

УДК 539.375

© 2005 г. Н. Д. Вайсфельд

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ КОНЦЕНТРАЦИИ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ КОНИЧЕСКОГО ДЕФЕКТА

Решаются задачи о напряженном состоянии неограниченной упругой среды, содержащей конический дефект (трещина либо точное включение) и нагруженной нестационарной упругой волной кручения либо ударной нагрузкой в виде крутящего момента. С помощью построенных ранее разрывных решений уравнений динамической упругости для конического дефекта, задача сводится к интегро – дифференциальному (случай трещины) либо интегральному (случай включения) уравнениям в пространстве трансформант Лапласа. Для решения последних предлагается способ, основанный на совместном применении метода ортогональных многочленов и дискретизации уравнения по времени. Получена формула и проведен расчет зависимости коэффициента интенсивности напряжений у края трещины и угла поворота включения от времени.

Задачи о напряженном состоянии упругой среды, содержащей конический дефект, в статической постановке решались [1] на основе применения разрывных решений уравнений Ламе в форме Гутмана [2]. Рассматривалась [3] осесимметричная задача теории упругости для пространства с коническим разрезом.

Ниже предлагается эффективный метод решения новой динамической нестационарной задачи о напряженном состоянии упругой среды при наличии в ней конического дефекта либо в виде тонкого включения (коническая оболочка), либо в виде разреза по конической поверхности. Для проверки эффективности метода рассчитываются механические характеристики для конкретных материалов и размеров дефекта. Решение строится с помощью метода разрывных решений, что позволяет свести задачу к системе одномерных интегродифференциальных или интегральных уравнений в пространстве трансформант Лапласа по времени.

Метод разрывных решений представляет собой своеобразную частную реализацию метода потенциалов, приспособленную к эффективному использованию интегральных преобразований и привязываемую каждый раз к подходящей (диктуемой постановкой задачи) ортогональной системе координат. И если в общей схеме метода потенциалов разрывное решение строится в виде линейной комбинации потенциалов простого и двойного слоя (для чего надо выполнить предварительно непростую процедуру выяснения механического смысла плотностей указанных потенциалов), то в методе разрывных решений скачки искомых механических величин задаются, точнее считаются временно известными. При этом часть скачков, действительно, известна из постановки задачи, а другая часть находится из удовлетворения условиям на дефекте. Последующее применение обратного преобразования Лапласа с учетом теоремы о свертке приводит уравнения к двумерным. Решение этих уравнений основывается на совместном использовании дискретизации по времени и метода ортогональных многочленов, что приводит к решению последовательности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

1. Постановка задач. В неограниченной упругой среде содержится конический дефект, поверхность которого в сферической системе координат описывается соотношениями

$$a \leq r \leq b, \quad \theta = \omega, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (1.1)$$

При переходе через поверхность (1.1) смещения $u_\varphi(r, \theta, t) \equiv u(r, \theta, t)$ и напряжения $\tau_{\theta\varphi}(r, \theta, t) \equiv \tau(r, \theta, t)$ терпят разрывы первого рода со скачками

$$\begin{aligned} \langle u(r, \omega, t) \rangle &= u(r, \omega - 0, t) - u(r, \omega + 0, t) \\ \langle \tau(r, \omega, t) \rangle &= \tau(r, \omega - 0, t) - \tau(r, \omega + 0, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Когда дефект (1.1) – трещина, терпят разрывы смещения, а если дефект – тонкая, абсолютно жесткая, сцепленная со средой коническая оболочка, разрывны только напряжения. Предполагается, что с трещиной либо с неподвижной оболочкой взаимодействует набегающая из бесконечности упругая нестационарная волна кручения [4]

$$u^0(r, \theta, t) = \sin\theta [H(ct - r\cos\theta) - H(ct - r\cos\theta - ct_0)] \quad (1.3)$$

где $H(z)$ – единичная функция Хевисайда, t_0 – длительность импульса, c – скорость распространения волны.

Смещение $u(r, \theta, t)$ удовлетворяет уравнению [5]

$$(r^2 u')' + \frac{(\sin\theta u')'}{\sin\theta} - \frac{u}{\sin^2\theta} = \frac{r^2 \partial^2 u}{c^2 \partial t^2} \quad (1.4)$$

Штрихом обозначается производная по переменной r , точкой – производная по переменной θ .

Для случая трещины требуется выполнение условия отсутствия напряжений на берегах ($\theta = \omega - 0$ и $\theta = \omega + 0$) трещины

$$\tau(r, \theta, t)|_{\theta = \omega} = 0 \quad (1.5)$$

При нулевых начальных условиях необходимо определить коэффициент интенсивности напряжений у краев трещины.

Если оболочка неподвижна, то считается, что действует динамическая нагрузка в виде падающей из бесконечности упругой волны кручения (1.3). На поверхности включения выполняется тогда условие непрерывности смещений

$$u(r, \theta, t)|_{\theta = \omega} = 0 \quad (1.6)$$

При нулевых начальных условиях требуется определить реактивный момент в оболочке.

Если же оболочка не закреплена, то считается, что она загружена ударной нагрузкой в виде крутящего момента $M = AH(t)$, под действием которого она может поворачиваться вокруг оси вращения на угол $\alpha(t)$ вместе с упругой средой. В этом случае условие на поверхности включения примет вид

$$u(r, \theta, t)|_{\theta = \omega} = \alpha(t)r \quad (1.7)$$

В этом случае требуется определить неизвестный угол поворота включения $\alpha(t)$.

2. Сведение задач к интегродифференциальному уравнению. Случай трещины. Поле смещений и напряжений представим в виде

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{l} u_p(r, \theta) \\ \tau_p(r, \theta) \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{l} u_p^0(r, \theta) + u_p^1(r, \theta) \\ \tau_p^0(r, \theta) + \tau_p^1(r, \theta) \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (2.1)$$

где p – параметр преобразования Лапласа по времени, u_p^0, τ_p^0 – трансформанты Лапласа смещений и напряжений, вызванных падающей волной при отсутствии дефек-

та в упругой среде, u_p^1 , τ_p^1 – трансформанты искомого возмущенного поля смещений и напряжений, вызванных наличием в среде дефекта (1.1). Возмущенное поле строится в виде разрывного решения [6] уравнения движения для дефекта (1.1), в котором содержится скачок смещений и напряжений.

Трансформанта Лапласа разрывного решения уравнения кручения (1.4) имеет вид [7]

$$u_p^1(r, \theta) = s \sin \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\int_0^\infty \langle \Psi_p(\rho, \omega) \rangle \frac{\partial}{\partial \omega} G_0(rs, \rho s; \theta, \omega) - \langle \Psi_p^*(\rho, \omega) \rangle G_0(rs, \rho s; \theta, \omega) d\rho \right] \quad (2.2)$$

$$G_0(rs, \rho s; \theta, \omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty (2k+1) P_k(\cos \omega) P_k(\cos \theta) J_k(rs, \rho s) \quad (2.3)$$

$$J_k(rs, \rho s) = \frac{1}{s\sqrt{r\rho}} \begin{cases} I_\nu(rs) K_\nu(\rho s), & r < \rho \\ I_\nu(\rho s) K_\nu(rs), & r > \rho \end{cases}; \quad \nu = k + \frac{1}{2}, \quad s = \frac{\rho}{c} \quad (2.4)$$

Здесь I_ν , K_ν – модифицированные функции Бесселя полуцелого порядка, P_k – функции Лежандра, Ψ_p – трансформанта Лапласа волновой функции.

Скачок функции Ψ_p и скачок ее нормальной производной, входящие в разрывное решение (2.2), требуется связать со скачками механических величин. Займемся этим, учитывая формулы связи трансформант этих скачков и трансформант скачков смещений и напряжений (G – модуль Юнга)

$$\langle \Psi_p(r, \omega) \rangle = -s \int_0^\infty [sG^{-1} \langle \tau_p^1(\rho, \omega) \rangle + 2 \operatorname{ctg} \omega \langle u_p^1(\rho, \omega) \rangle] J_0(rs, \rho s) d\rho \quad (2.5)$$

$$\langle \Psi_p^*(r, \omega) \rangle = -\langle u_p^1(r, \omega) \rangle \quad (2.6)$$

Учитывая краевое условие (1.5), соотношение для определения скачка волновой функции согласно соотношению (2.5) запишем в виде

$$\langle \Psi_p(r, \omega) \rangle = -2s \operatorname{ctg} \omega \int_0^\infty \langle u_p^1(\rho, \omega) \rangle J_0(rs, \rho s) d\rho$$

Трансформанты скачков волновой функции и ее производной будут найдены, если будет известна трансформанта скачка смещений $\langle u_p^1(r, \omega) \rangle$. С целью ее определения запишем условие на трещине (1.5), которое согласно представлению (2.1) примет вид

$$\tau_p^1(r, \theta)|_{\theta = \omega - 0} = -\tau_p^0(r, \omega) \quad (2.7)$$

Для определения левой части равенства (2.7) учитывается соотношение

$$rG^{-1} \tau_p^1(r, \omega - 0) = 2 \operatorname{ctg} \omega \Psi_p^*(r, \omega - 0) + L_s \Psi_p(r, \omega - 0) \quad (2.8)$$

где

$$L_s f = (r^2 f')' - (rs)^2 f \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \Psi_p(r, \omega - 0) = & \frac{1}{2} \langle \Psi_p(r, \omega) \rangle - \sin \omega \int_0^\infty \left[\langle \Psi_p(\rho, \omega) \rangle \frac{\partial}{\partial \omega} G_0(rs, \rho s; \theta, \omega) \Big|_{\theta = \omega} - \right. \\ & \left. - \langle \Psi_p^*(\rho, \omega) \rangle G_0(rs, \rho s; \theta, \omega) \Big|_{\theta = \omega} \right] d\rho \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Psi_p^*(r, \omega - 0) = \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_p(r, \omega - 0)$$

Во второе соотношение (2.10) подставим значения трансформант скачков волновой функции и ее производной, выраженные через трансформанту скачка смещений, которые, в свою очередь, подставим в соотношение (2.8). Таким образом, для определения скачка смещений необходимо решить интегродифференциальное уравнение.

В полученных формулах проведем замену. Временно будем считать параметр преобразования Лапласа s положительным и положим

$$r = xs^{-1}, \quad \rho = \xi s^{-1} \quad (2.11)$$

Осуществим замену (2.11) в соотношении (2.9) и во втором соотношении (2.10) и введем обозначения

$$X(r, \omega) = \langle u_p^1(r, \omega) \rangle, \quad L_x = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + x^2 \quad (2.12)$$

С учетом замены (2.11) соотношение (2.8) запишем в виде

$$\begin{aligned} xs^{-1} G^{-1} \tau_p^1(xs^{-1}, \omega - 0) = & -2s^{-1} \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega} L_x \int_0^\infty X(\xi s^{-1}, \omega) S_3(x, \xi; \omega) d\xi + \\ & + \cos \omega L_x \int_0^\infty X(\xi s^{-1}, \omega) S_2(x, \xi; \omega) d\xi - s^{-1} \cos \omega L_x \int_0^\infty X(\xi s^{-1}, \omega) S_1(x, \xi; \omega) d\xi - \\ & - \sin \omega L_x \int_0^\infty X(\xi s^{-1}, \omega) S_0(x, \xi; \omega) d\xi \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$S_3(x, \xi; \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{[k(k+1)]^2} [P_k^1(\cos \omega)]^2 J_k(x, \xi)$$

$$S_2(x, \xi; \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{[k(k+1)]} P_k^1(\cos \omega) P_k(\cos \omega) J_k(x, \xi)$$

$$S_1(x, \xi; \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{[k(k+1)]} P_k^1(\cos \omega) P_k(\cos \omega) (J_0(x, \xi) - J_k(x, \xi))$$

$$S_0(x, \xi; \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)[P_k(\cos \omega)]^2 J_k(x, \xi)$$

Здесь использовано соотношение $L_x J_k(x, \xi) = k(k+1)J_k(x, \xi)$.

Для выделения сингулярной части из ядер полученных интегральных операторов рассмотрим асимптотику полученных выражений при $k \rightarrow \infty$. Согласно формулам, определяющим поведение функций Бесселя для больших значений порядка ([8], формулы (9.7.7), (9.7.8)), получим, что

$$J_k(x, \xi) \approx \frac{1}{2k+1} \left(\frac{x}{\xi}\right)^k$$

Асимптотическое поведение функций Лежандра при $k \rightarrow \infty$ [9] дает

$$[P_k(\cos \omega)]^2 = Q_k(\omega) + O(k^{-3/2}), \quad Q_k(\omega) = \frac{1 + \sin(2k+1)\omega}{\pi k \sin \omega}$$

Подставив полученные соотношения в ряд $S_0(x, \xi; \omega)$, находим, что асимптотическое поведение k -го члена ряда, порождаемого последним слагаемым в правой части равенства (2.13), описывается выражением $Q_k(\omega)(x/\xi)^k$.

Для выделения особенности в последнем слагаемом соотношения (2.13) проводится следующая операция: ряд $S_0(x, \xi; \omega)$ представляется в виде суммы двух слагаемых

$$S_0(x, \xi; \omega) = \left(\sum_{k=1}^N + \sum_{k=N+1}^{\infty} \right) (2k+1)[P_k(\cos \omega)]^2 J_k(x, \xi) d\xi$$

Члены ряда при больших значениях k заменяются их асимптотическим выражением $Q_k(\omega)(x/\xi)^k$. Затем в полученном соотношении добавляется и вычитается конечная

сумма $\sum_{k=1}^N Q_k(\omega)(x/\xi)^k$, что приводит ряд $S_0(x, \xi; \omega)$ к виду

$$S_0(x, \xi; \omega) = -\frac{1}{\pi \sin \omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x}{\xi}\right)^k + \alpha^1(x, \xi)$$

$$\alpha^1(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{Q}_k(\omega)(x/\xi)^k + \sum_{k=1}^N (2k+1)[P_k(\cos \omega)]^2 J_k(x, \xi) - \sum_{k=1}^N Q_k(\omega)(x/\xi)^k$$

$$\tilde{Q}_k(\omega) = \frac{\sin(2k+1)\omega}{\pi k \sin \omega}$$

Ряды в выражениях для $S_0(x, \xi; \omega)$ суммируются с помощью известных формул ([10], формулы 5.4.9(12,13) и 5.2.4(4)). Окончательно получим последнее слагаемое в правой части равенства (2.13) в виде

$$\frac{1}{\pi} L_x \int_0^{\infty} X(\xi s^{-1}, \omega) \left[\ln \frac{1}{|\xi - x|} + \alpha^1(x, \xi) + \alpha^2(x, \xi) \right] d\xi, \quad \alpha^2(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\ln \xi}{s\xi}, & x < \xi \\ \frac{\ln x}{sx} + \frac{\xi - x}{s(x\xi)^{3/2}}, & x > \xi \end{cases}$$

Используя формулы асимптотического поведения функций Бесселя и Лежандра при большом значении порядка, можно показать, что первые три слагаемых в правой части равенства (2.13) не вносят вклада в сингулярную часть.

Вернемся к исходным переменным в равенстве (2.13) и выделим слагаемое, несущее наибольшую сингулярность. Таковым является вторая производная. Затем удовлетворим условию на трещине (2.7). В результате получим

$$\frac{d^2}{dr^2} \int_a^b X(\rho, \omega) \ln \frac{1}{|r-\rho|} d\rho + \int_a^b X(\rho, \omega) R(r, \rho, s) d\rho = f(r, s) \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} R(rs, \rho s) &= \frac{2}{rsdr} [-\ln|r-\rho| + \alpha^1(rs, \rho s) + \alpha^2(rs, \rho s)] + \\ &+ \text{ctg } \omega \frac{d^2}{dr^2} [s^{-1} S_1(rs, \rho s; \omega) + S_2(rs, \rho s; \omega) + 4 \text{ctg } \omega s^{-1} S_3(rs, \rho s; \omega)] + \\ &+ \text{ctg } \omega \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [4s^{-1} S_1(rs, \rho s; \omega) + 4S_2(rs, \rho s; \omega) + 8 \text{ctg } \omega s^{-1} S_3(rs, \rho s; \omega)] - \\ &- \text{ctg } \omega [s S_1(rs, \rho s; \omega) - 2s^2 S_2(rs, \rho s; \omega) - 4 \text{ctg } \omega S_3(rs, \rho s; \omega)] \\ f(r, s) &= -\frac{Gs^{-1}r^{-3}}{\sin \omega} \tau_p^0(r, \omega) \end{aligned}$$

3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Случай включения. С учетом представления (2.1) условие на включении (1.6) запишем в виде

$$u_p^1(r, \theta) \Big|_{\theta=\omega-0} = -u_p^0(r, \omega) \quad (3.1)$$

Левая часть равенства (3.1) определяется формулой (2.2) с учетом того, что оболочка сцеплена с упругой средой, а значит в соотношениях (2.5), (2.6) следует положить

$$\langle u_p^1(r, \omega) \rangle = 0 \quad (3.2)$$

Искомую трансформанту скачка напряжений обозначим через $\Phi_p(r) = \langle \tau_p^1(r, \omega) \rangle$. Тогда с учетом равенств (2.5), (2.6), (3.2) соотношение (2.2) запишем в виде

$$u_p^1(r, \theta) = -s^2 \frac{\sin \omega}{G} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\infty \xi \Phi_p(\xi) \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \omega} G_0(rs, \rho s; \theta, \omega) J_0(\rho s, \xi s) d\xi d\rho \quad (3.3)$$

Осуществив в равенстве (3.3) предельный переход к $\theta = \omega - 0$ и воспользовавшись условием (3.1), получим интегральное уравнение в пространстве трансформант Лапласа

$$\int_a^b \sigma \Phi_p(\sigma) K_p(r, \sigma) d\sigma = -G u_p^0(r, \omega) \quad (3.4)$$

$$K_p(r, \sigma) = \sin \omega \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{s^2 [k(k+1)]^2} |P_k^1(\cos \omega)|^2 (J_0(rs, \sigma s) - J_k(rs, \sigma s))$$

Исследуя асимптотику ядра при $k \rightarrow \infty$ и проведя операции по суммированию слабосходящейся части ряда в соотношении (3.4) аналогично приведенной выше процедуре для уравнения (2.9), получим интегральное уравнение

$$\frac{\sin \omega}{\pi} \int_a^b \ln \frac{1}{|r-\sigma|} \Phi_\rho(\sigma) d\sigma + \frac{\sin \omega}{\pi s^2} \int_a^b M(r, \sigma, s) \Phi_\rho(\sigma) d\sigma = -Gu_\rho^0(r)$$

$$M(r, \sigma, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\omega}{k} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^k - \sum_{k=1}^N \frac{2k+1}{k(k+1)} [P_k^1(\cos \omega)]^2 J_k(rs, \sigma s) + \quad (3.5)$$

$$+ \frac{1}{s^2} \left(\frac{r}{\sigma} + 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^k + \begin{cases} \frac{\ln \sigma}{s\sigma}, & r < \sigma \\ \frac{\ln r}{sr} + \frac{\sigma-r}{sr\sigma}, & r > \sigma \end{cases}$$

4. Решение задачи для трещины. Чтобы применить к равенству (2.14) теорему о свертке для интегрального преобразования Лапласа, вводятся функции

$$\Phi(\rho, \omega, t) = L^{-1}(X(\rho, \omega)), \quad D(r, \rho, t) = L^{-1}(R(rs, \rho s)), \quad F(r, t) = L^{-1}(f(rs))$$

Здесь L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа. Для обращения функции $R(rs, \rho s)$ используются табличные формулы обращения [11]

$$L^{-1}[I_\vartheta(ap)K_\vartheta(bp)] = Z_\vartheta(t, a, b) = \begin{cases} 0, & t < a - b \\ \frac{1}{2\sqrt{ab}} P_{\vartheta-1/2}((2ab)^{-1}(a^2 + b^2 - t^2)), & a - b < t < a + b \\ \frac{1}{\pi\sqrt{ab}} Q_{\vartheta-1/2}((2ab)^{-1}(t^2 - a^2 - b^2)), & t > a + b \end{cases}$$

В результате оригинал функции $R(rs, \rho s)$ запишем в виде

$$D(r, \rho, t) = \operatorname{ctg} \omega \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)[k(k+1)]^{-1} P_k^1(\cos \omega) P_k(\cos \omega) \left[{}_1\Omega_k'(t, r, \rho) + \right.$$

$$+ \frac{4}{r} {}_1\Omega_k(t, r, \rho) - Z_\vartheta(t, r, \rho) + Z_\vartheta(t, r, \rho) +$$

$$+ {}_2\Omega_k''(t, r, \rho) + \frac{1}{r^2} {}_2\Omega_k'(t, r, \rho) + 2 \left[\frac{\partial Z_\vartheta(t, r, \rho)}{\partial t} + Z_\vartheta(0, r, \rho) \right] +$$

$$+ 4 \operatorname{ctg}^2 \omega \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)[k(k+1)]^{-2} [P_k^1(\cos \omega)]^2 \left[{}_3\Omega_k'(t, r, \rho) + \frac{2}{r} {}_3\Omega_k(t, r, \rho) + \right.$$

$$\left. + {}_1\Omega_k'(t, r, \rho) + Z_\vartheta(t, r, \rho) \right] + \frac{2}{r|r-\rho|} + \frac{2}{r} \sum_{k=1}^N (2k+1) [P_k(\cos \omega)]^2 {}_2\Omega_k(t, r, \rho) + \alpha^2(t, r, \rho)$$

$${}_1\Omega_k(t, r, \rho) = \int_0^1 \tilde{t} [Z_0'(t-\tilde{t}, r, \rho) - Z_\vartheta'(t-\tilde{t}, r, \rho)] d\tilde{t}$$

$${}_2\Omega_k(t, r, \rho) = \int_0^1 Z_\vartheta(t-\tilde{t}, r, \rho) d\tilde{t}, \quad {}_3\Omega_k(t, r, \rho) = \int_0^t \tilde{t} Z_\vartheta'(t-\tilde{t}, r, \rho) d\tilde{t}$$

Применение к уравнению (2.14) обратного преобразования Лапласа с использованием теоремы о свертке приводит к интегродифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^2}{dr^2} \int_a^b \ln \frac{1}{|r-\rho|} \Phi(t, \rho, \omega) d\rho + \iint_{0a}^{tb} D(t-\tilde{t}, r, \rho) \Phi(\tilde{t}, \rho, \omega) d\rho d\tilde{t} = F(t, r) \quad (4.1)$$

Его приближенное решение строится на основе совместного использования дискретизации уравнения по времени и метода ортогональных многочленов. Сначала промежуток времени $[0, T]$, на протяжении которого исследуется взаимодействие упругой волны с дефектом, с шагом $h = T/N$ разбивается на интервалы $[\tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1}]$, где $\tilde{t}_k = kT/N$ ($k = 1, 2, \dots, N$), а интеграл по переменной \tilde{t} заменяется в уравнении (4.1) квадратурной формулой Симпсона, узлы которой обозначаются как A_k . Имеем

$$\frac{d^2}{dr^2} \int_a^b \ln \frac{1}{|r-\rho|} \Phi_n(\rho) d\rho + \sum_{k=1}^N A_k \int_a^b D(t_n - \tilde{t}_k, r, \rho) \Phi_k(\rho) d\rho = F_n(r) \quad (4.2)$$

где

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad \Phi_n(\rho) = \Phi(t_n, \rho), \quad F_n(r) = F(t_n, r)$$

Прежде чем использовать метод ортогональных многочленов, который базируется на применении спектрального соотношения для многочленов Чебышева второго рода [6]

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \sqrt{1-y^2} U_n(y) dy = -(n+1) U_n(x), \quad |x| \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

проведем в уравнении (4.2) замену переменных

$$r = \delta_+ + \delta_- x, \quad \rho = \delta_+ + \delta_- y; \quad \delta_+ = \frac{a+b}{2}, \quad \delta_- = \frac{b-a}{2} \quad (4.4)$$

Решение системы уравнений, полученной в результате этой замены, строим в виде

$$\Phi_n(\delta_+ + \delta_- y) = \sqrt{1-y^2} \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l^{(n)} U_l(y) \quad (4.5)$$

После применения стандартной схемы метода ортогональных многочленов [6] приходим к последовательности ($n = 1, 2, \dots, N$) бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$Y_l \Phi_l^{(n)} - \sum_{k=1}^N A_k \sum_{m=0}^{\infty} B_{kml} \Phi_m^{(k)} = F_l^{(n)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.6)$$

где

$$Y_l = \frac{\delta_-^2}{\pi(l+1)}, \quad B_{kml} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2} U_m(y) U_l(x) D(t_n - \tilde{t}_k, x, y) dx dy$$

$$F_l^{(n)} = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_l(x) F_n(x) dx$$

Таким образом, для определения каждого конкретного значения $\Phi_l^i = \Phi_l (l = 0, 1, 2, \dots)$ получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$Y_l \Phi_l^{(i)} - \sum_{m=0}^{\infty} B_{ml} \Phi_m^{(i)} = F_l^i - \sum_{k=1}^{i-1} A_k \sum_{m=0}^{\infty} B_{km} \Phi_m^{(k)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (4.7)$$

Такие системы решаются приближенно методом редукции. Его применимость доказывается по схеме, изложенной ранее [6], которая базируется на доказательстве сходимости рядов

$$G_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |B_{ml}|^2, \quad G_2 = \sum_{l=0}^{\infty} |F_l|^2$$

Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений (КИН) на краях трещины

$$N^+ = \lim_{r \rightarrow a-0} [\sqrt{a-r} \tau(r, \omega, t)] \quad (4.8)$$

проведем замену (4.4). Получим после дискретизации по времени

$$N^+(t_n) = \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow -1-0} [\sqrt{-x-1} \tau(\delta_+ + \delta_{-x}, \omega, t_n)], \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \tau(\delta_+ + \delta_{-x}, \omega, t_n) &= \frac{2 \sin \omega}{b-a} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \Phi_n(\delta_+ + \delta_{-y}) dy + \\ &+ \frac{b-a}{2} \sin \omega \sum_{k=1}^N A_k \int_{-1}^1 D(t_n - \tilde{t}_k, \delta_+ + \delta_{-x}, \delta_+ + \delta_{-y}) \Phi_k(\delta_+ + \delta_{-y}) dy - F_n(\delta_+ + \delta_{-x}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Последние два слагаемых в силу непрерывности не внесут вклада в величину КИН.

Для вычисления предела в выражении (4.10) нужно продолжить спектральное отношение (4.3) на интервал $|x| > 1$. Для этого используется результат [6], согласно которому

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-s|} \sqrt{1-s^2} U_m(s) ds &= \frac{(m+1)^2 2^{m+2}}{(x-1)^{m+2}} \left[F\left(\frac{3}{2} + m, m+2; \frac{3}{2}; \frac{x+1}{x-1}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{m+1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{-1-x}} F\left(\frac{3}{2} + m, m+1; \frac{1}{2}; \frac{x+1}{x-1}\right) \right], \quad x < -1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса. Используя формулы (4.11), (4.5), перейдем к пределу в выражении (4.9).

Окончательное выражение для КИН примет вид

$$N^+(t_n) = \frac{\sqrt{b-a} \pi}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} (l+1) \Phi_l^{(n)} \quad (4.12)$$

5. Решение задачи для включения. Для решения интегрального уравнения (3.5) применяется обратное преобразование Лапласа с учетом теоремы о свертке, после

чего применяется дискретизация по времени по схеме, описанной выше. В результате получаем систему интегральных уравнений

$$\int_a^b \ln \frac{1}{|r-\rho|} \Phi_n(\rho) d\rho + \int_a^b \rho \sum_{k=1}^N A_k \Phi_k(\rho) M(t_n - \tilde{t}_k, r, \rho) d\rho = -\frac{\pi G^2}{\sin \omega} u_n^0(r) \tag{5.1}$$

где

$$\Phi_n(\rho) = \Phi(t_n, \rho), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Решение каждого интегрального уравнения системы основывается на применении спектрального соотношения для многочленов Чебышева первого рода [6]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} (1-y^2)^{-1/2} T_n(y) dy = \begin{cases} \ln 2, & n = 0 \\ n^{-1} T_n(x), & n = 1, 2, \dots \end{cases}, \quad |x| \leq 1 \tag{5.2}$$

Согласно изложенной выше схеме проводится замена переменных (4.4), а затем решение уравнения разыскивается в виде ряда

$$\Phi_n(y) = (1-y^2)^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l^{(n)} T_l(y) \tag{5.3}$$

Реализация стандартной схемы метода ортогональных многочленов приводит к последовательности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений вида (4.6), коэффициенты которых таковы:

$$Y_l = \frac{\pi}{2l}, \quad B_{kml} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\delta_-(\delta_+ + \delta_- y)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} M(t_n - \tilde{t}_k, \delta_+ + \delta_- x, \delta_+ + \delta_- y) T_l(x) T_m(y) dx dy \tag{5.4}$$

$$F_l^n = -\int_{-1}^1 \frac{u_n^0(x)}{\sqrt{1-x^2}} T_l(x) dx$$

Каждая из бесконечных систем линейных алгебраических уравнений решается приближенно методом редукции, применимость которого доказывается по схеме, изложенной ранее [6].

Для неподвижного включения было проведено исследование зависимости реактивного момента

$$M_0(t) = \int_a^b \tau(r, \omega, t) dr$$

от времени. В случае незакрепленного включения для определения неизвестного угла поворота используется принцип Даламбера, согласно которому

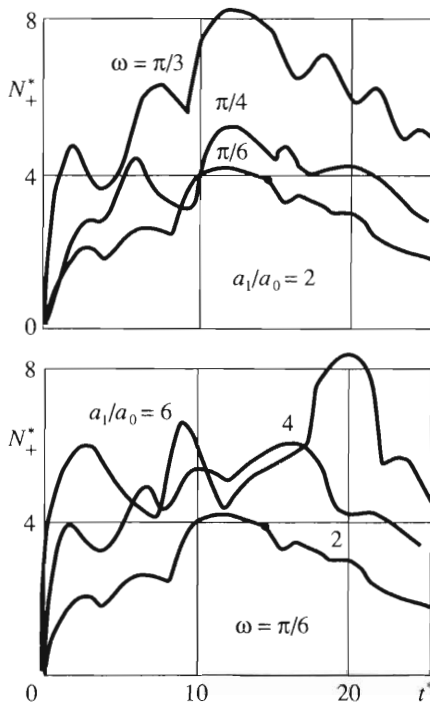
$$M_0(t) + AH(t) = J d^2 \alpha(t) / dt^2 \tag{5.5}$$

где $AH(t)$ – приложенный крутящий момент, J – заданный момент инерции включения относительно оси вращения.

Переходя в соотношении (5.5) в пространство трансформант Лапласа

$$\alpha_p = M_{0p} / (Js^2) + A / (Js^3) \tag{5.6}$$

и подставляя полученное выражение в условие (1.7), записанное также в пространстве трансформант Лапласа, получаем систему интегральных уравнений вида (5.1), из



Фиг. 1

которой определяются коэффициенты разложения (5.3). Обратив после этого трансформанту (5.6), получим формулу для определения угла поворота включения

$$\alpha(t) = \frac{1}{J} \int_0^t M_0(t-\tilde{t}) \tilde{t} d\tilde{t} + \frac{A}{2J} t^2 \tag{5.7}$$

6. Результаты вычислений. Для расчета механических характеристик при решении систем вида (4.7) использовался метод редукции. Для достижения точности вычислений $\epsilon = 10^{-6}$ оказалось достаточно сохранять 10–12 членов ряда. В качестве материала упругой среды выбиралась пластмасса.

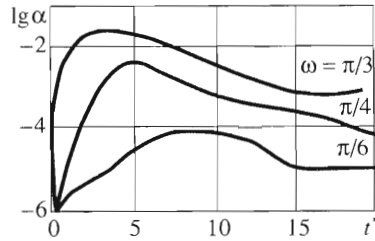
В верхней части фиг. 1 представлены зависимости коэффициента интенсивности напряжений (КИН) от параметра t^* при разных значениях угла раствора трещины ω при $a_1 = 2a_0$. Здесь

$$N_+^* = \frac{N_+}{(a_1 - a_0)\tau_0}, \quad t^* = \frac{tc}{a_1 - a_0}$$

Видно, что с ростом угла раствора трещины абсолютные значения КИН возрастают, а пики этих значений практически совпадают по времени.

Численные расчеты показали, что требуемая точность вычислений сохраняется до момента времени, равного 25, при больших значениях времен накапливаемая погрешность приводит к резкому ухудшению сходимости счета.

В нижней части фиг. 1 приведены графики КИН при значении угла раствора трещины $\omega = \pi/6$ для разных относительных линейных размеров трещины. Отмечается не



Фиг. 2

только рост абсолютных значений КИН с увеличением линейных размеров, но и существенное изменение времени наступления пика значения КИН: чем больше линейный размер трещины, тем позже по времени достигается максимальное значение КИН.

На фиг. 2 приведены зависимости логарифма угла поворота включения (его линейный размер $a_1 = 2a_0$) от безразмерного времени при разных значениях угла раствора, материал включения – алюминий. Видно, что угол поворота включения возрастает с увеличением угла раствора дефекта, что объясняется существенным влиянием сил инерции, зависящих от массы включения, которая растёт с увеличением размеров дефекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайсфельд Н.Д., Пастух А.И., Попов Г.Я. Задачи о напряженном состоянии среды, содержащей конический дефект // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. Вип. 4. Т. 1. С. 16–24.
2. Гутман С.Г. Общее решение задачи теории упругости в обобщенных цилиндрических координатах // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 6. С. 993–996.
3. Мартыненко М.А. Осесимметричная задача теории упругости для пространства с коническим разрезом // Докл. АН УССР. Сер. А. 1985. № 5. С. 35–40.
4. Грилицкий Д. В., Поддубняк А.П. Рассеяние нестационарной волны кручения на жесткой неподвижной сфере в упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 5. С. 86–92.
5. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: PWN, 1973 = Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М., 1982. 342 с.
7. Попов Г. Я. Построение разрывного решения уравнений динамической упругости для конического дефекта // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 5. С. 624–628.
8. Handbook of Mathematical Functions / Eds. M. Abramowitz and I.A. Stegun. Washington: Gov. Print, 1964 = Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. Vateman H., Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. V. 2. N.Y., etc.: McGraw-Hill, 1955 = Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. 295 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
11. Oberhettinger F., Badii L. Tables of Laplace Transforms. Berlin, etc.: Springer, 1973. 428 p.