УДК 539.3

© 2005 г. Г. Я. Попов

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УСЕЧЕННОГО ПОЛОГО КОНУСА

Дается точное решение осесимметричной задачи теории упругости для кругового полого конуса, усеченного двумя сферическими поверхностями (торцы конуса) при учете собственного веса или температуры (неоднородные уравнения Ламе). На конических поверхностях выполняются условия скользящей заделки, на одном из торцов конуса заданы напряжения, а граничные условия на другом торце могут быть произвольными.

Случай однородных уравнений Ламе и для других условий на торцах был рассмотрен ранее [1], однако использованный метод не переносится на случай неоднородных уравнений Ламе. Была рассмотрена неосесимметричная задача для полого кругового конуса, в том числе с вырезом вдоль образующей, и для неоднородных уравнений Ламе [2, 3], результаты [2] нуждаются в уточнении (см. в [4]); в работе [3] принимались другие граничные условия на торцах и конических поверхностях.

1. Постановка задачи. Рассматривается упругое тело (с модулем сдвига G, коэффициентом Пуассона μ) в сферической системе координат r, θ, φ, фиксируемой соотношениями

$$a_0 \le r \le a_1, \quad \omega_0 \le \theta \le \omega_1, \quad -\pi \le \varphi < \pi \tag{1.1}$$

В осесимметричном случае задача теории упругости для такого тела распадается на задачу об осесимметричной деформации с искомыми смещениями u_r и u_θ и задачу кручения с искомым смещением u_φ. Будем рассматривать осесимметричную деформацию. Введя обозначения

$$\begin{gathered} 2Gu_r = u, \quad 2Gu_\theta = \upsilon, \quad \mu_0 = (1-2\mu)^{-1}, \quad \mu_* = \mu_0 + 1, \\ \mu_{**} = \mu_0 + 2 = \kappa\mu_0, \quad \kappa = 3 - 4\mu \end{gathered} \tag{1.2}$$

и помечая производную по r штрихом, а по θ – точкой, для функций u и υ получаем систему уравнений (см., например, [5])

$$\begin{gathered} (r^2u')' - 2u + \frac{1}{\mu_*}\frac{(\sin\theta u^{\cdot})^{\cdot}}{\sin\theta} - \frac{\mu_{**}}{\mu_*}\frac{(\sin\theta \upsilon)^{\cdot}}{\sin\theta} + \frac{\mu_0 r}{\mu_*}\frac{(\sin\theta \upsilon')^{\cdot}}{\sin\theta} = -\frac{2r^2}{\mu_*}q_r \\ (r^2\upsilon')' + \mu_*\left|\frac{(\sin\theta \upsilon^{\cdot})^{\cdot}}{\sin\theta} - \frac{\upsilon}{\sin^2\theta}\right| + \mu_0 r u'^{\cdot} + 2\mu_* u^{\cdot} = -2r^2 q_\theta \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь q_r и q_θ – составляющие интенсивности объемных сил. Напряжения выражаются через введенные функции по формулам [5]

$$\begin{gathered} (1-2\mu)r\sigma_r = (1-\mu)ru' + 2\mu u + \mu\frac{(\sin\theta \upsilon)^{\cdot}}{\sin\theta} \\ (1-2\mu)r\sigma_\theta = u + \mu r u' + (1-\mu)\upsilon^{\cdot} + \mu \operatorname{ctg}\theta \upsilon, \quad 2r\tau_{r\theta} = r\upsilon' - \upsilon + u^{\cdot} \end{gathered} \tag{1.4}$$

Будем считать, что на сферической грани $r = a_1$ заданы условия первой основной задачи

$$\sigma_r(a_1, \theta) = -p_1(\theta), \quad \tau_{r\theta}(a_1, \theta) = q_1(\theta) \tag{1.5}$$

На конических поверхностях $\theta = \omega_i$ $(i = 0, 1)$ выполнены условия скользящей заделки

$$\upsilon(r, \omega_i) = 0, \quad \tau_{r\theta}(r, \omega_i) = 0 \tag{1.6}$$

На оставшейся сферической поверхности $r = a_0$ могут выполняться все возможные случаи граничных условий:

условия первой основной задачи

$$\sigma_r(a_0, \theta) = -p_0(\theta), \quad \tau_{r\theta}(a_0, \theta) = q_0(\theta) \tag{1.7}$$

условия второй основной задачи

$$u(a_0, \theta) = 0, \quad \upsilon(a_0, \theta) = 0 \tag{1.8}$$

условия скользящей заделки

$$u(a_0, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(a_0, \theta) = 0 \tag{1.9}$$

2. Случаи, когда поставленная задача допускает элементарные решения. Было построено [1] точное решение краевой задачи для однородных ($q_r = q_\theta = 0$) уравнений (1.3) в области (1.1) для случая, когда на конических поверхностях выполнены условия скользящей заделки (1.6), а на сферических поверхностях выполнены условия первой основной задачи (1.5) и (1.7), но при

$$q_i(\theta) = 0, \quad i = 0, 1 \tag{2.1}$$

с использованием нового интегрального преобразования.

Однако не было замечено, что задача допускает простое решение при

$$p_i(\theta) = p_i \equiv \text{const}, \quad q_i(\theta) = 0, \quad i = 0, 1 \tag{2.2}$$

Действительно, если принять

$$\upsilon(r, \theta) \equiv 0, \quad u(r, \theta) = \varphi(r), \quad a_0 \le r \le a_1, \quad \omega_0 \le \theta \le \omega_1 \tag{2.3}$$

то граничные условия (1.6) будут выполнены, а однородные уравнения (1.3) выродятся в одно уравнение

$$[r^2\varphi'(r)]' - 2\varphi(r) = 0, \quad a_0 < r < a_1 \tag{2.4}$$

Можно проверить, что общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$\varphi(r) = C_0(r) + C_1 r^{-2}; \quad C_i = \text{const}, \quad i = 0, 1 \tag{2.5}$$

Учитывая соотношения (2.3), (1.4) и (2.5), удовлетворим граничным условиям (1.5) и (1.6), приняв условия(2.2). В результате найдем

$$[C_0, C_1] = -\frac{[\tilde{\mu}^{-1}(p_1 a_1^3 - p_0 a_0^3), a_0^3 a_1^3 (p_1 - p_0)/2]}{a_1^3 - a_0^3}, \quad \tilde{\mu} = \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu}$$

и поле смещений и напряжений для рассмотренной задачи будут определяться формулами

$$\begin{gathered} u(r, \theta) = C_0 r - C_1 r^{-2}, \quad \upsilon(r, \theta) \equiv 0, \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) \equiv 0 \\ [\sigma_r, \sigma_\theta] = [\tilde{\mu}, (1 + \mu)\mu_0] C_0 + [2, 1] C_1 r^{-3} \end{gathered} \tag{2.6}$$

Такое же элементарное решение получим, когда на сферической грани $r = a_0$ будет скользящая заделка (1.9) либо полное сцепление (1.8). В обоих случаях поля смещений и напряжений будут определяться формулами (2.6), изменятся только формулы для нормальных напряжений

$$[\sigma_r, \sigma_\theta] = \tilde{\mu}C_0 + [2, 1]C_1 r^{-3} \tag{2.7}$$

и будут другие значения для C_0, C_1

$$[C_0, C_1] = a_1^3 p_1(\tilde{\mu}a_1^3 + 2a_0^3)^{-1}[-1, a_0^3] \tag{2.8}$$

Полученные формулы одинаковы как для полого конуса ($\omega_i \neq 0$, $i = 0, 1$), так и для сплошного конуса ($\omega_1 \neq 0$, $\omega_0 = 0$). Они будут верны и для сферического слоя $a_0 \leq r \leq a_1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \varphi < \pi$. Однако полученные элементарные решения теряют силу, если нарушено требование (2.2) либо сами уравнения (1.3) окажутся неоднородными (q_r, $q_\theta \neq 0$). При этом использованный ранее [1] метод позволяет избавиться от требования (2.1), но оказывается неприменимым, если уравнения (1.3) неоднородные, т.е. когда решается задача несвязанной термоупругости, а значит, в правых частях уравнений (1.3) будут фигурировать заранее найденные производные от температуры [5].

Записанные уравнения (1.3) соответствуют случаю наличия объемных сил. Если ось конуса (1.1) направить вертикально вверх, а в качестве объемных сил взять силы веса (удельный вес материала конуса обозначен через γ), то в уравнениях (1.3) следует принять

$$q_r = -\gamma\cos\theta, \quad q_\theta = \gamma\sin\theta, \quad \omega_0 < \theta < \omega_1 \tag{2.9}$$

Ниже излагается метод построения точного решения сформулированных задач для конуса (1.1) в случае неоднородных уравнений (термоупругости), в частности при учете собственного веса, т.е. при выполнении соотношений (2.9).

3. Сведение поставленных задач к векторной одномерной краевой задаче. К системе уравнений (1.3) применим интегральное преобразование по переменной θ, так чтобы были заранее удовлетворены граничные условия (1.5), которые эквивалентны условиям

$$\upsilon(r, \omega_i) = 0, \quad u^{\bullet}(r, \omega_i) = 0; \quad i = 0, 1 \tag{3.1}$$

Чтобы эти условия выполнялись, необходимо к уравнениям (1.3) применить полученное ранее интегральное преобразование [1, 6], т.е. перейти к трансформантам

$$\begin{aligned} \upsilon_k(r) &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} \varphi_a^1(\theta, \nu_k)\upsilon(r, \theta)\sin\theta d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega_1} y(\theta, \nu_k)\upsilon(r, \theta)\sin\theta d\theta \\ u_k(r) &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} \varphi_c^0(\theta, \nu_k)u(r, \theta)\sin\theta d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega_1} y_*(\theta, \nu_k)u(r, \theta)\sin\theta d\theta; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Вторые равенства выписаны согласно принятым ранее обозначениям [6]

$$\begin{aligned} y(\theta, \nu_k) &= y_0(\theta, \nu_k)|_{\mu = 1} = \varphi_a^1(\theta, \nu_k) \\ y_*(\theta, \nu_k) &= y_1(\theta, \nu_k)|_{\mu = 0, h_0 = 0, h_1 = 0} = \varphi_c^0(\theta, \nu_k) \end{aligned} \tag{3.3}$$

(здесь μ – верхний индекс в сферических функциях $P_\nu^\mu(\cos\theta)$, $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ [7], удовлетворяющих уравнению Лежандра и использованных ранее [6], причем для записи граничных условий введены вещественные числа h_0, h_1, переходящие в условия, принятые здесь при $h_0 = h_1 = 0$). При этом [1, 6]

$$y(\theta, \nu) = P_\nu^1(\cos\theta)Q_\nu^1(\cos\omega_1) - P_\nu^1(\cos\omega_1)Q_\nu^1(\cos\theta), \quad \nu = \nu_k$$
$$y_*(\theta, \nu) = P_\nu(\cos\theta)Q_\nu^1(\cos\omega_1) - P_\nu^1(\cos\omega_1)Q_\nu(\cos\theta), \quad \nu = \nu_k \tag{3.4}$$

$$y_*^{\bullet}(\theta, \nu_k) = y(\theta, \nu_k) \tag{3.5}$$

ν_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) – корни трансцендентного уравнения

$$\Omega_\nu^1 \equiv P_\nu^1(\cos\omega_0)Q_\nu^1(\cos\omega_1) - P_\nu^1(\cos\omega_1)Q_\nu^1(\cos\omega_0) = 0 \tag{3.6}$$

Собственные функции (3.4) удовлетворяют уравнению Лежандра при $\mu = 1$ и $\mu = 0$ соответственно (в последнем случае индекс $\mu = 0$ опущен). Для них выполняются условия

$$y(\omega_i, \nu_k) = 0, \quad y_*^{\bullet}(\omega_i, \nu_k) = 0, \quad i = 0, 1 \tag{3.7}$$

Для трансформант (3.2) установлены формулы обращения [1, 6]

$$\upsilon(r, \theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} \upsilon_k(r)\frac{2\nu_k + 1}{\nu_k(\nu_k + 1)}\left[S_\nu^1\frac{\partial\Omega_\nu^1}{\partial\nu}\right]_{\nu=\nu_k}^{-1} y(\theta, \nu_k)$$
$$u(r, \theta) = -\sum_{k=0}^{\infty} u_k(r)(2\nu_k + 1)\left[S_\nu^1\frac{\partial\Omega_\nu^1}{\partial\nu}\right]_{\nu=\nu_k}^{-1} y_*(\theta, \nu_k) \tag{3.8}$$

$$S_\nu^1 = P_\nu^1(\cos\omega_1)/P_\nu^1(\cos\omega_0) = Q_\nu^1(\cos\omega_1)/Q_\nu^1(\cos\omega_0), \quad \nu = \nu_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Чтобы в уравнениях (1.3) перейти к трансформантам (3.2), следует первое уравнение (1.3) умножить на $\sin\theta y_*(\theta, \nu_k)$, а второе на $\sin\theta y(\theta, \nu_k)$ и проинтегрировать на отрезке $[\omega_0, \omega_1]$ по частям. В результате будем иметь

$$[r^2u_k'(r)]' - 2u_k(r) - \mu_*^{-1}[Nu_k(r) - \mu_{**}\upsilon_k(r) + \mu_0 r\upsilon_k'(r)] = r^2 q_k$$
$$[r^2\upsilon_k'(r)]' - \mu_* N\upsilon_k(r) + 2\mu_* Nu_k(r) + \mu_0 Nru_k'(r) = -r^2 q_k^*, \quad a_0 < r < a_1 \tag{3.9}$$

где

$$N = \nu_k(\nu_k + 1), \quad \left\|\begin{matrix} q_k \\ q_k^* \end{matrix}\right\| = \gamma\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left\|\begin{matrix} \sin 2\theta y(\theta, \nu_k)\mu_*^{-1} \\ 2\sin^2\theta y_*(\theta, \nu_k) \end{matrix}\right\| d\theta \tag{3.10}$$

При этом следует учесть уравнение Лежандра, которому удовлетворяют собственные функции $y(\theta, \nu_k)$ и $y^*(\theta, \nu_k)$, а также соотношения (3.1), (3.7), (3.5) и (2.9).

Граничные условия (1.5) и (1.8) в трансформантах (3.2) запишутся в виде

$$a_1\upsilon_k'(a_1) - \upsilon_k(a_1) + Nu_k(a_1) = 2a_1 q_{1k}$$
$$(1 - \mu)a_1 u_k'(a_1) - 2\mu u_k(a_1) - \mu\upsilon_k(a_1) = -(1 - 2\mu)a_1 p_{1k} \tag{3.11}$$

$$u_k(a_0) = 0, \quad \upsilon_k(a_0) = 0 \tag{3.12}$$

где

$$p_{ik} = \int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} p_i(\theta) y_*(\theta, \nu_k) \sin\theta d\theta, \quad q_{ik} = \int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} q_i(\theta) y(\theta, \nu_k) \sin\theta d\theta; \quad i = 0, 1 \tag{3.13}$$

Граничные условия (1.7) в трансформантах (3.2) перейдут в условия (3.11) с заменой a_1 на a_0, а граничные условия (1.9) запишутся в виде

$$u_k(a_0) = 0, \quad a_0 \upsilon_k'(a_0) - \upsilon_k(a_0) = 0 \tag{3.14}$$

Таким образом, все варианты поставленной задачи сводятся к одномерной краевой задаче для уравнений (3.9). Представляется удобным привести эту краевую задачу, заданную на отрезке $[a_0, a_1]$, к отрезку $[\alpha, 1]$, $\alpha = a_0/a_1 < 1$ с помощью замены

$$r = a_1\rho, \quad u_k(a_1\rho) = \tilde{u}_k(\rho), \quad \upsilon_k(a_1\rho) = \tilde{\upsilon}_k(\rho) \tag{3.15}$$

Для новых искомых функций система уравнений (3.9) сохранит прежний вид (если штрихом помечать производную по ρ) и будет задана на отрезке $\alpha < \rho < 1$.

Граничные условия (3.11), (3.12), (3.14) следует тоже записать для новых функций $\tilde{u}_k(\rho)$, $\tilde{\upsilon}_k(\rho)$. Например, граничные условия (3.11), (3.12) примут вид

$$\begin{gathered} \tilde{\upsilon}_k'(1) - \tilde{\upsilon}_k(1) + N u_k(1) = 2a_1 q_{1k} \\ (1-\mu)\tilde{u}_k'(1) - 2\mu\tilde{u}(1) - \mu\tilde{\upsilon}_k(1) = -(1-2\mu)a_1 p_{1k} \\ \tilde{u}_k(\alpha) = 0, \quad \tilde{\upsilon}_k(\alpha) = 0 \end{gathered} \tag{3.16}$$

Полученную одномерную краевую задачу запишем в векторном виде, для чего введем искомый вектор $\mathbf{y}(\rho)$ и заданный вектор $\mathbf{f}(\rho)$ и матрицы вида

$$\begin{gathered} \mathbf{y}(\rho) = \left\| \begin{matrix} \tilde{u}_k(\rho) \\ \tilde{\upsilon}_k(\rho) \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{f}(\rho) = a_1^2 \left\| \begin{matrix} q_k \\ -q_k^* \end{matrix} \right\| \rho^2 \\ P = \left\| \begin{matrix} -2 - N\mu_*^{-1} & \mu_{**}\mu_*^{-1} \\ 2\mu_* N & (-\mu_* N) \end{matrix} \right\|, \quad I = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad Q = \left\| \begin{matrix} 0 & -\mu_*^{-1} \\ N & 0 \end{matrix} \right\| \end{gathered} \tag{3.17}$$

а также граничные функционалы

$$U_i[\mathbf{y}(\rho)] = A_i \mathbf{y}(\alpha_i) + B_i \mathbf{y}'(\alpha_i), \quad i = 0, 1; \quad \alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_1 = 1 \tag{3.18}$$

с матрицами и векторами вида

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} N & -1 \\ 2\mu & -\mu \end{matrix} \right\|, \quad B_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1-\mu & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \boldsymbol{\gamma}_1 = \left\| \begin{matrix} -2q_{1k} \\ (1-2\mu)p_{1k} \end{matrix} \right\|, A_0 = I, B_0 = 0, \boldsymbol{\gamma}_0 = 0 \tag{3.19}$$

Теперь краевую задачу (3.9), (3.16) в векторной форме можно записать так:

$$\begin{gathered} L_2\mathbf{y}(\rho) \equiv I[\rho^2 \mathbf{y}'(\rho)]' + \mu_0 Q\rho\mathbf{y}'(\rho) + P\mathbf{y}(\rho) = \mathbf{f}(\rho), \quad \alpha < \rho < 1 \\ U_i[\mathbf{y}(\rho)] \equiv a_i \boldsymbol{\gamma}_i, \quad i = 0, 1 \end{gathered} \tag{3.20}$$

Все варианты поставленной задачи сводятся к такой же векторной задаче (3.20), будет меняться только вид граничных функционалов (3.20) и векторов $\boldsymbol{\gamma}_0$, $\boldsymbol{\gamma}_1$.

К такой же векторной задаче сведутся и аналогичные задачи несвязанной термоупругости, изменится только вид вектора $\mathbf{f}(\rho)$.

4. Частичное решение векторной задачи, дающее точное решение для частного случая поставленных задач. Если будет найдена матрица Грина $G(\rho, \xi)$ и базисная система матриц $\Psi_j(\rho)$ ($j = 0, 1$), то решение краевой задачи (3.20) запишется в виде [8]

$$\mathbf{y}(\rho) = \int_{\alpha}^{1} G(\rho, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi - \Psi_0(\rho)a_0\gamma_0 - \Psi_1(\rho)a_1\gamma_1 \tag{4.1}$$

Чтобы построить матрицы $G(\rho, \xi)$ и $\Psi_j(\rho)$, необходимо знать фундаментальную систему $Y_j(\rho)$ ($j = 0, 1$), т.е. построить два линейно-независимых решения матричного уравнения

$$L_2Y(\rho) = 0, \quad \alpha < \rho < 1 \tag{4.2}$$

Можно убедиться, что решением уравнения (4.2) будет функция

$$Y(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \rho^s M^{-1}(s)ds \tag{4.3}$$

Здесь $M^{-1}(s)$ – матрица, обратная к матрице

$$M(s) = \mathbf{I}s(s+1) + \mu_0 Qs + P = \begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{Vmatrix}$$

$$m_{11} = s(s+1) - 2 - \mu_*^{-1}N, \quad m_{12} = -(\mu_0 s - \mu_{**})\mu_*^{-1}, \tag{4.4}$$

$$m_{21} = (\mu_0 s + 2\mu_*)N, \quad m_{22} = s(s+1) - \mu_* N$$

полученной в результате совершения операций $L_2\rho^s\mathbf{I}$; C – замкнутый контур, охватывающий полюса матрицы $M^{-1}(s)$.

Согласно известной схеме построения обратной матрицы находим

$$M^{-1}(s) = \frac{1}{p_4(s)}\begin{Vmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{Vmatrix}$$

$$p_4(s) = \det M(s) = s^4 + 2s^3 - (2N+1)s^2 - 2(N+1)s + N(N-2) = \prod_{j=1}^{4}(s - s_j) \tag{4.5}$$

где

$$s_1 = \nu_k + 1, \quad s_2 = \nu_k - 1, \quad s_3 = -\nu_k, \quad s_4 = -\nu_k - 2 \tag{4.6}$$

Видно, что интеграл (4.3) равен сумме вычетов в полюсах (4.6). При этом, если считать $\nu_k > 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), то вычеты в первых двух полюсах дают функции, растущие при $\rho \to \infty$, а в оставшихся полюсах – убывающие при $\rho \to \infty$.

Чтобы вычислить матричный интеграл (4.3), достаточно, согласно равенству (4.5), располагать значениями следующих скалярных интегралов:

$$[\varphi(\rho), \varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho)] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\rho^s[1, s, s(s+1)]}{p_4(s)}ds \tag{4.7}$$

При этом необходимо найти только $\varphi(\rho)$, так как можно убедиться, что

$$\varphi_1(\rho) = \rho\varphi'(\rho), \quad \varphi_2(\rho) = [\rho^2\varphi'(\rho)]'$$

Вычисляя интегралы (4.7) как суммы вычетов в полюсах $s_1 = \nu + 1$, $s_2 = \nu - 1$, получим решение $Y_0(\rho)$ матричного уравнения (4.2), растущее при $\rho \to \infty$. Если же возьмем вычеты в полюсах $s_3 = -\nu$, $s_4 = -\nu - 2$, то получим второе решение $Y_1(\rho)$ уравнения (4.2), убывающее на бесконечности, линейно независимое по отношению к $Y_0(\rho)$.

Выполнение указанных операций приводит к формулам

$$Y_0(\rho) = \rho^{\nu+1}R_{\nu+1}A_+(\nu) - \rho^{\nu-1}R_\nu B_+(\nu), \quad Y_1(\rho) = \rho^{-\nu}R_\nu A_-(\nu) - \rho^{-\nu-2}R_{\nu+1}B_-(\nu) \tag{4.8}$$

$$R_\nu = [2(2\nu+1)(2\nu-1)]^{-1}$$

Матрицы $A_\pm(\nu)$ и $B_\pm(\nu)$ определены формулами ($\mu_1 = [2(1-\mu)]^{-1}$)

$$A_+(\nu) = \begin{Vmatrix} 2(\nu+1) - \mu_0 N & \mu_*^{-1}(\mu_0\nu - 2) \\ -\mu_0 N(\nu+\kappa+2) & \mu_1 N + 2\nu \end{Vmatrix}$$

$$B_+(\nu) = \begin{Vmatrix} -(\mu_0 N + 2\nu) & 2 - \mu_1\nu \\ \mu_0 N(\nu+\kappa) & -[2(\nu+1) - \mu_1 N] \end{Vmatrix}$$

$$A_-(\nu) = \begin{Vmatrix} -\mu_0 N - 2\nu & -\mu_1(\nu+\kappa) \\ \mu_0 N[\nu - 4(1-\mu)] & \mu_1 N - 2(\nu+1) \end{Vmatrix} \tag{4.9}$$

$$B_-(\nu) = \begin{Vmatrix} -[\mu_0 N - 2(\nu+1)] & -\mu_1(\nu+\kappa+2) \\ N(\mu_0\nu - 2) & \mu_1 N + 2\nu \end{Vmatrix}$$

В формулах (4.8), (4.9) и всюду ниже под ν следует понимать собственные числа ν_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Таким образом, общее решение уравнения (4.2) будет иметь вид

$$Y(\rho) = Y_0(\rho)C_0 + Y_1(\rho)C_1 \tag{4.10}$$

где C_0, C_1 – матрицы-константы.

Располагая фундаментальной системой решений (4.10) матричного уравнения (4.2), можем построить базисную систему матричных решений $\Psi_0(\rho)$ и $\Psi_1(\rho)$, удовлетворяющих матричной краевой задаче (δ_{ij} – символ Кронекера)

$$L_2\Psi_j(\rho) = 0, \quad \alpha < \rho < 1, \quad U_i[\Psi_j] = \delta_{ij}I; \quad i, j = 0, 1 \tag{4.11}$$

Их будем строить, согласно соотношению (4.10), в виде

$$\Psi_j(\rho) = Y_0(\rho)C_0^{(j)} + Y_1(\rho)C_1^{(j)}, \quad j = 0, 1 \tag{4.12}$$

а матрицы $C_i^{(j)}$ ($i, j = 0, 1$) находить из граничных условий (4.11). Например, для $\Psi_1(\rho)$ будем иметь уравнения

$$U_0[Y_0(\rho)]C_0^{(1)} + U_0[Y_1(\rho)]C_1^{(1)} = 0, \quad U_1[Y_0(\rho)]C_0^{(1)} + U_1[Y_1(\rho)]C_1^{(1)} = I \tag{4.13}$$

Согласно соотношениям (3.18), (3.19) и (4.8) находим

$$U_0[Y_0(\rho)] = Y_0(\alpha) = \alpha^{\nu-1}R_\nu C_+(\nu), \quad U_0[Y_1(\rho)] = Y_1(\alpha) = \alpha^{-\nu-2}R_\nu C_-(\nu) \quad (4.14)$$

где

$$C_+(\nu) = B_+(\nu) + \alpha^2 b_\nu A_+(\nu), \quad C_-(\nu) = \alpha^2 A_-(\nu) - b_\nu B_-(\nu); \quad b_\nu = R_\nu^{-1}R_{\nu+1} \quad (4.15)$$

Подставив выражения (4.14) в первое уравнение (4.13), придем к соотношению

$$C_0^{(1)} = \alpha^{-2\nu-1}D(\nu)C_1^{(1)}, \quad D(\nu) = C_+^{-1}(\nu)C_-(\nu) \quad (4.16)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} U_1[Y_0(\rho)] &= R_{\nu+1}\tilde{A}_+(\nu) + R_\nu\tilde{B}_+(\nu) = D_+(\nu) \\ U_1[Y_1(\rho)] &= R_\nu\tilde{A}_-(\nu) - R_{\nu+1}\tilde{B}_-(\nu) = D_-(\nu) \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$\tilde{A}_+(\nu) = \Lambda(\nu)A_+(\nu), \quad \tilde{B}_+(\nu) = \Lambda(\nu-2)B_+(\nu)$$

$$\tilde{A}_-(\nu) = \Lambda(-\nu-1)A_-(\nu), \quad \tilde{B}_-(\nu) = \Lambda(-\nu-3)B_-(\nu) \quad (4.18)$$

$$\Lambda(\nu) = \begin{Vmatrix} N & \nu \\ \nu+1-\mu(\nu-1) & -\mu \end{Vmatrix}$$

причем во всех элементах матрицы $\Lambda(\nu)$ делаются указанные замены числа ν, кроме $N = \nu(\nu+1)$, выражение для которого остается неизменным.

Подставив выражение (4.16) во второе уравнение (4.13), после умножения полученного равенства на $\alpha^{2\nu+1}$ найдем

$$C_1^{(1)} = \alpha^{2\nu+1}[D_+(\nu)D(\nu) + \alpha^{2\nu+1}D_-(\nu)]^{-1} \quad (4.19)$$

Учитывая равенство (4.16), найдем вторую матрицу-константу

$$C_0^{(1)} = D(\nu)[D_+(\nu)D(\nu) + \alpha^{2\nu+1}D_-(\nu)]^{-1} \quad (4.20)$$

Подставив выражения (4.19) и (4.20) в соотношение (4.12), получим $\Psi_1(\rho)$.

С помощью аналогичных операций можно найти и $\Psi_0(\rho)$, т.е. полностью завершить построение базисной системы матричной краевой задачи (4.11).

Рассмотрим частный случай поставленных задач теории упругости: не будем учитывать собственный вес конуса (1.1) ($\mathbf{f}_i(\rho) \equiv 0$, $i = 0, 1$) и считаем выполненными граничные условия (1.5)–(1.7) и (1.9), т.е. $\boldsymbol{\gamma}_0 = 0$, а $\boldsymbol{\gamma}_1$ определяется третьей формулой (3.19). Тогда решение векторной задачи (3.20) в силу соотношения (4.1) запишется в виде

$$\begin{Vmatrix} \tilde{u}_k(\rho) \\ \tilde{\upsilon}_k(\rho) \end{Vmatrix} = a_1\Psi_1(\rho)\begin{Vmatrix} -2q_{1k} \\ (1-2\mu)p_{1k} \end{Vmatrix} \quad (4.21)$$

т.е. достаточно знать только одну матрицу $\Psi_1(\rho)$, найденную выше. По найденным $\tilde{u}_k(\rho)$, $\tilde{\upsilon}_k(\rho)$, в силу формул (3.15) получим трансформанты смещений

$$u_k(r) = \tilde{u}_k(r/a_1), \quad \upsilon_k(r) = \tilde{\upsilon}_k(r/a_1) \quad (4.22)$$

Подставив их в выражения (3.8), найдем сами смещения и тем завершим построение точного решения для разбираемого частного случая поставленной задачи.

Рассмотрим еще случай $a_0 = 0$, т.е. наличие острия в конусе (1.1). Для этого в полученных формулах следует совершить предельный переход $\alpha \to 0$. Тогда

$$C_+(\nu) = B_+(\nu), \quad C_-(\nu) = -b_\nu B_-(\nu) \tag{4.23}$$

и обращение матрицы $C_+(\nu)$ сводится к обращению матрицы $B_+(\nu)$. Выполняя это обращение по известной схеме, найдем

$$B_+^{-1}(\nu) = \frac{-\tilde{B}(\nu)}{\mu_0 N h(\nu)}, \quad \tilde{B}(\nu) = \left\| \begin{matrix} 2(\nu+1)-\mu_1 N & \mu_1\nu - 2 \\ -\mu_0 N(\nu+\kappa) & \mu_0 N + 2\nu \end{matrix} \right\| \tag{4.24}$$

$$h(\nu) = \mu_1 N + 2(\kappa + \mu_1\nu) + (\nu+\kappa)(\mu_1\nu - 2)$$

Матрица $D(\nu)$ в силу соотношений (4.15), (4.16) и (4.24) примет вид

$$D(\nu) = b_\nu[\mu_0 N h(\nu)]^{-1}\tilde{B}(\nu)B_-(\nu)$$

и из соотношений (4.16), (4.19) получим

$$C_0^{(1)} = D(\nu)[D_+(\nu)D(\nu)]^{-1}, \quad C_1^{(1)} = \alpha^{2\nu+1}[D_+(\nu)D(\nu)]^{-1} \tag{4.25}$$

При $\alpha \to 0$ в силу выражения (4.19) $C_1^{(1)} = 0$, и потому формула (4.12) принимает вид

$$\Psi_1(\rho) = Y_0(\rho)D(\nu)[D_+(\nu)D(\nu)]^{-1}$$

Как и выше, зная $\Psi_1(\rho)$, согласно равенству (4.21) найдем трансформанты (4.22), а по ним с помощью формул обращения (3.8) и искомые смещения $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$.

5. Построение матрицы Грина векторной краевой проблемы и полное точное решение поставленной задачи. Как видим, для полного решения векторной задачи согласно выражению (4.1) необходимо построить матрицу Грина $G(\rho, \xi)$.

Для этого предварительно построим фундаментальную матрицу $\Phi(\rho, \xi)$, т.е. такую матрицу, что решение неоднородного дифференциального уравнения задачи (3.20) можно записать в виде

$$\mathbf{y}(\rho) = \int_\alpha^1 \Phi(\rho, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi \tag{5.1}$$

С этой целью упомянутое уравнение запишем в виде

$$L_2\mathbf{y}(\rho) = \mathbf{f}(\rho), \quad 0 < \rho < \infty \tag{5.2}$$

считая правую часть отличной от нуля только на отрезке $[\alpha, 1]$. Для отыскания решения уравнения (5.2) применим к нему интегральное преобразование Меллина, т.е. перейдем к трансформантам

$$\mathbf{y}_s = \int_0^\infty \rho^{s-1}\mathbf{y}(\rho)d\rho, \quad \mathbf{f}_s = \int_\alpha^1 \xi^{-s}\mathbf{f}(\xi)d\xi \tag{5.3}$$

В результате приходим к алгебраическому уравнению

$$\tilde{M}(s)\mathbf{y}_s = \mathbf{f}_s, \quad \tilde{M}(s) = M(-s) \tag{5.4}$$

Матрица $M(s)$ определена формулами (4.4).

Решив алгебраическое уравнение (5.4) и обратив трансформанты Меллина (5.3), найдем решение уравнения (5.2) и тем самым найдем фундаментальную матрицу

$$\Phi(\rho, \xi) = \frac{1}{\xi}\Phi\left(\frac{\rho}{\xi}\right), \quad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_l M^{-1}(-s)x^{-s}ds \tag{5.5}$$

Если считать $\nu_k > 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), то контур l будет прямой, параллельной мнимой оси и пересекающей вещественную ось на интервале (0, 1). Тогда, как и в разд. 4, матричный интеграл (5.5) сводится к вычислению таких скалярных интегралов:

$$[\tilde{I}_0(x), \tilde{I}_1(x), \tilde{I}_2(x)] = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{x^{-s}[1, s, s(s-1)]}{p_4(-s)}ds; \quad \tilde{I}_1(x) = -x\tilde{I}_0'(x), \quad \tilde{I}_2(x) = [x^2\tilde{I}_0'(x)]' \tag{5.6}$$

причем, достаточно вычислить только первый интеграл, а остальные, как и ранее, вычисляются по последним двум формулам (5.6). Используя стандартную схему контурного интегрирования, найдем

$$\tilde{I}_0(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} x^{-\nu}R_\nu - x^{-(\nu+2)}R_{\nu+1}, & x > 1 \\ x^{\nu-1}R_\nu - x^{\nu+1}R_{\nu+1}, & x < 1 \end{cases} \tag{5.7}$$

Таким образом, на основании равенств (5.5) и (5.6) имеем

$$\Phi(x) = \left\| \begin{matrix} \tilde{I}_2(x) - \mu_* N\tilde{I}_0(x) & -\mu_1[\tilde{I}_1(x) + \kappa\tilde{I}_0(x)] \\ N[\mu_0\tilde{I}_1(x) - 2\mu_*\tilde{I}_0(x)] & \tilde{I}_2(x) - (2 + \mu_*^{-1}N)\tilde{I}_0(x) \end{matrix} \right\| \tag{5.8}$$

Теперь матрицу Грина можно найти по формуле [8]

$$G(\rho, \xi) = \Phi(\rho, \xi) - \sum_{j=0}^{1}\Psi_j(\rho)(U_j[\Phi(\rho, \xi)])^{-1} \tag{5.9}$$

Матрицы $\Psi_j(\rho)$ определяются формулами (4.12), причем матрица $\Psi_1(\rho)$ полностью определена, $\Psi_0(\rho)$ находится аналогично.

Таким образом, формула (4.1) при $\gamma_0 = 0$ при учете выражений (5.9) и (4.12) даст решение векторной краевой задачи, а вместе с ним и точное решение поставленной задачи теории упругости в случае граничных условий (1.5), (1.6) и (1.8). Для граничных же условий (1.7) и (1.9) предложенная схема полностью сохраняется; изменится только вид граничного функционала $U_0[\mathbf{y}(\rho)]$, определяемого формулой (3.18).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г.Я.* Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усеченного кругового полого конуса // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 431–443.
2. *Попов Г.Я.* Точные решения некоторых смешанных задач термоупругости для усеченного кругового полого конуса с вырезом вдоль образующей // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 681–693.
3. *Хомасуридзе Н.Г.* Термоупругое равновесие конических тел // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 1. С. 124–133.

4. *Попов Г.Я.* О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и их применении к краевым задачам механики // Прикл. мех. 2003. Т. 39. № 12. С. 46–73.
5. *Nowacki W.* Teoria sprężystosci. Warczawa: PWN, 1973 = *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. *Попов Г.Я.* Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики // Мат. методы и физико-механ. поля. 2003. Т. 46. № 3. С. 74–89.
7. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. N.Y., etc: McGraw-Hill, 1955 = *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
8. *Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд-во Рауан, 1999. 113 с.

Одесса
e-mail: popovgya@mail.ru

Поступила в редакцию
24.XII.2003