УДК 539.3

© 2005 г. Н. Г. Хомасуридзе

НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОМ И ТЕРМОУПРУГОМ РАВНОВЕСИИ КЛИНООБРАЗНЫХ ТЕЛ

Методом разделения переменных строится точное решение некоторых граничных задач о термоупругом и упругом равновесии клинообразных тел, ограниченных двумя бесконечными или конечными координатными плоскостями – гранями двугранного угла, вращательно-симметричных ортогональных координат. В случае, когда клин бесконечен, на него воздействует стационарное температурное поле и соответствующие поверхностные возмущения. Если клинообразное тело занимает конечную область, ограниченную координатными поверхностями одной из вращательно-симметричных систем координат, то на его гранях (при отсутствии температурного поля) задаются поверхностные возмущения, а на оставшейся части поверхности выполняются однородные условия специального вида. Поверхностные возмущения на каждой из двух граней соответствуют заданию: а) смещений, б) касательных смещений и нормального напряжения, в) касательных напряжений и нормального смещения.

При анализе граничной задачи об упругом равновесии бесконечного клина [1, 2] решение строилось в цилиндрической системе координат (при отсутствии температурного возмущения) на основании формул двойного интегрального преобразования, в частности, при помощи преобразования Конторовича–Лебедева [1] по радиальной координате и преобразования Фурье по другой из линейных координат. На гранях клина задавались либо смещения, либо касательные смещения и нормальное напряжение, либо касательные напряжения и нормальное смещение.

1. Постановка задачи. С использованием метода разделения переменных и двойных рядов, строятся решения статических граничных задач теории упругости для криволинейного координатного параллелепипеда

$$\Omega = \{\rho_0 < \rho < \rho_1, 0 < \alpha < \alpha_1, \beta_0 < \beta < \beta_1\} \tag{1.1}$$

где ρ, α, β – вращательно-симметричные ортогональные координаты с коэффициентами Ламе $h_\rho = h_\beta = h(\rho, \beta)$, $h_\alpha = H(\rho, \beta)$ (к основным вращательно-симметричным системам координат относятся цилиндрические координаты, сферические координаты, координаты вытянутого эллипсоида вращения, координаты сплюснутого эллипсоида вращения, параболоидальные координаты, тороидальные координаты и бисферические координаты [3]). На плоскостях $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_1$ задаются: а) смещения, б) касательные смещения и нормальное напряжение, в) касательные напряжения и нормальное смещение. На боковых поверхностях ($\rho = \rho_0$, $\rho = \rho_1$, $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$) задаются однородные условия специального вида. Далее будет указан путь распространения методики решения для нахождения термоупругого равновесия бесконечного клина.

Обобщается задача об упругом равновесии бесконечного клина (обобщение состоит в возможности построения решения в любой из вращательно-симметричных систем координат, а не только в круговой цилиндрической системе координат), хотя упрощаются и методы ее решения за счет: 1) построения общего решения для рассматриваемого класса граничных задач термоупругости, 2) замены классических условий, заданных на граничных поверхностях $\alpha = \text{const}$, эквивалентными условиями.

Об эффективности решений можно сказать следующее. Если, используя метод разделения переменных, в области (1.1) можно эффективно построить решение основных граничных задач для уравнения Лапласа с нулевыми условиями при $\rho = \rho_j$ и $\beta = \beta_j$, где $j = 0, 1$, тогда с той же эффективностью, в той же области (1.1) и тем же методом может быть найдено упругое равновесие рассматриваемых здесь тел.

2. Уравнения равновесия, уравнения состояния, граничные условия. Если температурное поле не зависит от времени, а массовые силы отсутствуют, то термоупругое равновесие однородного изотропного тела во вращательно-симметричных ортогональных системах координат можно представить в виде [4]

$$\Delta[2(\kappa - 2)\mathbf{U} + R(2\mathrm{div}\mathbf{U} - (8 - \kappa)kT)] = 0 \tag{2.1}$$

или в виде

$$\begin{gathered} \mathrm{grad}[\kappa\mathrm{div}\mathbf{U} - (8 - \kappa)kT] - (\kappa - 2)\mathrm{rot}\mathrm{rot}\mathbf{U} = 0, \quad \mathrm{div}\mathrm{rot}\mathbf{U} = 0 \\ \mathbf{U} = u_1\mathbf{l}_1 + u_2\mathbf{l}_2 + u_3\mathbf{l}_3, \quad R = x\mathbf{l}_1 + y\mathbf{l}_2 + z\mathbf{l}_3, \quad \kappa = 4(1 - \nu) \end{gathered} \tag{2.2}$$

$\mathbf{U}$ – вектор смещений, а u_1, u_2, u_3 – его компоненты вдоль осей декартовой системы координат x, y, z, ν – коэффициент Пуассона, k – коэффициент линейного теплового расширения.

Компоненты тензора напряжений выражаются через смещения следующим образом:

$$\frac{h^2}{\mu}R^{(\rho)} = \eta_1 h^2\mathrm{div}\mathbf{U} + 2hu_\rho + 2wh_\beta - \eta_2 h^2 T, \quad \frac{hH}{\mu}A^{(\rho)} = H^2\left(\frac{\upsilon}{H}\right)_\rho + hu_\alpha$$

$$\frac{hH}{\mu}A^{(\alpha)} = \eta_1 hH\mathrm{div}\mathbf{U} + 2h\upsilon_\alpha + 2wH_\beta + 2uH_\rho - \eta_2 hHT, \quad \frac{hH}{\mu}A^{(\beta)} = hw_\alpha + H^2\left(\frac{\upsilon}{H}\right)_\beta$$

$$\frac{h^2}{\mu}B^{(\beta)} = h_1\mathrm{div}\mathbf{U} + 2hw_\beta + 2uh_\rho - \eta_2 h^2 T, \quad \frac{1}{\mu}R^{(\beta)} = \left(\frac{u}{h}\right)_\beta + \left(\frac{w}{h}\right)_\rho$$

$$\mathrm{div}\mathbf{U} = \frac{(hHu)_\rho + h^2\upsilon_\alpha + (hHw)_\beta}{h^2 H}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \eta_1 = \frac{4 - \kappa}{\kappa - 2}, \quad \eta_2 = k\frac{8 - \kappa}{\kappa - 2}$$

Нижними индексами ρ, α, β обозначены частные производные по соответствующим координатам; $R^{(\rho)}$, $A^{(\alpha)}$, $B^{(\beta)}$ – нормальные напряжения, а $R^{(\alpha)} = A^{(\rho)}$, $R^{(\beta)} = B^{(\rho)}$, $A^{(\beta)} = B^{(\alpha)}$ – касательные напряжения; u, υ, w – компоненты вектора смещения $\mathbf{U}$ вдоль касательных к координатным линиям ρ, α, β; E – модуль упругости; T – изменение температуры в упругом теле, подчиняющееся уравнению

$$\Delta T = \frac{(HT_\rho)_\rho + (HT_\beta)_\beta}{h^2 H} + \frac{T_{\alpha\alpha}}{H^2} = 0 \tag{2.3}$$

и соответствующим граничным условиям; в случае сферических координат r, α, β $h = r$, $H = r\sin\beta$, а операция $\partial/\partial\rho$ заменяется операцией $r\partial/\partial r$.

Из системы (2.2) во вращательно-симметричных координатах можно получить уравнение

$$\Delta[(\kappa - 2)H\mathrm{rot}^{(\alpha)}\mathbf{U} + z(\kappa\mathrm{div}\mathbf{U} - (8 - \kappa)kT)] = 0 \tag{2.4}$$

где $\mathrm{rot}^{(\alpha)}\mathbf{U}$ – проекция вектора $\mathrm{rot}\,\mathbf{U}$ на касательную к координатной линии α.

Вводя обозначения

$$L^{[\rho\kappa]}(hw) - L^{[\beta\kappa]}(hu) - (4-\kappa/2)kh^2 zT = \kappa h^2 K$$

$$h^{-2}[L^{[\rho(1-\kappa)]}(hu) + L^{[\beta(1-\kappa)]}(hw)] + \upsilon_\alpha - (4-\kappa/2)kHT = (\kappa-2)D \qquad (2.5)$$

$$L^{[\gamma s]}(f) = H^{s+1}(H^{-s}f)_\gamma$$

и используя соотношения (2.1), (2.2) и (2.4), получим уравнения

$$\Delta K = 0, \quad \Delta(D\cos\alpha - \upsilon\sin\alpha) = 0, \quad \Delta(D\sin\alpha + \upsilon\cos\alpha) = 0$$

$$L^{[1\rho\beta]}(T) = \frac{\eta_2}{2}[\kappa L^{[\beta(\kappa-1)]}(HT) + (\kappa-2)L^{[\rho(-\kappa)]}(zT) - 2H^2T_\beta]$$

$$L^{[2\rho\beta]}(T) = \frac{\eta_2}{2}[\kappa L^{[\rho(\kappa-1)]}(HT) - (\kappa-2)L^{[\beta(-\kappa)]}(zT) - 2H^2T_\rho] \qquad (2.6)$$

$$(hw)_{\alpha\alpha} + \kappa^2(hw) = L^{[\beta(\kappa-1)]}(\upsilon_\alpha - \kappa D) - \kappa L^{[\rho(-\kappa)]}(K) - L^{(1\rho\beta)}(T)$$

$$(hu)_{\alpha\alpha} + \kappa^2(hu) = L^{[\rho(\kappa-1)]}(\upsilon_\alpha - \kappa D) + \kappa L^{[\beta(-\kappa)]}(K) - L^{(2\rho\beta)}(T)$$

Заметим, что второе и третье уравнения в системе (2.6) могут быть записаны в виде

$$\Delta D - H^{-2}D - 2H^{-2}\upsilon_\alpha = 0, \quad \Delta\upsilon - H^{-2}\upsilon + 2H^{-2}D_\alpha = 0$$

В случае кручения тел вращения, когда $\upsilon = \upsilon(\rho, \beta)$, $w = 0$, $u = 0$, имеем

$$\Delta_2\upsilon - H^2\upsilon = H^{-1}h^{-2}[(H\upsilon_\rho)_\rho + (H\upsilon_\beta)_\beta] - H^2\upsilon = 0$$

В случае осесимметричного напряженного состояния, когда

$$\upsilon = 0, \quad T = T(\alpha, \beta)\ (\Delta_2 T = 0), \quad w = w(\rho, \beta), \quad u = u(\rho, \beta)$$

из уравнений (2.6) получается следующая форма решения:

$$\Delta_2 K = 0, \quad \Delta_2 D - H^{-2}D = 0$$

$$hw = -\frac{1}{\kappa}[L^{[\beta(\kappa-1)]}(D) + L^{[\rho(-\kappa)]}(K)] - \frac{1}{\kappa^2}L^{[1\rho\beta]}(T)$$

$$hu = -\frac{1}{\kappa}[L^{[\rho(\kappa-1)]}(D) - L^{[\beta(-\kappa)]}(K)] - \frac{1}{\kappa^2}L^{[2\rho\beta]}(T)$$

Нужно отметить, что далее будут решаться задачи об упругом (а не термоупругом) равновесии криволинейного координатного параллелепипеда (ККП), занимающего область (1.1), хотя методология нахождения решения граничных задач теории упругости для ККП может быть прямо перенесена на нахождение термоупругого равновесия бесконечного клина. Поэтому можно считать, что если возможно обоснование и использование соответствующих интегральных преобразований (в случае цилиндрических координат r, α, z это будут преобразование Конторовича–Лебедева по координате r и преобразование Фурье по координате z), то эффективно могут быть построены решения и соответствующих граничных задач термоупругости для бесконечного клина. В случае круговых цилиндрических координат r, α, z сказанное справедливо и для области

$$\Omega = \{0 < r < \infty, 0 < \alpha < \alpha_1, 0 < z < z_1\}$$

бесконечной лишь вдоль координаты r, когда при $z = z_j$ ($j = 0, 1$) выполняются условия симметрии $T_\alpha = 0$, $\upsilon = 0$, $A^{(z)} = 0$, $A^{(r)} = 0$ или антисимметрии $T = 0$, $A^{(\alpha)} = 0$, $w = 0$, $u = 0$ (в этом случае по координате z вместо преобразования Фурье будем иметь соответствующий тригонометрический ряд Фурье).

Далее будет рассмотрено упругое (а не термоупругое) равновесие КПП. Граничные условия при этом имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{при } \rho = \rho_j\text{: } a)\ & L^{[\rho(1-\kappa)]}(hu) = 0, \quad \upsilon = 0, \quad w = 0 \text{ или} \\ b)\ & u = 0, \quad L^{[\rho(\kappa-1)]}(\upsilon) = 0, \quad L^{[\rho\kappa]}(hw) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \text{при } \beta = \beta_j\text{: } a)\ & L^{[\beta(1-\kappa)]}(hw) = 0, \quad u = 0, \quad \upsilon = 0 \text{ или} \\ b)\ & w = 0, \quad L^{[\beta\kappa]}(hu) = 0, \quad L^{[\beta(\kappa-1)]}(\upsilon) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha = \alpha_j\text{: } a)\ & \upsilon = f_{j1}(\rho, \beta), \quad A^{(\beta)} = F_{j2}(\rho, \beta), \quad A^{(\rho)} = F_{j3}(\rho, \beta) \text{ или} \\ b)\ & A^{(\alpha)} = F_{j1}(\rho, \beta), \quad hw = f_{j2}(\rho, \beta), \quad hu = f_{j3}(\rho, \beta) \text{ или} \\ c)\ & \upsilon = f_{j1}(\rho, \beta), \quad hw = f_{j2}(\rho, \beta), \quad hu = f_{j3}(\rho, \beta) \end{aligned} \tag{2.9}$$

В формулах (2.7)–(2.9) $j = 0, 1$, причем $\alpha_0 = 0$. Об условиях, наложенных на функции f_{jl} и F_{jl} ($l = 1, 2, 3$), будет сказано ниже, укажем лишь, что функции эти таковы, что на ребрах ККП выполняются условия согласования.

Заметим, что чем меньше кривизна граничной поверхности $\rho = \rho_j$, тем меньше различаются условия (2.7) для случаев a и b соответственно от условий

$$\begin{aligned} \text{при } \rho = \rho_j\text{: } a)\ & R^{(\rho)} = 0, \quad \upsilon = 0, \quad w = 0 \text{ и} \\ b)\ & u = 0, \quad A^{[\rho]} = 0, \quad R^{[\beta]} = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Условия (2.7) a и (2.7) b эквивалентны соответствующим условиям (2.10), когда $\rho = \rho_j$ – плоскость. Сказанное выше справедливо также для поверхности $\beta = \beta_j$ и условий (2.8).

3. Общее решение, преобразование граничных условий. Из первых трех уравнений системы (2.6) следует

$$K = \varphi_1, \quad D = \varphi_2 \cos\alpha + \varphi_3 \sin\alpha, \quad \upsilon = \varphi_3 \cos\alpha - \varphi_2 \sin\alpha \tag{3.1}$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 – гармонические функции; w и u выражаются через φ_1, φ_2 и φ_3 интегрированием последних двух уравнений (2.6).

Используя метод разделения переменных и учитывая условия (2.7)–(2.9), гармонические функции φ_1, φ_2 и φ_3 представляем в следующем виде (всюду далее суммирование ведется от $n = 1$ до $n = \infty$ и от $m = 1$ до $m = \infty$):

$$\begin{gathered} \varphi_l = \sum_{n, m} \Phi_{lmn}(\alpha) \Psi_{lmn}(\rho, \beta) \\ \Phi_{lmn} = A_{lmn} e^{-p_l \alpha} + B_{lmn} e^{p_l(\alpha - \alpha_1)}, \quad l = 1, 2, 3, \quad p_l = p_l(m, n), \quad p_2 = p_3 \end{gathered} \tag{3.2}$$

A_{lmn}, B_{lmn} – постоянные; Ψ_{lmn} – нетривиальное решение следующей задачи Штурма – Лиувилля [5]:

$$[H(\Psi_{lmn})_\rho]_\rho + [H(\Psi_{lmn})_\beta]_\beta + \frac{(hp_l)^2}{H}\Psi_{lmn} = 0 \tag{3.3}$$

$$\text{при} \quad \rho = \rho_j\text{: } a)\ \Psi_{lmn} = 0 \ \text{ или } \ b)\ L^{[\rho\kappa_l]}(\Psi_{lmn}) = 0 \tag{3.4}$$

$$\text{при} \quad \beta = \beta_j\text{: } a)\ \Psi_{lmn} = 0 \ \text{ или } \ b)\ L^{[\beta\kappa_l]}(\Psi_{lmn}) = 0 \tag{3.5}$$

Здесь $\kappa_1 = -\kappa$, $\kappa_2 = \kappa_3 = \kappa - 1$; $\Psi_{2mn} = \Psi_{3mn}$, так как $\kappa_2 = \kappa_3$. Тут же отметим, что при $\rho = \rho_j$ имеет место следующее: если $\Psi_{1mn} = 0$, то $L^{[\rho(\kappa-1)]}(\Psi_{2mn}) = 0$, $L^{[\rho(\kappa-1)]}(\Psi_{3mn}) = 0$; если же $L^{[\rho(-\kappa)]}(\Psi_{1mn}) = 0$, то $\Psi_{2mn} = \Psi_{3mn} = 0$. Аналогичные соотношения имеют место при $\beta = \beta_j$ (при замене ρ на β).

Подразумевается, что краевая задача (3.3)–(3.5) рассматривается в цилиндрических, сферических, параболоидальных, тороидальных и бисферических координатах, а также в координатах вытянутого и сплюснутого эллипсоида вращения. Во всех этих координатах возможно дальнейшее разделение переменных в уравнении (3.3), что приводит к известным (и изученным) регулярным одномерным задачам Штурма–Лиувилля. В зависимости от системы координат функции $\Psi_{lmn}(\rho, \beta)$ представляют собой произведение: 1) функций Бесселя на тригонометрические функции, 2) функций Лежандра на тригонометрические функции, 3) функций Бесселя на функции Бесселя, 4) функций Лежандра на функции Лежандра (точнее, под функциями Бесселя и Лежандра подразумеваются, соответственно, линейные комбинации функций Бесселя и линейные комбинации функций Лежандра) [6]. В частности, если ККП рассматривается в цилиндрической системе координат r, α, z, причем на боковых поверхностях ККП выполняются условия (2.7) и (2.8) в случае a, то

$$\Psi_{2mn} = \Psi_{3mn} = [I^{(R)}_{i\bar{n}}(r_m)K_{i\bar{n}}(r_{0m}) - K_{i\bar{n}}(r_m)I^{(R)}_{i\bar{n}}(r_{0m})]\sin z_m = R_0(r)\sin z_m$$

$$\Psi_{1mn} = \{I^{(R)}_{i\tilde{n}}(r_m)[L^{[r(-\kappa)]}(K_{i\tilde{n}}(r_m))]_{r=r_0} -$$
$$- K_{i\tilde{n}}(r_m)[L^{[r(-\kappa)]}(I^{(R)}_{i\tilde{n}}(r_m))]_{r=r_0}\}\cos z_m = R_1(r)\cos z_m$$

Здесь

$$r_m = \frac{\pi m}{z_1}r, \quad r_{0m} = \frac{\pi m}{z_1}r_0, \quad z_m = \frac{\pi m}{z_1}z$$

$K_{ia}(r_m)$ – функция Макдональда с мнимым индексом, причем $a = \bar{n}$ или $a = \tilde{n}$; $I^{(R)}_{ia}(r_m)$ – действительная часть модифицированной функции Бесселя первого рода с мнимым индексом; $\bar{n} = \bar{n}(m, n)$ и $\tilde{n} = \tilde{n}(m, n)$ – соответственно корни номера n трансцендентных уравнений

$$R_0(r_1) = 0 \ \text{ и } \ [L^{[r(-\kappa)]}(R_1(r))]_{r=r_1} = 0$$

Используя соотношения (3.1), (3.2) и (2.6), для ККП будем иметь

$$\upsilon = \sum_{n,m}(\Phi_{3mn}\cos\alpha - \Phi_{2mn}\sin\alpha)\Psi_{2mn}$$

$$hw = \sum_{n,m}\left[\Phi_{mn}L^{[\beta(\kappa-1)]}(\Psi_{2mn}) - \frac{\kappa}{p_1^2+\kappa^2}\Phi_{1mn}L^{[\rho(-\kappa)]}(\Psi_{1mn})\right] + hw_0$$

$$hu = \sum_{n,m}\left[\Phi_{mn}L^{[\rho(\kappa-1)]}(\Psi_{2mn}) + \frac{\kappa}{p_1^2+\kappa^2}\Phi_{1mn}L^{[\beta(-\kappa)]}(\Psi_{1mn})\right] + hu_0 \tag{3.6}$$

$$\Phi_{mn} = \frac{\kappa-1}{p_2^2+(\kappa-1)^2}\left(\frac{\cos\alpha}{\kappa-1}\frac{d\Phi_{3mn}}{d\alpha} - \sin\alpha\Phi_{3mn} - \frac{\sin\alpha}{\kappa-1}\frac{d\Phi_{2mn}}{d\alpha} - \cos\alpha\Phi_{2mn}\right)$$

В соотношениях (3.6) выражения для hw и hu получены интегрированием последних двух уравнений (2.6), причем hw_0 и hu_0 – общее решение соответствующих однородных уравнений, имеющее вид

$$hw_0 = \psi_{31}(\rho,\beta)\cos\kappa\alpha + \psi_{32}(\rho,\beta)\sin\kappa\alpha,\quad hu_0 = \psi_{11}(\rho,\beta)\cos\kappa\alpha + \psi_{12}(\rho,\beta)\sin\kappa\alpha \tag{3.7}$$

Если в левые части равенств (2.5) (напомним, что $T = 0$) подставить выражения (3.6) при учете формул (3.7), а в правые части равенств (2.5) подставить равенства (3.1) при учете формул (3.2), то для функций $\psi_{3s}(\rho, \beta)$ и $\psi_{1s}(\rho, \beta)$ ($s = 1, 2$) получим следующую систему уравнений:

$$L^{[\rho\kappa]}(\psi_{3s}) - L^{[\beta\kappa]}(\psi_{1s}) = 0,\quad L^{[\rho(1-\kappa)]}(\psi_{1s}) + L^{[\beta(1-\kappa)]}(\psi_{3s}) = 0 \tag{3.8}$$

Для рассматриваемого класса граничных задач

$$\psi_{3s} = 0,\quad \psi_{1s} = 0 \tag{3.9}$$

кроме следующих двух случаев:

1) при $\rho = \rho_0$ и $\rho = \rho_1$ заданы условия (2.7)*a*, при $\beta = \beta_0$ и $\beta = \beta_1$ – условия (2.8)*b*, коэффициент Ламе H может быть представлен в виде $H = H_1(\rho)H_2(\beta)$; в этом случае

$$\psi_{11} = A_1H_1^{1-\kappa}H_2^{\kappa},\quad \psi_{12} = B_1H_1^{1-\kappa}H_2^{\kappa},\quad \psi_{31} = \psi_{32} = 0$$

и тем самым

$$hu = [A_1\cos(\kappa\alpha) + B_1\sin(\kappa\alpha)]H_1^{1-\kappa}H_2^{\kappa},\quad \upsilon = 0,\quad w = 0 \tag{3.10}$$

где A_1, B_1 – постоянные;

2) при $\rho = \rho_0$ и $\rho = \rho_1$ заданы условия (2.7)*b*, при $\beta = \beta_0$ и $\beta = \beta_1$ – условия (2.8)*b*, а $H = H_1(\rho)H_2(\beta)$; в этом случае

$$\psi_{11} = 0,\quad \psi_{12} = 0,\quad \psi_{31} = A_3H_1^{\kappa}H_2^{1-\kappa},\quad \psi_{32} = B_3H_1^{\kappa}H_2^{1-\kappa}$$

и тем самым

$$u = 0,\quad \upsilon = 0,\quad hw = [A_3\cos(\kappa\alpha) + B_3\sin(\kappa\alpha)]H_1^{\kappa}H_2^{1-\kappa} \tag{3.11}$$

где A_3, B_3 – постоянные.

Для всех остальных случаев решением системы

$$(H^{-\kappa}\psi_{3s})_\rho - (H^{-\kappa}\psi_{1s})_\beta = 0,\quad (H^{\kappa-1}\psi_{1s})_\rho + (H^{\kappa-1}\psi_{3s})_\beta = 0 \tag{3.12}$$

полученной из системы (3.8), с граничными условиями, которые определяются значениями hw и hu на ребрах граней $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_1$, будет $\psi_{3s} = 0$, $\psi_{1s} = 0$.

Действительно, приняв

$$\psi_{3s} = -H^{-\kappa+1}(H^{\kappa-1/2}\Psi)_\rho, \quad \psi_{1s} = H^{-\kappa+1}(H^{\kappa-1/2}\Psi)_\beta \tag{3.13}$$

приходим к следующей граничной задаче:

$$\Psi_{\rho\rho} + \Psi_{\beta\beta} - (\kappa^2 - 1/4)h^2H^{-2}\Psi = 0 \tag{3.14}$$

при $\rho = \rho_j$: $(H^{\kappa-1/2}\Psi)_\rho = 0$ или $(H^{\kappa-1/2}\Psi)_\beta = 0$
при $\beta = \beta_j$: $(H^{\kappa-1/2}\Psi)_\beta = 0$ или $(H^{\kappa-1/2}\Psi)_\rho = 0$

Эта задача всегда имеет лишь решение $\Psi = c_0H^{1/2-\kappa}$, но подстановка этого значения Ψ в соотношения (3.13) дает $\psi_{3s} = 0$, $\psi_{1s} = 0$, или, что то же, $hw = 0$, $hu = 0$. Поэтому постоянную c_0 всегда можно считать равной нулю.

Представим теперь условия (2.9) в виде

$$\begin{aligned}
&\text{при } \alpha = \alpha_j\text{: } a)\ \upsilon = f_{j1}(\rho,\beta), \quad L^{[\rho(1-\kappa)]}[(hu)_\alpha] + L^{[\beta(1-\kappa)]}[(hw)_\alpha] = h^2\tilde{F}_{j2}(\rho,\beta)\\
&\qquad L^{[\rho\kappa]}[(hw)_\alpha] - L^{[\beta\kappa]}[(hu)_\alpha] = h^2\tilde{F}_{j3}(\rho,\beta) \text{ или}\\
&\qquad b)\ \upsilon_\alpha = \tilde{F}_{j1}(\rho,\beta), \quad L^{[\rho(1-\kappa)]}(hu) + L^{[\beta(1-\kappa)]}(hw) = h^2\tilde{f}_{j2}(\rho,\beta)\\
&\qquad L^{[\rho\kappa]}(hw) - L^{[\beta\kappa]}(hu) = h^2\tilde{f}_{j3}(\rho,\beta) \text{ или}\\
&\qquad c)\ \upsilon = f_{j1}(\rho,\beta), \quad L^{[\rho(1-\kappa)]}(hu) + L^{[\beta(1-\kappa)]}(hw) = h^2\tilde{f}_{j2}(\rho,\beta)\\
&\qquad L^{[\rho\kappa]}(hw) - L^{[\beta\kappa]}(hu) = h^2\tilde{f}_{j3}(\rho,\beta)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Функции $\tilde{F}_{jl}$ сами, а функции f_{jl} ($l = 1, 2, 3$) вместе со своими первыми производными разлагаются в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям задач (3.3)–(3.5) (функции с тильдой получены в результате соответствующих операций над функциями F_{j2}, F_{j3}, f_{j2} и f_{j3}). Кроме этого, на функции f_{jl} из условий (2.9) накладываются некоторые дополнительные требования. Например, если рассматривается граничная задача (2.6), (2.7)*a*, (2.8)*a*, (3.15)*b*, то кроме того, что

$$f_{j2}(\rho_j,\beta) = 0, \quad [L^{[\beta(1-\kappa)]}(f_{j2})]_{\beta=\beta_j} = 0, \quad f_{j3}(\rho,\beta_j) = 0, \quad [L^{[\rho(1-\kappa)]}(f_{j3})]_{\rho=\rho_j} = 0$$

на функции f_{j2} и f_{j3} дополнительно накладываются требования: $f_{j2}(\rho,\beta_j) = 0$ и $f_{j3}(\rho_j,\beta) = 0$.

Доказательство эквивалентности граничных условий (3.15) и (2.9) сводится к доказательству того, что система (3.12) с соответствующими граничными условиями имеет лишь тривиальное решение (за исключением указанных выше случаев 1 и 2), а эта последняя задача, в свою очередь, сводится к исследованию граничной задачи (3.14). Окончательно можно утверждать, что если $H = H_1(\rho)H_2(\beta)$, то к задаче (2.6), (2.7)*a*, (2.8)*b*, (3.15) следует добавить решение (3.10), а к задаче (2.6), (2.7)*b*, (2.8)*a*, (3.15) – решение (3.11). Во всех остальных случаях условия (3.15) и (2.9) эквивалентны.

Цель настоящей работы – построение регулярного решения граничных задач (2.6)–(2.8), (3.15), поэтому определим понятие регулярности.

Определенное функциями u, υ, w решение системы (2.6) будем называть регулярным, если функции u, υ, w трижды непрерывно дифференцируемы в области $\tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ – область Ω вместе с границами $\rho = \rho_j$ и $\beta = \beta_j$, а на поверхности $\alpha = \alpha_j$ могут быть представлены вместе со своими первыми и вторыми производными абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье по собственным функциям задачи (3.3)–(3.5). Кроме этого, полагаем, что уравнения равновесия справедливы при $\rho = \rho_j$ и $\beta = \beta_j$.

Целесообразность замены условий (2.9) условиями (3.15) подтверждается формулами

$$
\begin{aligned}
&\upsilon = \varphi_3\cos\alpha - \varphi_2\sin\alpha, \quad \upsilon_\alpha = [(\varphi_3)_\alpha - \varphi_2]\cos\alpha - [\varphi_3 + (\varphi_2)_\alpha]\sin\alpha \\
&h^{-2}[L^{[\rho(1-\kappa)]}(hu) + L^{[\beta(1-\kappa)]}(hw)] = [(\varphi_2)_\alpha + (\kappa-1)\varphi_3]\sin\alpha + \\
&+[(\kappa-1)\varphi_2 - (\varphi_3)_\alpha]\cos\alpha \\
&h^{-2}\{L^{[\rho(1-\kappa)]}[(hu)_\alpha] + L^{[\beta(1-\kappa)]}[(hw)_\alpha]\} = [(\varphi_2)_{\alpha\alpha} + (\kappa-1)\varphi_2 + \kappa(\varphi_3)_\alpha]\sin\alpha + \\
&+[\kappa(\varphi_2)_\alpha - (\varphi_3)_{\alpha\alpha} + (\kappa-1)\varphi_3]\cos\alpha \\
&h^{-2}[L^{[\rho\kappa]}(hw) - L^{[\beta\kappa]}(hu)] = \kappa\varphi_1, \quad h^{-2}\{L^{[\rho\kappa]}[(hw)_\alpha] - L^{[\beta\kappa]}[(hu)_\alpha]\} = \kappa(\varphi_1)_\alpha
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

в правых частях которых не фигурируют переменные ρ и β в явном виде и нет производных по ним.

Заметим, что как и ранее [7], общее упругое поле, соответствующее рассматриваемым граничным задачам, может быть представлено в виде суммы упругого поля с $D = 0$, $\upsilon = 0$ или, что то же, с $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ и упругого поля с $K = 0$, т.е. с $\varphi_1 = 0$. Граничные условия для функции $K = \varphi_1$ при $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_1$ определяются третьими равенствами в (3.15).

4. Аналитическое решение некоторых граничных задач. Замена условий (2.9) условиями (3.15) и использование представления (3.6) позволяет найти регулярное решение любой из граничных задач (2.6)–(2.8), (3.15). Покажем это на примере регулярного решения граничной задачи (2.6), (2.7)a, (2.8)a, (2.9)a (назовем ее задачей G_0), вводя следующие граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&a)\ 2\upsilon = f_{11} - f_{01}, \quad 2A^{(\beta)} = F_{12} - F_{02}, \quad 2A^{(\rho)} = F_{13} - F_{03} \ \text{ при } \ \alpha = \alpha_1 \\
&b)\ 2\upsilon = -(f_{11} - f_{01}), \quad 2A^{(\beta)} = -(F_{12} - F_{02}), \quad 2A^{(\rho)} = -(F_{13} - F_{03}) \ \text{ при } \ \alpha = 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$
2\upsilon = f_{11} + f_{01}, \quad 2A^{(\beta)} = F_{12} + F_{02}, \quad 2A^{(\rho)} = F_{13} + F_{03} \ \text{ при } \ a)\ \alpha = \alpha_1, \ b)\ \alpha = 0 \tag{4.2}
$$

Задачу G_0 представим в виде суммы граничных задач (2.6), (2.7)a, (2.8)a, (4.1) (задача G_1) и (2.6), (2.7)a, (2.8)a, (4.2) (задача G_2). Если граничные условия (2.9) и (3.15) с нулевыми правыми частями обозначить через $(2.9)^0$ и $(3.15)^0$, то решения задач G_1 и G_2 сведутся соответственно к решению задач (2.6), (2.7)a, (2.8)a, $(2.9)^0a$ при $\alpha = \alpha_1$, (4.1)b и (2.6), (2.7)a, (2.8)a, $(2.9)^0b$ при $\alpha = \alpha_1$, (4.2)b, в которых вместо α_1 берется $\alpha_1/2$. Метод решения обеих этих задач одинаков, поэтому ограничимся решением первой из них, которая эквивалентна задаче (2.6), (2.7)a, (2.8)a, $(3.15)^0a$ при $\alpha = 0$, (3.15)a, представляя функции φ_1, φ_2 и φ_3 следующим образом:

$$
\varphi_l = \sum_{n,m}\Phi_{lmn}(\alpha)\Psi_{lmn}(\rho,\beta), \quad l = 1, 2, 3 \tag{4.3}
$$

Здесь

$$
\Phi_{1mn}(\alpha) = A_{1mn}\frac{\operatorname{ch}\tilde{p}\alpha}{\operatorname{ch}\tilde{p}\alpha_1}, \quad \Phi_{2mn}(\alpha) = A_{2mn}\frac{\operatorname{ch}p\alpha}{\operatorname{ch}p\alpha_1}, \quad \Phi_{3mn}(\alpha) = A_{3mn}\frac{\operatorname{sh}p\alpha}{\operatorname{ch}p\alpha_1}
$$

$$
p_2(m,n) = p_3(m,n) = p(m,n) = p, \quad p_1(m,n) = \tilde{p}(m,n) = \tilde{p}
$$

$\Psi_{2mn}(\rho,\beta) = \Psi_{3mn}(\rho,\beta) = \Psi_{mn}(\rho,\beta)$ – собственные функции задачи (3.3), (3.4)a, (3.5)a, а $\Psi_{1mn}(\rho,\beta)$ – задачи (3.3), (3.4)b, (3.5)b.

При учете соотношений (4.43) и (3.16) постоянные A_{lmn} определяются из следующей системы уравнений:

$$\kappa \operatorname{th} \tilde{p} \alpha_1 A_{1mn} = \tilde{F}_{13mn}$$

$$[(p^2 - \kappa + 1)\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{th} p\alpha_1]A_{2mn} - [(p^2 - \kappa + 1)\operatorname{th} p\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_1]A_{3mn} = \tilde{F}_{12mn}/\cos\alpha_1 \quad (4.4)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 A_{2mn} - \operatorname{th} p\alpha_1 A_{3mn} = -f_{11mn}/\cos\alpha_1$$

где f_{11mn} и $\tilde{F}_{12mn}$ – коэффициенты Фурье функций $f_{11}(\rho, \beta)$ и $\tilde{F}_{12}(\rho, \beta)$, разложенных в ряд по функциям Ψ_{mn}, а $\tilde{F}_{13mn}$ – коэффициенты Фурье функции $\tilde{F}_{13}(\rho, \beta)$, разложенной в ряд по функциям Ψ_{1mn}.

Таким образом, получено регулярное решение поставленной граничной задачи. Совершенно аналогично решается для ККП любая из задач (2.6), (2.7)*a*, (2.8)*a*, (3.15). При этом может быть доказана сходимость рядов, представляющих решение. Конкретнее, возможно построить равномерно сходящийся двойной числовой ряд с положительными членами, который будет мажорировать в области $\bar{\Omega}$ функциональные ряды, представляющие компоненты вектора смещения и их первые и вторые производные. Построение такого числового ряда и доказательство единственности решения задач (2.6), (2.7)*a*, (2.8)*a*, (3.15) производится так же, как и ранее [7]. Что касается таких граничных задач, когда хотя бы на одной из четырех боковых поверхностей ККП ($\rho = \rho_j$, $\beta = \beta_j$), например при $\rho = \rho_0$, задаются условия (2.7)*b* при $\rho = \rho_0$, то все может быть доказано так же, как и для задач (2.6), (2.7)*a*, (2.8)*a*, (3.15), если система функций, порожденная задачей (3.3), (3.4)*b* при $\rho = \rho_0$, (3.4)*a* при $\rho = \rho_1$, (3.5)*a*, полная. Не касаясь вопроса исследования полноты этой системы функций, заметим лишь, что система функций, порожденная граничной задачей (3.3), (3.4)*a*, (3.5)*a*, полная [5].

Оказывается, что какая бы граничная задача ни решалась из класса граничных задач (2.6)–(2.8), (3.15) ее всегда возможно свести к сумме двух таких граничных задач, в каждой из которых постоянные, фигурирующие в выражении для Φ_{lmn} ($l = 1, 2, 3$), так же, как и в соотношениях (4.4), определялись бы из одного линейного уравнения и одной системы из двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными (указанное "сведение" наиболее сложно для таких граничных задач, в которых на одной из плоскостей $\alpha = \alpha_j$ заданы смещения, а на другой – произвольные условия из оставшихся двух).

Проиллюстрируем сказанное на примере задачи (2.6)–(2.8), (2.9)*b* при $\alpha = 0$, (2.9)*c* при $\alpha = \alpha_1$ (назовем ее задачей R_0). Она может быть представлена в виде суммы двух задач – задачи R_1, отличающейся от задачи R_0 лишь граничными условиями при $\alpha = \alpha_1$, имеющими вид

$$u = 0, \quad A^{(\alpha)} = 0, \quad w = 0 \quad (4.5)$$

и задачи R_2, отличающейся от задачи R_0 граничными условиями и при $\alpha = 0$, и при $\alpha = \alpha_1$; в частности, когда $\alpha = 0$, выполняются условия (4.5), а когда $\alpha = \alpha_1$, функции u и w – те же, что и в задаче R_0, а из выражения для υ вычитается функция f_1, представляющая собой значение $\upsilon(\rho, \alpha_1, \beta)$, взятое из решения задачи R_1.

Видно, что сведение произвольной граничной задачи к сумме двух более простых приводит к тому, что в каждой из этих двух задач на одной из граничных плоскостей $\alpha = \alpha_j$ выполняются либо условия симметрии

$$\upsilon = 0, \quad A^{(\beta)} = 0, \quad A^{(\rho)} = 0$$

либо условия антисимметрии (4.5). Заметим, что условия симметрии и антисимметрии являются условиями непрерывного продолжения решения через плоскость $\alpha = 0$ или $\alpha = \alpha_1$.

В заключение укажем, что хотя координатные поверхности той или иной системы координат дают возможность рассматривать упругое равновесие тел разной формы, вид решения остается неизменным. Геометрическая форма упругого тела определяется лишь видом параметров h и H.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
2. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
3. *Бермант А.Ф.* Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина. М.: Физматгиз, 1958. 306 с.
4. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 239 с.
5. *Арсенин В.А.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 383 с.
6. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. N. Y., etc.: McGraw-Hill, 1953 = *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965. 294 с.; Т. 2. М.: Наука, 1966. 395 с.
7. *Khomasuridze N.* Thermoelastic equilibrium of bodies in generalized cylindrical coordinates // Georgian Math. J. 1998. V. 5. № 6. P. 521–544.

Тбилиси
e-mail: nurikhomasuridze@yahoo.com

Поступила в редакцию
24.XII.2003