УДК 539.3: 534.1

© 2005 г. Е. В. Бабенкова, Ю. Д. Каплунов, Ю. А. Устинов

О ПРИНЦИПЕ СЕН-ВЕНАНА В СЛУЧАЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУПОЛОСЫ

Рассматривается задача о распространении низкочастотных гармонических волн в упругой полуполосе при возбуждении их со стороны торца. Формулируются условия, налагаемые на внешние воздействия, выполнение которых обеспечивает затухание асимптотически главной части решения. Полученные результаты можно рассматривать как аналог принципа Сен-Венана в случае низкочастотных колебаний полуполосы.

Сен-Венан [1] на основе эвристических соображений сформулировал "принцип упругой равнозначности статически эквивалентных сил" [2]. Этот принцип дал возможность определить место "решению Сен-Венана" в точном решении трехмерной задачи для призматического тела с боковой поверхностью, свободной от напряжений, и, по сути, обосновывал применение полуобратного метода. Позже Буссинеском была дана более общая формулировка этого принципа [2]. Для массивных тел, загруженных по малым площадкам, согласно принципу Сен-Венана поведение напряженно-деформированного состояния (НДС) на расстояниях, значительно превышающих размеры площадки, определяется главным вектором и главным моментом, что, в частности, вытекает из асимптотического анализа решения для полупространства, впервые построенного Буссинеском. В XX в. был предпринят ряд попыток математически строго обосновать этот принцип. Обзор таких исследований содержится в [3–6].

Математически строго было показано [7–10], что в случае статической деформации призматических тел (в том числе полуполосы) решения Сен-Венана тождественно равны нулю, если главный вектор и главный момент напряжений внешних усилий, приложенных к торцам, равны нулю. В этом случае НДС, порожденное самоуравновешенной нагрузкой, экспоненциально убывает по мере удаления от торца. Однако показатель экспоненты зависит от характера распределения по торцу самуравновешенной нагрузки, геометрии поперечного сечения и физико-механических свойств (неоднородность, анизотропия) материала. В некоторых случаях сочетание этих причин приводит к появлению слабо затухающих решений. В таких случаях принцип Сен-Венана в классической формулировке утрачивает силу. Медленно затухающие решения были названы [11] "слабым погранслоем"; были приведены [6, 12] конкретные примеры задач, решения которых содержит слабый погранслой. Поэтому для элементов конструкций пластинчатого или стержневого типа, в которых возможен слабый погранслой, выполнение условий самоуравновешенности внешней нагрузки оказывается недостаточным для локализации НДС в окрестности области приложения нагрузки.

В задаче о распространении гармонических волн в полуполосе аналогом решения Сен-Венана могут служить однородные (незатухающие) моды, которые определяются вещественными корнями известных дисперсионных уравнений [13, 14]. При всякой фиксированной частоте существует конечное число таких мод. Остальные моды определяются комплексными корнями и экспоненциально затухают. Поэтому возникает вопрос: каким интегральным условиям должны удовлетворять амплитуды заданных на торце нормальных и касательных напряжений, выполнение которых приводило бы к локализации колебаний у этого торца?

Близкая по характеру НДС проблема о краевом резонансе, возбуждаемом набегающей из бесконечности волной, подробно исследована в [14]; здесь же имеется краткий обзор работ, посвященных исследованию распространения волн в упругой полуполосе, большинство которых посвящено этой проблеме.

В данной работе проблема локализации колебаний исследуется в случае возбуждения низкочастотных колебаний. Особое внимание уделяется исследованию асимптотического поведения решения по безразмерному частотному параметру в случае, когда амплитуды изгибающего момента, продольной и перерезывающих сил равны нулю. Предлагаемое рассмотрение опирается на метод однородных решений, асимптотические методы и соотношения обобщенной ортогональности.

1. Постановка задачи. Однородные элементарные решения. Рассматривается задача о распространении гармонических волн в упругой полуполосе. Считается, что любая полевая характеристика (смещения, напряжения и др.) пропорциональна $e^{-i\omega t}$, где ω – круговая частота.

С торцом полуполосы свяжем начало декартовой системы координат Ox_1x_2 так, что $0 \le x_1 < \infty$, $-h \le x_2 \le h$. Будем считать, что на торце $x_1 = 0$ заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{11} = \mu p_1(x_2), \quad \sigma_{12} = \mu p_2(x_2) \tag{1.1}$$

а лицевые поверхности свободны от напряжений

$$x_2 = \pm h\colon \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь и ниже σ_{ij} – амплитуды напряжений, u_j – амплитуды смещений.

Введем безразмерные координаты $x = x_1/h$, $y = x_2/h$ и вектор амплитуды смещений $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$.

Запишем уравнения гармонических колебаний упругой изотропной среды

$$L(-i\partial_x, \lambda)\mathbf{u} \equiv \partial_x^2 C\mathbf{u} + \partial_x B\mathbf{u} + A\mathbf{u} + \kappa^2\lambda^2\mathbf{u} = 0 \tag{1.3}$$

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa^2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & (1-\kappa^2)\partial_y \\ (1-\kappa^2)\partial_y & 0 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} \kappa^2\partial_y^2 & 0 \\ 0 & \partial_y^2 \end{Vmatrix}$$

$$\lambda = \frac{h\omega}{c_2}, \quad \kappa^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

Здесь c_1, c_2 – скорости продольных и поперечных волн, соответственно, ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, ρ – плотность материала.

Граничные условия (1.2) принимают вид

$$y = \pm 1\colon M(-i\partial_x)\mathbf{u} \equiv (\partial_x B_g\mathbf{u} + A_g\mathbf{u}) = 0 \tag{1.4}$$

$$B_g = \begin{Vmatrix} 0 & \kappa^2 \\ 1-\kappa^2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_g = \begin{Vmatrix} \kappa^2\partial_y & 0 \\ 0 & \partial_y \end{Vmatrix}$$

Решение задачи (1.3), (1.4) будем отыскивать в виде

$$\mathbf{u} = h\mathbf{a}(y)e^{i\gamma x} \tag{1.5}$$

Подставляем (1.5) в (1.3), (1.4), получаем двухпараметрическую спектральную задачу на сечении

$$L(\gamma, \lambda)\mathbf{a} \equiv (-\gamma^2 C + i\gamma B + A + \kappa^2\lambda^2 I)\mathbf{a} = 0 \tag{1.6}$$

$$y = \pm 1\colon M(\gamma)\mathbf{a} \equiv (i\gamma B_g + A_g)\mathbf{a} = 0 \tag{1.7}$$

Здесь I – единичная матрица 2×2.

Условия существования нетривиального решения задачи (1.6), (1.7) приводят к нахождению корней дисперсионных уравнений:

в случае антисимметричной задачи (задача А)

$$D^a(\gamma, \lambda) \equiv (\lambda^2 - 2\gamma^2)^2 \cos\chi_1 \frac{\sin\chi_2}{\chi_2} + 4\gamma^2\chi_1 \sin\chi_1 \cos\chi_2 \tag{1.8}$$

в случае симметричной задачи (задача В)

$$D^s(\gamma, \lambda) \equiv (\lambda^2 - 2\gamma^2)^2 \cos\chi_2 \frac{\sin\chi_1}{\chi_1} + 4\gamma^2\chi_2 \sin\chi_2 \cos\chi_1 \tag{1.9}$$

где $\chi_1^2 = \lambda^2 - \gamma^2$, $\chi_2^2 = \lambda^2\kappa^2 - \gamma^2$.

При всяком фиксированном λ уравнения (1.8), (1.9) имеют счетное множество корней $\{\gamma_m = \gamma_m(\lambda)\}$. Каждому простому корню соответствует нормальная волна вида

$$\mathbf{U}_m = h\mathbf{u}_m e^{-i\omega t} = h\mathbf{a}_m e^{i(\gamma_m x - \omega t)}, \quad \mathbf{a}_m = [a_{1m}, a_{2m}]^T \tag{1.10}$$

В случае задачи А

$$\begin{aligned} a_{1m}^a &= A_m i\gamma[-(\lambda^2 - 2\gamma^2)\cos\chi_1 \sin(\chi_2 y) + 2\chi_1\chi_2\cos\chi_2\sin(\chi_1 y)] \\ a_{2m}^a &= -A_m\chi_2[(\lambda^2 - 2\gamma^2)\cos\chi_1\cos(\chi_2 y) + 2\gamma^2\cos\chi_2\cos(\chi_1 y)] \end{aligned} \tag{1.11}$$

В случае задачи В

$$\begin{aligned} a_{1m}^s &= B_m i\gamma[-(\lambda^2 - 2\gamma^2)\sin\chi_1 \cos(\chi_2 y) + 2\chi_1\chi_2\sin\chi_2\cos(\chi_1 y)] \\ a_{2m}^s &= B_m\chi_2[(\lambda^2 - 2\gamma^2)\sin\chi_1\sin(\chi_2 y) + 2\gamma^2\sin\chi_2\sin(\chi_1 y)] \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь A_m и B_m – нормирующие множители.

Аналогично для амплитуды вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{12}]^T$ имеем

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{b}_m e^{i\gamma_m x}, \quad \mathbf{b}_m = [b_{1m}, b_{2m}]^T$$

В случае задачи А

$$\begin{aligned} b_{1m}^a &= A_m[(\lambda^2 - 2\gamma^2)(\lambda^2 - 2\chi_2^2)\cos\chi_1\sin(\chi_2 y) - 4\gamma^2\chi_1\chi_2\cos\chi_2\sin(\chi_1 y)] \\ b_{2m}^a &= 2A_m i\gamma\chi_2(\lambda^2 - 2\gamma^2)[\cos\chi_2\cos(\chi_1 y) - \cos\chi_1\cos(\chi_2 y)] \end{aligned} \tag{1.13}$$

В случае задачи В

$$\begin{aligned} b_{1m}^s &= B_m[(\lambda^2 - 2\gamma^2)(\lambda^2 - 2\chi_2^2)\sin\chi_1\cos(\chi_2 y) - 4\gamma^2\chi_1\chi_2\sin\chi_2\cos(\chi_1 y)] \\ b_{2m}^s &= -2B_m i\gamma\chi_2(\lambda^2 - 2\gamma^2)[\sin\chi_1\sin(\chi_2 y) - \sin\chi_2\sin(\chi_1 y)] \end{aligned} \tag{1.14}$$

$\mathbf{u}_m$, $\boldsymbol{\sigma}_m$ будем называть элементарными однородными решениями, $\mathbf{a}_m$, $\mathbf{b}_m$ – их следами.

Рассмотрим расширенный вектор $\mathbf{w} = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}]^T$ и соответственно множество векторов $\mathbf{w}_m = \mathbf{v}_m e^{i\gamma_m x}$, где $\mathbf{v}_m = [\mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m]^T = [a_{1m}, a_{2m}, b_{1m}, b_{2m}]^T$.

Векторы $\mathbf{a}_m$, $\mathbf{b}_m$ рассматриваются как элементы гильбертова пространства H со скалярным произведением (всюду далее интегрирование ведется по отрезку $[-1, 1]$)

$$(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}) = \int (a_1^{(1)}\bar{a}_1^{(2)} + a_2^{(1)}\bar{a}_2^{(2)})dy \tag{1.15}$$

где $\bar{a}_\beta^{(j)}$ – комплексно-сопряженные скалярные функции, $\bar{\mathbf{a}}^{(j)} = [\bar{a}_1^{(j)}, \bar{a}_2^{(j)}]^T$.

Расширенные векторы $\mathbf{v} = [\mathbf{a},\ \mathbf{b}]^T$ рассматриваются как элементы гильбертова пространства $H_1 = H \otimes H$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})_1 = (\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}) + (\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}) \tag{1.16}$$

Векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ рассматриваются как вектор-функции $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{w}(x)$ со значениями в гильбертовых пространствах H и H_1 соответственно.

На векторах $\mathbf{v}$ и вектор-функциях $\mathbf{w}(x)$ введем также индефинитное скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} \rangle &= (\mathbf{v}^{(1)}, J\mathbf{v}^{(2)}) = i[(a^{(1)}, b^{(2)}) - (b^{(1)}, a^{(2)})] \\ \langle \mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)} \rangle(x) &= (\mathbf{w}^{(1)}, J\mathbf{w}^{(2)})(x) \end{aligned} \tag{1.17}$$

где

$$J = i\begin{Vmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{Vmatrix}$$

Для векторов $\mathbf{w}(x)$ это индефинитное скалярное произведение имеет прозрачный физический смысл, а именно средний за период поток энергии через поперечное сечение выражается следующим образом:

$$P(\mathbf{w}) = \omega h \mu \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle / 4 = \omega h \mu \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle / 4 \tag{1.18}$$

2. Соотношения обобщенной ортогональности и свойства элементарных решений. Обозначим через Λ множество собственных значений (СЗ) $\{\gamma_m\}$, $M_{\mathbf{a}}$ – множество собственных векторов (СВ) $\{\mathbf{a}_m\}$, $M_{\mathbf{v}}$ – множество векторов $\{\mathbf{v}_m\}$.

Вещественные корни уравнений (1.8), (1.9) обозначим $\gamma_r^{\pm} = \pm\gamma_r$ ($r = 1, \ldots, N$, где $N = N(\lambda)$ – натуральное число); соответствующие им СВ и следы ЭР будем обозначать $\mathbf{a}_r^+$, $\mathbf{v}_r^+$, если $\langle \mathbf{v}_r^+, \mathbf{v}_r^+ \rangle = d_r^+ > 0$ и $\mathbf{a}_r^-$, $\mathbf{v}_r^-$, если $\langle \mathbf{v}_r^-, \mathbf{v}_r^- \rangle = d_r^- < 0$.

Из формулы (1.18) вытекает, что d_r^+ (d_r^-) пропорциональны потокам энергии, а групповая скорость связана с потоком энергии соотношением

$$c_g = \frac{2P(\mathbf{w}_r)}{\lambda^2 c_2^2 \|\mathbf{a}_r\|^2}, \quad \|\mathbf{a}\|^2 = h\int(|a_1|^2 + |a_2|^2)dy$$

Поэтому индексом плюс снабжаются те элементарные решения (ЭР), которые переносят энергию в положительном направлении оси Ox_1, а индексом минус – те, которые переносят энергию в отрицательном направлении.

Вещественную часть спектра обозначим Λ_R. Кроме вещественных, уравнения (1.8), (1.9) имеют счетные множества комплексных корней, симметрично расположенных в комплексной плоскости. Через γ_k^+ будем обозначать корни, если $\mathrm{Im}\gamma_k^+ > 0$, а через γ_k^- – если $\mathrm{Im}\gamma_k^- < 0$. Учитывая симметричность их расположения, будем использовать также обозначения

$$\gamma_k^+ = \gamma_k \ \ (\mathrm{Re}\gamma_k > 0, \mathrm{Im}\gamma_k > 0), \quad \gamma_k^- = \bar{\gamma}_k, \quad \gamma_{-k}^+ = -\bar{\gamma}_k, \quad \gamma_{-k}^- = -\gamma_k$$

Множества $\{\gamma_k^{\pm}\}$ обозначим $\Lambda_C^{\pm}$. Соответствующие ЭР $\mathbf{u}_k^{\pm}(x)$, $\mathbf{w}_k^{\pm}(x)$ экспоненциально затухают при $x \to \pm\infty$.

Таким образом,

$$\Lambda = \Lambda_R \cup \Lambda_C^+ \cup \Lambda_C^-$$

и соответственно

$$M_{\mathbf{a}} = M_{\mathbf{a}R} \cup M_{\mathbf{a}C}^+ \cup M_{\mathbf{a}C}^-, \quad M_{\mathbf{v}} = M_{\mathbf{v}R} \cup M_{\mathbf{v}C}^+ \cup M_{\mathbf{v}C}^-$$

Соотношения обобщенной ортогональности приведем в виде утверждений, доказательство которых можно найти в [15–17].

Утверждение 1. Для следов ЭР имеют место следующие соотношения обобщенной ортогональности:

$$\begin{gathered}
\langle \mathbf{v}_r^{\pm}, \mathbf{v}_q^{\pm} \rangle = d_r^{\pm}\delta_{rq}, \quad \langle \mathbf{v}_r^{\pm}, \mathbf{v}_q^{\mp} \rangle = 0, \quad \mathbf{v}_r^{\pm}, \mathbf{v}_q^{\pm} \in M_R \\
d_r^- = -d_r^+ = -d_r, \quad d_r > 0 \\
\langle \mathbf{v}_r^{\pm}, \mathbf{v}_k^{\pm} \rangle = \langle \mathbf{v}_r^{\pm}, \mathbf{v}_k^{\mp} \rangle = 0, \quad \mathbf{v}_r^{\pm} \in M_R, \quad \mathbf{v}_k^{\pm} \in M_C^{\pm} \\
\langle \mathbf{v}_k^{\pm}, \mathbf{v}_l^{\mp} \rangle = d_k^{\pm}\delta_{kl}, \quad \mathbf{v}_k^{\pm}, \mathbf{v}_l^{\pm} \in M_C^{\pm}; \quad d_k^- = \bar{d}_k^+, \quad d_{-k}^+ = -d_k^+
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Введем двухкомпонентные векторы и матрицу

$$\mathbf{f}_m = [a_{1m}, b_{2m}]^T, \quad \mathbf{g}_m = [b_{1m}, a_{2m}]^T, \quad J_0 = \operatorname{diag}\{1, -1\}$$

Утверждение 2. Имеет место следующее соотношение обобщенной ортогональности:

$$(J_0\mathbf{f}_r^{\pm}, \mathbf{g}_q^{\pm}) = -\frac{i}{2}d_r^{\pm}\delta_{rq} \quad (J_0\mathbf{f}_r^{\pm}, \mathbf{g}_k^{\pm}) = 0 \quad (J_0\mathbf{f}_k^{\pm}, \mathbf{g}_l^{\mp}) = -\frac{i}{2}d_k^{\pm}\delta_{rq} \tag{2.2}$$

Ниже потребуются некоторые соотношения ортогональности в случае, когда $\lambda = 0$ (статическая задача). В этом случае СЗ уравнения Релея-Лэмба (1.8), (1.9) вырождаются соответственно в следующие:

$$D_0^a(\gamma) = \gamma(\operatorname{sh}2\gamma - 2\gamma) = 0 \tag{2.3}$$

$$D_0^s(\gamma) = \gamma(\operatorname{sh}2\gamma + 2\gamma) = 0 \tag{2.4}$$

При этом вещественная часть спектра вырождается в шестикратное СЗ $\gamma_0 = 0$, которому соответствуют две жордановы цепочки.

В случае задачи А жорданова цепочка состоит из СВ

$$\mathbf{a}_0^a = [0, 1]^T \tag{2.5}$$

и трех присоединенных векторов

$$\mathbf{a}_1^a = [-iy, 0]^T, \quad \mathbf{a}_2^a = [0, \psi(y)]^T, \quad \mathbf{a}_3^a = [-i\theta(y), 0]^T \tag{2.6}$$

где

$$\psi = -\frac{\nu y^2}{2(1-\nu)} - \frac{9 - 13\nu - \nu^2}{30(1-\nu)^2}, \quad \theta = y\left[\frac{(2-\nu)y^2}{6(1-\nu)} + \frac{-39 + 43\nu + \nu^2}{30(1-\nu)^2}\right]$$

В случае задачи В жорданова цепочка состоит из одного собственного и одного присоединенного векторов

$$\mathbf{a}_0^s = [1, 0]^T, \quad \mathbf{a}_1^s = \left[0, -\frac{i\nu y}{1-\nu}\right]^T \tag{2.7}$$

При этом

$$\mathbf{b}_0^a = \mathbf{b}_1^a = 0, \quad \mathbf{b}_2^a = \left[\frac{2y}{1-\nu}, 0\right]^T, \quad \mathbf{b}_3^a = \left[0, \frac{i(1-y^2)}{1-\nu}\right]^T; \quad \mathbf{b}_0^s = 0, \quad \mathbf{b}_1^s = \left[\frac{2i}{1-\nu}, 0\right]^T \tag{2.8}$$

Ранее [6, 10, 18] аналогичные жордановы цепочки были получены для цилиндра с произвольным поперечным сечением и дан метод их построения.

Утверждение 3. При $\lambda = 0$ для любого СЗ $\gamma_k^{\pm} \in \Lambda_C^{\pm}$ имеют место соотношения

$$(\mathbf{b}_k^{\pm}, \mathbf{a}_0^a) = 0 \quad (\mathbf{b}_k^{\pm}, \mathbf{a}_1^a) = 0 \quad (\mathbf{b}_k^{\pm}, \mathbf{a}_0^s) = 0 \tag{2.9}$$

Из теорем, доказанных в [15, 18], вытекает

Утверждение 4. При $\lambda > 0$ системы векторов $M_{\mathbf{a}C}^+$, $M_{\mathbf{a}C}^-$ являются минимальными и полными в пространстве H.

Утверждение 5. При $\lambda = 0$ системы векторов $M_0^+ = \{\mathbf{a}_0^a, \mathbf{a}_1^a, \mathbf{a}_0^s, \mathbf{a}_{0k}^+\}$, $M_0^- = \{\mathbf{a}_0^a, \mathbf{a}_1^a, \mathbf{a}_0^s, \mathbf{a}_{0k}^-\}$ являются минимальными и полными в пространстве H. В приведенных множествах $\mathbf{a}_{0k}^{\pm}$ – следы ЭР статической задачи, соответствующие комплексным СЗ.

Из этих утверждений вытекает

Утверждение 6. Любое решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничным условиям (1.4) и энергетическому условию излучения, можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \sum_r C_r \mathbf{u}_r^+(x) + \sum_k C_k \mathbf{u}_k^+(x) \tag{2.10}$$

где C_r, C_k – произвольные постоянные.

Из соотношений (2.10) вытекают следующие представления:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_r C_r \boldsymbol{\sigma}_r^+(x) + \sum_k C_k \boldsymbol{\sigma}_k^+(x), \quad \mathbf{w} = \sum_r C_r \mathbf{w}_r^+(x) + \sum_k C_k \mathbf{w}_k^+(x) \tag{2.11}$$

В соотношениях (2.10), (2.11) и всюду далее суммирование по r ведется по всем r, соответствующим корням γ_r^+, суммирование по k – по всем k, соответствующим корням γ_k^+.

3. Об определении коэффициентов разложений. Введем обозначения

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0 = [u_1^0, u_2^0]^T \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}^0 = [p_1, p_2]^T \tag{3.2}$$

В дальнейшем будем опираться на решение двух более простых задач для полуполосы со смешанными граничными условиями.

Первая задача. Пусть при $x = 0$ заданы условия

$$u_1(0) = u_1^0, \quad \sigma_{12}(0) = p_2 \tag{3.3}$$

Представим вектор $\mathbf{f}(x) = [u_1(x), \sigma_{12}(x)]^T$ в виде ряда по ЭР. Имеем

$$\mathbf{f}(x) = \sum_r C_r^+ \mathbf{f}_r^+ e^{i\gamma_r^+ x} + \sum_r C_k^+ \mathbf{f}_k^+ e^{i\gamma_k^+ x}$$

Полагая $x = 0$, получаем функциональное соотношение

$$\sum_r C_r^+ \mathbf{f}_r^+ + \sum_r C_k^+ \mathbf{f}_k^+ = \mathbf{f}^0 = [u_1^0, p_2]^T$$

умножая которое последовательно на векторы $J_0\mathbf{g}_q^+$, $J_0\mathbf{g}_l^-$ – справа, с учетом соотношений (2.2) получаем

$$-\frac{1}{2} i d_q^+ C_q^+ = \int (u_1^0 \overline{b_{1q}^+} - p_2 \overline{a_{2q}^+}) dy, \quad q = 1, \ldots, N(\lambda); \quad -\frac{1}{2} i d_l^+ C_l^+ = \int (u_1^0 \overline{b_{1l}^-} - p_2 \overline{a_{2l}^-}) dy \tag{3.4}$$

Здесь и ниже индекс l принимает все значения, соответствующие комплексным корням из множества Λ_C^-.

Вторая задача. Пусть при $x = 0$ заданы условия

$$u_2(0) = u_2^0, \quad \sigma_{11}(0) = p_1 \tag{3.5}$$

Введем вектор $\mathbf{g}(x) = [\sigma_{11}(x), u_2(x)]^T$. Аналогично предыдущему, при умножении соответствующего соотношения последовательно на множество векторов $J_0\mathbf{f}_q^+$, $J_0\mathbf{f}_l^-$ слева, получаем

$$\frac{1}{2} i d_q^+ C_q^+ = \int (p_1 \overline{a_{1q}^+} - u_2^0 \overline{b_{2q}^+}) dy, \quad \frac{1}{2} i d_l^+ C_l = \int (p_1 \overline{a_{1l}^-} - u_2^0 \overline{b_{2l}^-}) dy \tag{3.6}$$

Таким образом, для обоих типов граничных условий получаем точные интегральные представления для коэффициентов разложений.

Рассмотрим задачу с исходными граничными условиями (3.2). В этом случае краевую задачу можно свести к бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов разложений. Был указан [14] универсальный способ построения таких систем. Однако здесь используем другой прием, в результате которого получается система, более удобная для дальнейшего анализа в случае малых λ.

Функциональное граничное условие

$$\sum_r C_r^+ \mathbf{b}_r^+ + \sum_k C_k^+ \mathbf{b}_k^+ = \boldsymbol{\sigma}^0 \tag{3.7}$$

трансформируем в бесконечные алгебраические системы для антисимметричной и симметричной задач отдельно.

Предварительно заметим, что в случае задачи А $p_1 = p_1^a(y)$ – нечетная функция, $p_2 = p_2^a(y)$ – четная функция. В случае задачи В $p_1 = p_1^s(y)$ – четная, $p_2 = p_2^s(y)$ – нечетная.

Опираясь на утверждение 5, введем следующие системы векторов:

$$M_0^a = \{\mathbf{a}_0^a, \mathbf{a}_1^a, \mathbf{a}_l^{0a}\}, \quad M_0^s = \{\mathbf{a}_0^s, \mathbf{a}_l^{0s}\}$$

которые будут полными и минимальными в пространстве H на множестве векторов, компоненты которых имеют соответствующую симметрию по переменной y.

Умножая равенство (3.7) последовательно на элементы системы M_0^a, получаем

$$\sum_r d_{1r}^a C_r^a + \sum_k d_{1k}^a C_k^a = q_1^a, \quad \sum_r d_{2r}^a C_r^a + \sum_k d_{2k}^a C_k^a = q_2^a$$
$$\sum_r d_{lr}^a C_r^a + \sum_k d_{lk}^a C_k^a = q_l^a \tag{3.8}$$

Здесь

$$d_{1r}^a = (\mathbf{b}_r^{a+}, \mathbf{a}_0^a) = \int b_{2r}^{a+} dy, \quad d_{1k}^a = (\mathbf{b}_k^{a+}, \mathbf{a}_0^a) = \int b_{2k}^{a+} dy$$
$$d_{2r}^a = (\mathbf{b}_r^{a+}, \mathbf{a}_1^a) = i\int b_{1r}^{a+} y dy, \quad d_{2k}^a = (\mathbf{b}_k^{a+}, \mathbf{a}_1^a) = i\int b_{1k}^{a+} y dy \tag{3.9}$$

$$d_{lr}^a = (\mathbf{b}_r^{a+}, \mathbf{a}_l^{0a}) = \int (b_{1r}^{a+} \overline{a_{1l}^{0a}} + b_{2r}^{a+} \overline{a_{2l}^{0a}}) dy, \quad d_{lk}^a = (\mathbf{b}_k^{a+}, \mathbf{a}_l^{0a}) = \int (b_{1k}^{a+} \overline{a_{1l}^{0a}} + b_{2k}^{a+} \overline{a_{2l}^{0a}}) dy$$
$$q_1^a = \int p_2^a dy, \quad q_2^a = i\int p_1^a y dy, \quad q_l^a = \int (p_1^a \overline{a_{1l}^{0a}} + p_2^a \overline{a_{2l}^{0a}}) dy \tag{3.10}$$

Проводя аналогичные преобразования с помощью системы M_0^s, получаем

$$\sum_r d_{1r}^s C_r^s + \sum_k d_{1k}^s C_k^s = q_1^s, \quad \sum_r d_{lr}^s C_r^s + \sum_k d_{lk}^s C_k^s = q_l^s \tag{3.11}$$

где

$$d_{1r}^s = \int b_{1r}^{s+} dy, \quad d_{1k}^s = \int b_{1k}^{s+} dy$$
$$d_{lr}^s = \int (b_{1r}^{s+} \overline{a_{1l}^{0s}} + b_{2r}^{s+} \overline{a_{2l}^{0s}}) dy, \quad d_{lk}^s = \int (b_{1k}^{s+} \overline{a_{1l}^{0s}} + b_{2k}^{s+} \overline{a_{2l}^{0s}}) dy \tag{3.12}$$
$$q_1^s = \int p_1^s dy, \quad q_l^s = \int (p_1^s \overline{a_{1l}^{0s}} + p_2^s \overline{a_{2l}^{0s}}) dy$$

4. Анализ антисимметричной задачи при низких частотах. Обратимся вначале к исследованию корней уравнения (1.8) при малых значениях параметра λ. Как отмечалось выше, при $\lambda = 0$ вырожденное уравнение (2.3) имеет четырехкратный корень $\gamma_0 = 0$ и счетное множество корней $\alpha_m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \gamma_m(\lambda)$, которые сохраняют ту же структуру распределения в комплексной плоскости, что и γ_m.

Остановимся сначала на исследовании структуры спектра в окрестности γ_0 при малых λ. Раскладываем левую часть уравнения (1.8) в ряд по степеням γ и λ, получаем приближенное дисперсионное уравнение

$$15(1-\nu)\lambda^2 - 10\alpha^4 - 2\alpha^2(\alpha^4 - 5(2-\nu)\lambda^2) = 0$$

Отыскивая его решение в виде

$$\alpha = t_0^{1/4}(\lambda^{1/2} + t_1 \lambda^{3/2} + \ldots)$$

получаем, что в окрестности $\lambda = 0$ существуют четыре корня

$$\alpha_1^+ = i\zeta, \quad \alpha_1^- = -i\zeta, \quad \alpha_2^+ = \eta, \quad \alpha_2^- = -\eta$$

где

$$\zeta = \lambda^{1/2} t_0^{1/4}(1 - \lambda t_1), \quad \eta = \lambda^{1/2} t_0^{1/4}(1 + \lambda t_1); \quad t_0 = \frac{3}{2}(1 - \nu), \quad t_1 = \frac{17 - 7\nu}{20\sqrt{6(1-\nu)}}$$

Применение теории возмущений для исследования остальных корней уравнения приводит к аналитическим разложениям вида

$$\alpha_m = \gamma_m + O(\lambda^2)$$

где γ_m – корни уравнения (2.3).

Проведенный анализ уравнения (1.8) позволяет утверждать, что при малых λ существуют только два незатухающих ЭР ($N(\lambda) = 1$)

$$\mathbf{u}_1^{\pm} = \mathbf{a}_1^{\pm} e^{\pm i\zeta x} \tag{4.1}$$

Среди затухающих ЭР выделим два

$$\mathbf{u}_2^{\pm} = \mathbf{a}_2^{\pm} e^{\pm \eta x} \tag{4.2}$$

которые будем называть слабым погранслоем, поскольку при малых λ ЭР (4.2) слабо убывают при $x \to \pm\infty$.

Совокупность остальных ЭР будем называть сильным погранслоем.

Для формирования матрицы системы (3.8) и дальнейшего ее анализа приведем аналитические разложения для векторов $a_1^{\pm}$, $a_2^{\pm}$, $b_1^{\pm}$, $b_2^{\pm}$.

При соответствующем подборе нормирующих множителей A_1, A_2 на основе аналитических разложений выражений (1.11), (1.13) получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1^{\pm} &= \mathbf{a}_0^a \mp i\zeta \mathbf{a}_1^a - \zeta^2 \mathbf{a}_2^a \pm i\zeta^3 \mathbf{a}_3^a + O(\lambda^2) \\
\mathbf{a}_2^{\pm} &= \mathbf{a}_0^a \mp \eta \mathbf{a}_1^a + \eta^2 \mathbf{a}_2^a \mp \eta^3 \mathbf{a}_3^a + O(\lambda^2) \\
\mathbf{b}_1^{\pm} &= -\zeta^2 \mathbf{b}_2^a \mp i\zeta^3 \mathbf{b}_3^a + O(\lambda^2), \quad \mathbf{b}_2^{\pm} = \eta^2 \mathbf{b}_2^a \mp \eta^3 \mathbf{b}_3^a + O(\lambda^2)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Коэффициенты разложений (4.3) определены формулами (2.5)–(2.8).

Аналитические разложения остальных векторов имеют вид

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{0k} + O(\lambda^2), \quad \mathbf{b}_k = \mathbf{b}_{0k} + O(\lambda^2) \tag{4.4}$$

где $\mathbf{a}_{0k}$, $\mathbf{b}_{0k}$ – следы ЭР статической задачи.

Подстановка разложений (4.3), (4.4) в выражения (3.9) и учет соотношений

$$(\mathbf{b}_k^a, \mathbf{a}_0^a) = (\mathbf{b}_k^a, \mathbf{a}_1^a) = 0$$

позволяет получить следующие аналитические разложения для коэффициентов системы:

$$\begin{aligned}
d_{11}^a &= i d_{12}^a = i\lambda^{3/2} d_0(1 + O(\lambda)), \quad d_{21}^a = -d_{22}^a = \lambda d_0(1 + O(\lambda)) \\
d_{nk}^a &= \lambda^2 d_{nk}^0(1 + O(\lambda^2)), \quad d_{ln}^a = \lambda d_{l1}^0(1 + O(\lambda)); \quad n = 1, 2 \\
d_{lk}^a &= d_{lk}^0(1 + O(\lambda^2)), \quad d_0 = 4i/[3(1 - \nu)]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Подставим выражения (4.5) в систему (3.8) и, используя метод малого параметра, определим аналитические зависимости коэффициентов C_1, C_2, C_k от λ.

Предварительно заметим, что

$$q_1 = Q/(h\mu), \quad q_2 = -iM/(h^2\mu)$$

где Q – амплитуда перерезывающей силы, M – амплитуда изгибающего момента.

В случае $q_1 = O(1)$, $q_2 = 0$, $q_l = O(1)$ с погрешностью $O(\lambda^2)$ имеем

$$C_1 = \frac{q_1\zeta^2}{2d_0(\eta^5 + i\zeta^5)}, \quad C_2 = \frac{\eta^2}{\zeta^2}C_1 \tag{4.6}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае коэффициенты C_1, C_2, которые являются амплитудами распространяющейся волны (проникающего решения) и слабого погранслоя, соответственно имеют порядок $\lambda^{-3/2}$. Главные члены коэффициентов C_k имеют порядок $\lambda^{-1/2}$ и определяются решением бесконечной системы

$$\sum_k d_{lk}^0 C_k = -d_{l1}^0 C_1 - d_{l2}^0 C_2 \tag{4.7}$$

В случае $q_1 = 0$, $q_2 = O(1)$, $q_l = O(1)$ с погрешностью $O(\lambda^2)$ имеем

$$C_1 = \frac{q_2\eta(\eta + i\zeta)}{d_0\zeta^2(\eta^2 + \zeta^2)}, \quad C_2 = -i\frac{\zeta^3}{\eta^3}C_1 \tag{4.8}$$

Главные члены коэффициентов C_k имеют порядок единицы и определяются решением бесконечной системы

$$\sum_k d_{lk}^0 C_k = q_l - d_{l1}^0 C_1 - d_{l2}^0 C_2 \tag{4.9}$$

Из соотношений (4.8), (4.9) вытекает, что в рассматриваемом случае амплитуды внутреннего решения и слабого погранслоя имеют порядок λ^{-1}, а сильного погранслоя – порядок единица.

В случае $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_l = O(1)$ коэффициенты C_1, C_2 имеют порядок λ, коэффициенты C_k – порядок единица, главные члены определяются из алгебраической системы

$$\sum_k d_{lk}^0 C_k = q_l, \quad \sum_k d_{1k}^0 C_k = 0 \tag{4.10}$$

$$d_0 C_1 - d_0 C_2 + \sum_k d_{2k}^0 C_k = 0 \tag{4.11}$$

В рассматриваемом случае амплитуды смещений на торце определяются выражениями

$$u_n^0 = \sum_k C_k a_{nk}^0 + O(\lambda^2), \quad n = 1, 2$$

т.е. сильным погранслоем, который, в свою очередь, согласно уравнениям (4.10), определяется самоуравновешенной частью нагрузки.

Заметим, что в отличие от статического случая амплитуда напряжений при $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ не убывает экспоненциально, однако отношение амплитуд проникающего решения и слабого погранслоя к амплитудам сильного погранслоя будет порядка λ^2. Увеличить этот порядок возможно только при дополнительных требованиях на самоуравновешенную нагрузку. Сформулировать явные условия в терминах заданных торцевых напряжений не удается, поскольку определение C_k связано с обращением бесконечной системы (4.10).

5. Анализ симметричной задачи в области низких частот. Не вдаваясь в детали, приведем основные результаты анализа.

В окрестности $\gamma = 0$ уравнение (1.9) имеет два вещественных корня вида

$$\gamma_1^{\pm} = \pm\beta, \quad \beta = \lambda\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\left(1+\frac{\lambda^2\nu^2}{12(1-\nu)}\right) \tag{5.1}$$

Для остальных корней имеем

$$\gamma_n = \beta_n + O(\lambda^2)$$

где β_n – корни уравнения (2.4).

Корням $\gamma_1^{\pm}$ соответствуют два незатухающих ЭР

$$\mathbf{u}_1^{s\pm} = \mathbf{a}_1^{s\pm}e^{\pm i\beta x}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{s\pm} = \mathbf{b}_1^{s\pm}e^{\pm i\beta x} \tag{5.2}$$

где

$$\mathbf{a}_1^{s\pm} = \mathbf{a}_0^s \pm \beta\mathbf{a}_1^s + O(\beta^2) = [1, \pm i\beta y\nu/(1-\nu)]^T + O(\beta^2)$$

$$\mathbf{b}_1^{s\pm} = \beta\mathbf{b}_1^s \pm O(\beta^3) = \pm\beta[2i/(1-\nu), 0]^T + O(\beta^3)$$

Остальные корни определяют сильный погранслой.

Анализ системы (3.11) приводит к следующим результатам.

При $q_1^s \neq 0$, $q_2^s = O(1)$, $q_l^s = O(1)$ имеем

$$C_1 = \beta^{-1}A_1^{(-1)} + O(\beta), \quad A_1^{(-1)} = -iq_1^s(1-\nu)/2 \tag{5.3}$$

Главные члены коэффициентов C_k определяются решением бесконечной системы

$$\sum_k d_{lk}^0 C_k = q_l^s - d_{l1}^0 A_1^{(-1)}, \quad d_{lk}^0 = (\mathbf{b}_k^{0+}, \mathbf{a}_k^{0-})$$

Компоненты векторов $\mathbf{b}_k^{0+}$, $\mathbf{a}_k^{0-}$ получаются на основе предельного перехода при $\lambda \to 0$ в формулах (1.12), (1.14). Таким образом, в рассматриваемом случае амплитуда распространяющейся волны имеет порядок λ^{-1}, а амплитуды погранслойных ЭР – порядок единица.

При $q_1^s = 0$, $q_l^s = O(1)$ имеем

$$C_1 = \beta A_1^{(1)} + O(\beta^3)$$

$A_1^{(1)}$ и C_k определяются решением следующей системы:

$$\sum_k d_{lk}^0 C_k = q_l^s, \quad A_1^{(1)} = \frac{i(1-\nu)}{2}\sum_k d_{lk}^0 C_k \tag{5.4}$$

Амплитуды компонент вектора смещений при $x = 0$ имеют порядок единица и их главные члены определяются сильным погранслоем (самоуравновешенной частью нагрузки).

Отношение амплитуд проникающего решения и сильного погранслоя при $q_1^s = 0$ имеет порядок λ. Однако в отличие от антисимметричного случая здесь удается сформулировать достаточно простое условие, выполнение которого приводит к отношению, имеющему порядок λ^3. Выведем это условие.

Пусть выполняются условия $p_1^s \neq 0$, $p_2^s = 0$. При этом, как показано выше, $\overset{0}{u}_1, \overset{0}{u}_2 = O(1)$. Обратимся к первой формуле (3.6) ($q = 1$). Учитывая, что в рассматриваемом случае

$$a_{11} = 1 + \lambda^2 h_1(y), \quad b_{2q} = \lambda^4 h_2(y)$$

$$h_1(y) = -\frac{\nu}{4}y^2 - \frac{1 + 2\nu^2 + \nu^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad h_2(y) = \frac{y(y^2 - 1)\nu^2}{12(1 - \nu)} \tag{5.5}$$

$$d_1^s = -\lambda i \nu \sqrt{\frac{2}{1 - \nu}}(1 + O(\lambda^2))$$

после подстановки выражений (5.5), (5.6) в первую формулу (3.6) получим

$$\lambda\nu\sqrt{\frac{1}{2(1 - \nu)}}(1 + O(\lambda^2))C_1 = \bar{q}_1 + \lambda^2 \int p_1 h_1(y)dy + O(\lambda^4)$$

Отсюда вытекает, что при выполнении условия

$$\int p_1 dy - \frac{\lambda^2 \nu}{4}\int p_1 y^2 dy = 0 \tag{5.6}$$

амплитуды проникающего решения будут иметь порядок λ^3. В частности, можно потребовать равенства нулю обоих интегралов в условии (5.6).

6. Выводы. Из проведенного анализа вытекает, что в задачах динамики самоуравновешенная низкочастотная краевая нагрузка может возбуждать малоамплитудные распространяющиеся волны. При этом, если ввести коэффициент $k = P_0/P$, где P_0, P – потоки энергии, порождаемые самоуравновешенной и несамоуравновешенной нагрузками соответственно (они пропорциональны квадратам амплитуд распространяющихся мод), характеризующий степень локализации колебаний у торца, то в случае антисимметричной задачи $k^a = O(\lambda^5)$, если $Q \neq 0$, $k^a = O(\lambda^4)$, если $Q = 0$, $M \neq 0$; в случае симметричной задачи $k^s = O(\lambda^4)$, если второй интеграл в условии (5.6) не равен нулю, и $k^s = O(\lambda^6)$, если выполняется условие (5.6) или равны нулю оба интеграла.

Полученное в явном виде условие затухания (5.6) может быть непосредственно использовано при уточнении граничных условий в динамике пластин, в том числе и при действии самоуравновешенных нагрузок (см., например [19]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Лондонского математического общества, программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2113.2003.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00069).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saint-Venant B.* Memoire sur la torsion des prismes, avec des concidérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieure des solides elastiques en general, et des formules pratiques pour le cal-

cul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément // Men. Savants Acad. Sci. Inst. Imperial France. 1856. V. 14. P. 233–560 = *Сен-Венан Б.* Мемуар о кручении призм. Мемуар о изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 с.
2. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
3. *Horgan C.O., Knowels J.K.* Recent developments concerning Saint-Venant's principle / Adv. Appl. Mech. 1983. V. 23. P. 179–269.
4. *Horgan C.O.* Recent developments concerning Saint-Venants's principle: an update / Appl. Mech. Rev. 1989. V. 42. № 11. Pt 1. P. 295–304.
5. *Horgan C.O.* Recent developments concerning Saint-Venant's principle: a second update // Appl. Mech. Rev. 1996. V. 49. № 10. P. 101–111.
6. *Устинов Ю.А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Физматлит, 2003. 125 с.
7. *Гусейн-Заде М.И.* О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 752–760.
8. *Gregoru R.D., Wan F.Y.M.* Decaying states of plane strain in a semi-infite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elast. 1984. V. 14. № 1. P. 27–64.
9. *Устинов Ю.А.* К обоснованию принципа Сен-Венана // Изв. СКНЦ. 1994. Спец. выпуск. С. 91–92.
10. *Друзь А.Н., Устинов Ю.А.* Тензор Грина для упругого цилиндра и приложение его к развитию теории Сен-Венана // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 660–668.
11. *Устинов Ю.А.* О структуре погранслоя в слоистых плитах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 2. С. 325–328.
12. *Гусейн-Заде М.И.* К построению теории изгиба слоистых пластинок // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 2. С. 232–243.
13. *Lamb H.* On waves in elastic plate // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1917. V. 93. № 648. P. 114–128.
14. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
15. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1993. 144 с.
16. *Федорюк М.В.* Соотношения типа ортогональности в твердых волноводах // Акуст. журн. 1974. Т. 20. Вып. 2. С. 310–314.
17. *Зильберглейт А.С., Нуллер Б.М.* Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.
18. *Костюченко А.Г., Оразов М.Б.* Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1981. Т. 6. С. 97–146.
19. *Babenkova E., Kaplunov J.* The two-term interior asymptotic expansion in the case of low-frequency longitudinal vibrations of an elongated elastic rectangle // Proc. IUTAM Symp. Asymptotics, Singularities and Homogenisation in Problems of Mechanics. Dordrecht: Kluwer, 2003. P. 137–145.

Ростов-на-Дону, Манчестер (Великобритания)
e-mail:ustino@ math.rsu.ru

Поступила в редакцию
15.X.2003