)$$

и по этим же формулам заменяем переменную  $x$  на  $x_1$ . В результате интегральное уравнение принимает вид

$$\Phi_{1*}^-(x_1) + \frac{2A_{pq}}{\pi} \left( \int_0^{t_1(\alpha^0)} \tilde{M}_{11*}^-(x_1, t_1) \Phi_{1*}^-(t_1) dt_1 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{j=2}^3 \int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} \tilde{M}_{1j*}^-(x_1, t_2) \ln(1-t(t_2)) \Phi_{j*}^-(t_2) dt_2 \right) = \Phi_{1h*}^-(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq x_1(\alpha^0) \quad (8.18)$$

где

$$t_1(\alpha^0) = \frac{\alpha^{01-\theta}}{1-\theta}, \quad \Phi_{1*}^-(x_1) = \Phi_1^-(x(x_1)), \quad \Phi_{j*}^-(x_2) = \Phi_j^-(x(x_2)), \quad j = 2, 3$$

$$\tilde{M}_{11*}^-(x_1, t_1) = \tilde{M}_{11}^-(x(x_1), t(t_1)), \quad \tilde{M}_{1j*}^-(x_1, t_2) = \tilde{M}_{1j}^-(x(x_1), t(t_2)), \quad j = 2, 3$$

$$\Phi_{1h*}^-(x_1) = \Phi_{1h}^-(x(x_1))$$

Второй и третий интегралы в уравнении (8.18) представляются в форме (8.12) с заменой  $x$  на  $x(x_1)$ .

Переходим к регуляризации СИУ (5.30) и (5.31) и с помощью замкнутого решения (7.32) характеристической системы СИУ (5.39), (5.40). Перенесем все регуляр-

ные члены уравнений (5.30), (5.31) в правую часть и применим к ним, как и к функциям  $\tilde{f}_j(x)$  ( $j = 2, 3$ ), формулы (7.32), заменив в них  $t$  на  $\tau$ . Затем поменяем порядок интегрирования в двойных интегралах и перенесем все члены, содержащие неизвестные функции  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2, 3$ ), в левую часть. В результате получаем следующие регулярные уравнения:

$$\varphi_j(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha^0} \frac{M_{j1}(x, t)}{\sqrt{x - \alpha^0}} \varphi_1(t) dt + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^3 \int_{\alpha^0}^1 \frac{M_{jn}(x, t) \varphi_n(t)}{\sqrt{(x - \alpha^0)(t - \alpha^0)}} dt = \varphi_{jh}(x), \quad \alpha^0 \leq x \leq 1 \quad (8.19)$$

где ядра  $M_{jn}(x, t)$  ( $j = 2, 3; n = 1, 2, 3$ ) даются формулами

$$M_{2n}(x, t) = A_{uq12} K_{2n}(x, t) + \frac{A_{up12}}{\pi} \sqrt{x - \alpha^0} \int_{\alpha^0}^1 \frac{K_{3n}(\tau, t)}{\sqrt{(\tau - \alpha^0)(\tau - x)}} d\tau \quad (8.20)$$

$$M_{3n}(x, t) = A_{wp12} K_{3n}(x, t) - \frac{A_{wq12}}{\pi} \sqrt{x - \alpha^0} \int_{\alpha^0}^1 \frac{K_{2n}(\tau, t)}{\sqrt{(\tau - \alpha^0)(\tau - x)}} d\tau$$

Используя равенство (7.34), выделяем особенности на концах отрезка интегрирования из интегралов в формулах (8.20) и представляем их в виде

$$\int_{\alpha^0}^1 \frac{K_{jn}(\tau, t)}{\sqrt{(\tau - \alpha^0)(\tau - x)}} d\tau = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{x - \alpha^0}} \left( \frac{\sqrt{x - \alpha^0}}{\ln(1-x)} \tilde{K}_{jn}(x, t) + y(x) K_{jn}(x, t) \right) \quad (8.21)$$

$$\tilde{K}_{jn}(x, t) = \int_{\alpha^0}^1 \frac{K_{jn}(\tau, t) - K_{jn}(x, t)}{\sqrt{(\tau - \alpha^0)(\tau - x)}} d\tau, \quad j = 2, 3; \quad n = 1, 2, 3$$

Вносим в уравнения (8.19) представления свободных членов  $\varphi_{jh}(x)$  (7.35) и интегралов (8.21), умножив их на  $\sqrt{x - \alpha^0}$  и делим на  $\ln(1 - x)$ , вводим новые неизвестные функции для обоих вариантов решения

$$\Phi_1^+(x) = \frac{\Phi_1^+(x)}{\ln(\alpha^0 - x)}, \quad \Phi_1^-(x) = (\alpha^0 - x)^\theta \Phi_1^-(x), \quad \Phi_j^\pm(x) = \frac{\Phi_j^\pm(x)}{\ln(1-x)} \quad (j = 2, 3)$$

и в результате получаем для них следующие системы интегральных уравнений:

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{x - \alpha^0} \Phi_j^+(x) + \int_0^{\alpha^0} \tilde{M}_{j1}^+(x, t) \ln(\alpha^0 - t) \Phi_1^+(t) dt + \sum_{m=2}^3 \int_{\alpha^0}^1 \frac{\tilde{M}_{jm}^+(x, t) \ln(1-t)}{\sqrt{t - \alpha^0}} \Phi_j^+(t) dt = \Phi_{jh}(x), \quad j = 2, 3; \quad \alpha^0 \leq x \leq 1 \quad (8.22)$$

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{x - \alpha^0} \Phi_j^-(x) + \int_0^{\alpha^0} \frac{\tilde{M}_{j1}^-(x, t)}{(\alpha^0 - t)^\theta} \Phi_1^-(t) dt + \sum_{n=2}^3 \int_{\alpha^0}^1 \frac{\tilde{M}_{jn}^-(x, t) \ln(1-t)}{\sqrt{t - \alpha^0}} \Phi_j^-(t) dt = \Phi_{jh}(x), \quad j = 2, 3; \quad \alpha^0 \leq x \leq 1 \quad (8.23)$$

где ядра  $\tilde{M}_{jn}^{\pm}(x, t)$  ( $j = 2, 3; n = 1, 2, 3$ ) даются формулами

$$\tilde{M}_{2n}^{\pm}(x, t) = A_{uq12} \frac{K_{2n}(x, t)}{\ln(1-x)} + \frac{A_{up12}}{\pi} \left( \frac{\sqrt{x-\alpha^0}}{\ln(1-x)} \tilde{K}_{2n}(x, t) + y(x) K_{2n}(x, t) \right) \quad (8.24)$$

$$\tilde{M}_{3n}^{\pm}(x, t) = A_{wp12} \frac{K_{3n}(x, t)}{\ln(1-x)} - \frac{A_{wq12}}{\pi} \left( \frac{\sqrt{t-\alpha^0}}{\ln(1-x)} \tilde{K}_{3n}(x, t) + y(x) K_{3n}(x, t) \right)$$

причем при  $x = 1$  имеем

$$\tilde{M}_{2n}^{\pm}(1, t) = \frac{A_{up12}}{\pi} K_{2n}(1, t), \quad \tilde{M}_{3n}^{\pm}(1, t) = -\frac{A_{wq12}}{\pi} K_{3n}(1, t) \quad (8.25)$$

Для устранения корневых особенностей в обеих системах уравнений (8.22), (8.23) заменим независимую переменную  $x$  и переменную интегрирования  $t$  на отрезке  $[\alpha^0, 1]$  по формулам (8.9); в первом интеграле системы (8.23) переходим к переменной интегрирования (8.17) и этим самым устраняем степенную особенность. В результате системы уравнений (8.22), (8.23) записываются в форме

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} x_2 \Phi_{j*}^+(x_2) + \int_0^{\alpha^0} \tilde{M}_{j1*}^+(x_2, t) \ln(\alpha^0 - t) \Phi_1^+(t) dt + \\ & + 2 \sum_{n=2}^3 \int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} \tilde{M}_{jn*}^+(x_2, t_2) \ln(1-t(t_2)) \Phi_{j*}^+(t_2) dt_2 = \Phi_{jh*}(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq \sqrt{1-\alpha^0} \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} x_2 \Phi_{j*}^-(x_2) + \int_0^{t_1(\alpha^0)} \tilde{M}_{j1*}^-(x_2, t_1) \Phi_{1*}^-(t_1) dt_1 + \\ & + 2 \sum_{n=2}^3 \int_0^{\sqrt{1-\alpha^0}} \tilde{M}_{jn*}^-(x_2, t_2) \ln(1-t(t_2)) \Phi_{j*}^-(t_2) dt_2 = \Phi_{jh*}(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq \sqrt{1-\alpha^0} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Функции  $\tilde{M}_{j1*}^{\pm}$ ,  $\Phi_{j*}^{\pm}$ ,  $\Phi_{jh*}$  связаны с функциями  $\tilde{M}_{j1}^{\pm}$ ,  $\Phi_j^{\pm}$ ,  $\Phi_{jh}$  по формулам (8.18).

Логарифмические особенности на концах отрезков интегрирования  $x = \alpha^0$  и  $x = 1$  в системе уравнений (8.26), (8.27) устраняются путем представления интегралов по формулам (8.11) и (8.12).

Итак, система СИУ (5.29)–(5.31) в результате регуляризации сведена к двум системам из трех линейных интегральных уравнений (8.10), (8.26) и (8.18), (8.27) типа Фредгольма второго и третьего рода с непрерывными ядрами и свободными членами, которые разрешают исходную задачу динамики во всем диапазоне изменения упругих и скоростных характеристик и скорости движения трещины соответственно при положительном и отрицательном знаках отношения  $\xi = A_{wq12}/A_{wp12}$ . По теореме Фредгольма эти системы имеют единственные ограниченные решения, которые можно получить стандартными вычислительными методами.

Автор благодарит Р.В. Гольдштейна и участников семинара ИПМ РАН под руководством В.М. Александрова за обсуждение постановки и решения рассмотренных здесь задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин В.С.* Задачи теории упругости о кольцевой и круговой трещинах на границе раздела слоя и полупространства // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 3. С. 132–143.
2. *Никишин В.С.* Осесимметричные контактные задачи для двухслойного упругого полупространства с кольцевой или круговой трещиной на границе раздела слоев // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 670–680.
3. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
4. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 380 с.

Москва  
e-mail: nikishv@mail.ru

Поступила в редакцию  
2.X.2003