

УДК 533.6.011.8

© 2005 г. С. Л. Горелов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА САМОПОДОБНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ К ЗАДАЧАМ ДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Эффективность метода самоподобной интерполяции [1] в его простейшем варианте демонстрируется на решении задач о медленных плоских течениях Куэтта и Пуазейля разреженного газа и задачи о структуре сильной ударной волны в одноатомном газе. Находятся интерполяции функции по заданным ее асимптотическим представлениям различного характера на концах интервала задания функции, обычно полубесконечного.

1. Метод самоподобной интерполяции. Пусть для искомой функции $f(x)$, $x = [0, \infty)$ известны следующие асимптотики:

$$f(x) = \begin{cases} b, & x \rightarrow 0 \\ \sum_{i=0}^N A_i x^{\alpha_i}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.1)$$

Применяя метод самоподобной интерполяции [1], построим интерполяционные формулы разных порядков. Асимптотика для $x \rightarrow 0$ фиксирована, поэтому приводим только приближения для $f(x \rightarrow \infty)$.

Первый порядок. Используем главные члены разложения

$$f(x) = A_0 x^{\alpha_0}, \quad x \rightarrow \infty$$

Интерполяционная формула имеет вид

$$f^*(x) = (b^{1/n} + Bx)^n$$

Звездочкой обозначаются величины, получаемые данным методом.

При $x \rightarrow 0$ имеем $f^*(x) \rightarrow f(x)$. Неизвестные B и n находятся из уравнения

$$B^n x^n = A_0 x^{\alpha_0}$$

которое следует из соотношений (1.2) и (1.3) при $x \rightarrow \infty$. Отсюда $n = \alpha_0$, $B = A_0^{1/\alpha_0}$. В результате получаем формулу

$$f^*(x) = (b^{1/\alpha_0} + A_0^{1/\alpha_0} x)^{\alpha_0}$$

которая дает правильные асимптотики как при $x \rightarrow 0$, так и при $x \rightarrow \infty$.

Второй порядок. Имеем

$$f(x) = A_0 x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1}, \quad x \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

$$f^*(x) = [(b^{1/n} + Cx)^{n/m} + Dx^2]^m \quad (1.3)$$

Для определения n, m, C, D рассматривается асимптотика при $x \rightarrow \infty$. Сначала приравняются главные члены в формулах (1.3) и (1.2), в результате получаем уравнение

$$D^m x^{2m} = A_0 x^{\alpha_0}$$

Отсюда $m = \alpha_0/2, D = A_0^{2/\alpha_0}$. Далее в равенстве (1.3) пренебрегаем слагаемым $b^{1/n}$ по сравнению с Cx и линеаризуем. Получаем

$$n = \frac{\alpha_0}{2}\beta, \quad C = \left(\frac{2}{\alpha_0} A_0^\gamma A_1\right)^{1/\beta}, \quad \beta = \alpha_1 - \alpha_0 + 2, \quad \gamma = \frac{2}{\alpha_0} - 1$$

Третий порядок. Имеем

$$f(x) = A_0 x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + A_2 x^{\alpha_2}, \quad x \rightarrow \infty$$

$$f^*(x) = \{[(b^{1/n} + Dx)^{n/m} + Ex^2]^{m/\rho} + Gx^3\}^\rho$$

В реальных задачах, как правило, заданы по несколько членов асимптотических рядов на концах интервала. Для того чтобы получить формулы типа (1.1), используются алгебраические преобразования (прибавление или вычитание постоянных, умножение или деление на некоторые функции от x , как, например, в разд. 2), если в асимптотическом ряде есть член с логарифмом, то используется экспоненциальное преобразование с дальнейшим разложением экспоненты в степенной ряд при $x \rightarrow 0$ (разд. 3), если в асимптотическом ряде есть член с экспонентой, то делается логарифмическое преобразование (разд. 4). Далее находится интерполяционная формула для преобразованных выражений и затем делается обратное преобразование.

2. Задача Куэтта. Рассмотрим медленное (локальное число Маха $M \ll 1$) течение разреженного газа между параллельными пластинами, которые движутся друг относительно друга с равной и противоположной по направлению скоростью. Интегральное уравнение для профиля скорости имеет вид [2]

$$g(x) = f^-(x) + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} T_{-1}(|x-s|)g(s)ds \tag{2.1}$$

$$f^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ T_0\left(\alpha\left(\frac{1}{2}-x\right)\right) \pm T_0\left(\alpha\left(\frac{1}{2}+x\right)\right) \right\} \tag{2.2}$$

$$T_i(x) = \int_0^\infty z^i \exp\left(-z^2 - \frac{x}{z}\right) dz, \quad i = 0, -1; \quad \alpha = \frac{1}{Kn}$$

Требуется найти напряжение трения P_{xz} . При $\alpha \rightarrow 0$ имеем [2]

$$P = P_{xz}/P_{xz}^0 = 1 - \sqrt{\pi}\alpha/2 \tag{2.3}$$

При $\alpha \rightarrow \infty$ (с учетом скольжения)

$$P = \sqrt{\pi}/\alpha - 2\sqrt{\pi}/\alpha^2 \tag{2.4}$$

где P_{xz}^0 – напряжение трения в свободномолекулярном случае.

Самоподобные интерполяции разных порядков имеют следующий вид:
первый порядок

$$P = \begin{cases} 1, & \alpha \rightarrow 0 \\ \sqrt{\pi}/\alpha, & \alpha \rightarrow \infty \end{cases}; \quad P^* = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} + \alpha} \quad (2.5)$$

второй порядок

$$P = \begin{cases} 1 - \sqrt{\pi}\alpha/2, & \alpha \rightarrow 0 \\ \sqrt{\pi}/\alpha, & \alpha \rightarrow \infty \end{cases}; \quad P^* = \frac{\sqrt{\pi}\alpha}{2} \left[1 + \frac{\pi\alpha}{4}(\alpha + 2\sqrt{\pi}) \right]^{-1/2} \quad (2.6)$$

третий порядок

$$P = \begin{cases} 1 - \sqrt{\pi}\alpha/2, & \alpha \rightarrow 0 \\ \sqrt{\pi}/\alpha - 2\sqrt{\pi}/\alpha^2, & \alpha \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.7)$$

$$P^* = \frac{\sqrt{\pi}\alpha}{2} \left[1 + \frac{\pi\alpha}{8}(6\pi(\sqrt{\pi} - 1) + 3\pi\alpha + \sqrt{\pi}\alpha^2) \right]^{-1/3}$$

Уравнение (2.1) было решено численно для нескольких значений α вариационным методом наименьших квадратов. В качестве пробной функции был выбран полином двадцатой степени.

Сравнение значений отношения $P = P_{xz}/P_{xz}^0$ в зависимости от обратного числа Кнудсена α (N – результаты численного расчета, I_1, I_2, I_3 – интерполяция первого, второго и третьего порядков (формулы (2.5)–(2.7)) приводится ниже

α	0.1	0.3	1	3	10	30	100
N	0.927	0.819	0.600	0.360	0.147	0.0559	0.0176
I_1	0.947	0.855	0.639	0.371	0.150	0.0558	0.0174
I_2	0.922	0.807	0.585	0.344	0.145	0.0549	0.0173
I_3	0.924	0.817	0.603	0.356	0.147	0.0554	0.0174

Максимальная ошибка интерполяции составляет 6% (при $\alpha = 1$), 2.7% ($\alpha = 3$) и 0.6% ($\alpha = 10$) соответственно для интерполяции первого, второго и третьего порядка.

3. Течение Пуазейля. Рассмотрим медленное течение разреженного газа между двумя бесконечными параллельными неподвижными пластинами под действием малого градиента давления $dp/dx = -Kp_0$, $K = \text{const}$, p_0 – давление при $x = 0$, координата x направлена вдоль пластин и отнесена к расстоянию между ними. Интегральное уравнение для профиля скорости газа $u_x = g(y)V$, $V^2 = 2kT/m$ имеет вид [2, 3]

$$g(x) = \frac{K}{2\alpha} [1 - f^+(x)] + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} T_{-1}(\alpha|x-s|)g(s)ds \quad (3.1)$$

Функции f^+ и T_{-1} и величина α даются формулами (2.2).

Требуется вычислить безразмерный объемный расход газа

$$Q(\alpha) = \int_{-1/2}^{1/2} g(x)dx$$

Асимптотические представления функции $Q(\alpha)$ имеют вид [2, 3] (γ – постоянная Эйлера)

$$Q(\alpha) = \begin{cases} -\ln \alpha / \sqrt{\pi} + (1 - \gamma/2) / \sqrt{\pi}, & \alpha \rightarrow 0 \\ \alpha/6 + 1.0162, & \alpha \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.2)$$

Самоподобная интерполяция дается формулой

$$Q^*(\alpha) = A + B\alpha + C \ln(D + E\alpha^{-1}); \quad A = 1.0162 \quad (3.3)$$

$$B = 1/6, \quad C = 1/\sqrt{\pi}, \quad D = 3/2, \quad E = 0.3363$$

Функция $Q(\alpha)$ имеет минимум (известный парадокс Кнудсена [2]); при $\alpha \rightarrow 0$ функция $Q(\alpha)$ содержит логарифмическое слагаемое. Эти особенности усложняют определение интерполяции (по сравнению со случаем, рассмотренным в разд. 2). Тем не менее результаты расчетов по формуле (3.3) отличаются от численных результатов [3] незначительно (см. ниже, где N – результаты численных расчетов $Q(\alpha)$ [3], I – результаты применения формулы (3.3))

α	0.01	0.05	0.1	0.5	1	5	10	50	100	500
N	3.050	2.302	2.033	1.618	1.539	1.991	2.768	9.370	17.70	84.36
I	3.044	2.346	2.066	1.560	1.470	1.923	2.721	9.357	17.69	84.35

Максимальное различие равно 4.5% при $\alpha = 1$, вблизи минимума расхода.

4. Структура сильной ударной волны в одноатомном газе. Одномерное стационарное движение одноатомного газа в направлении оси x описывается с помощью кинетического уравнения Больцмана, которое представим в виде

$$c_x \partial f(x, \mathbf{c}) / \partial x = J_1(x, \mathbf{c}) - f(x, \mathbf{c}) J_2(x, \mathbf{c})$$

$$J_1(x, \mathbf{c}) = \int f(x, \mathbf{c}_+) f(x, \mathbf{c}_-) d\Omega, \quad J_2(x, \mathbf{c}) = \int f(x, \mathbf{c}_1) d\Omega \quad (4.1)$$

$$d\Omega = g b d b d \varepsilon d \mathbf{c}_1, \quad \mathbf{c}_\pm = (\mathbf{c} + \mathbf{c}_1 \pm g \mathbf{k}) / 2$$

Здесь $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ – скорость молекулы, $g = |\mathbf{c} - \mathbf{c}_1|$ – модуль относительной скорости молекул при столкновении, b – прицельное расстояние, ε – азимутальный угол, \mathbf{c}_\pm , \mathbf{k} – скорости молекул и единичный вектор относительной скорости молекул после столкновения.

Числовая плотность, скорость и температура газа выражаются через функцию распределения $f(x, \mathbf{c})$ формулами

$$n = \int f(x, \mathbf{c}) d\mathbf{c}, \quad u = \frac{1}{n} \int c_x f(x, \mathbf{c}) d\mathbf{c} \quad (4.2)$$

$$T = \frac{m}{3kn} \int [(c_x - u)^2 + c_y^2 + c_z^2] f(x, \mathbf{c}) d\mathbf{c}$$

При $x \rightarrow \mp \infty$ функция распределения стремится к максвелловским функциям

$$f_j^M = n_j \left(\frac{\theta_j}{\pi} \right)^{3/2} \exp\{-\theta_j [(c_x - u_j)^2 + c_y^2 + c_z^2]\}, \quad \theta_j = \frac{m}{2kT_j}; \quad j = 1, 2 \quad (4.3)$$

Значения плотности, скорости и температуры газа перед ($x = -\infty$) и за ($x = \infty$) ударной волной равны n_1, u_1, T_1 и n_2, u_2, T_2 соответственно. Эти значения связаны известными соотношениями [4]

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{4M_1}{M_1 + 3}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{(M_1 + 3)(5M_1 - 1)}{16M_1} \quad (4.4)$$

где M_1 – число Маха до скачка.

Интегральная форма уравнения (4.5) для задачи о структуре ударной волны имеет вид [2] (\hat{A} – оператор)

$$f(x, \mathbf{c}) = \hat{A}f \equiv \left\{ \int_{-\infty}^x W(\tau, \mathbf{c}) d\tau, c_x > 0; \int_x^{\infty} W(\tau, \mathbf{c}) d\tau, c_x < 0 \right\} \quad (4.5)$$

$$W(\tau, \mathbf{c}) = \frac{J_1(\tau, \mathbf{c})}{c_x} \exp \left[-\int_{\tau}^x \frac{J_2(\tau_1, \mathbf{c})}{c_x} d\tau_1 \right]$$

Будем использовать модель “псевдомаксвелловских” молекул, когда межмолекулярный потенциал равен χr^{-4} , где r – расстояние между молекулами. Молекулы представляют собой упругие шары, диаметр которых d зависит от относительной скорости молекул при столкновении [5] и равен расстоянию наибольшего сближения молекул при столкновении, т.е. $(4\chi/(mg^2))^{1/4}$. Вводим величину σ_0 равенством $\pi d^2 = \sigma_0 g^{-1}$. Тогда $J_2(x, \mathbf{c}) = \sigma_0 n$.

Интегральное уравнение (4.5) решаем методом последовательных приближений $f^{(n)} = \hat{A}f^{(n-1)}$ с учетом граничных условий (4.3) при выборе следующего нулевого приближения [6]:

$$f^{(0)}(x, \mathbf{c}) = \begin{cases} f_1^M & \text{при } -\infty < x < 0 \text{ или } x = 0, c_x > 0 \\ f_2^M & \text{при } 0 < x < \infty \text{ или } x = 0, c_x < 0 \end{cases}$$

Значения f_1^M и f_2^M вычислены по (n_1, θ_1, u_1) и (n_2, θ_2, u_2) соответственно.

Используя равенство

$$f_j(x, \mathbf{c}_+) f_j(x, \mathbf{c}_-) = f_j(x, \mathbf{c}) f_j(x, \mathbf{c}_1), \quad j = 1, 2$$

в первом приближении получаем

$$f^{(1)}(x, \mathbf{c}) = \begin{cases} f_1^M + \xi(f_2^M - f_1^M) B_1(x, c_x) & \text{при } x < 0 \\ f_2^M + (1 - \xi)(f_1^M - f_2^M) B_2(x, c_x) & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{при } c_x < 0 \\ 0 & \text{при } c_x > 0 \end{cases}, \quad B_j(x, c_x) = \exp(-\sigma_0 n_j x / c_x), \quad j = 1, 2 \quad (4.7)$$

Используя соотношения (4.2) и (4.7), получаем выражение для плотности в первом приближении

$$n = \begin{cases} n_1(1 - n_{11} + n_{12}), & x < 0 \\ n_2(1 - n_{22} + n_{21}), & x > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Здесь

$$n_{jm} = \frac{n_m}{n_j} \left(\frac{\theta_m}{\pi} \right)^{1/2} N_{jm}, \quad N_{1m} = \int_{-\infty}^0 A_m B_1 dc_x, \quad N_{2m} = \int_0^{\infty} A_m B_2 dc_x \quad (4.9)$$

$$A_m = \exp[-\theta_m(c_x - u_m)^2], \quad m = 1, 2$$

Рассмотрим асимптотическое поведение интеграла

$$\begin{aligned} J_i(y, q) &= \int_0^{\infty} w^i \exp\left[-(w - q)^2 - \frac{y}{w}\right] dw = \\ &= y^{(i+1)/3} \int_0^{\infty} z^i \exp[-y^{2/3} \Phi(z)] dz, \quad \Phi(z) = (z - qy^{-1/3})^2 + \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (4.10)$$

при $y \rightarrow \infty$. Здесь i, y, q – параметры. Переменная z введена формулой $w = y^{1/3}z$.

Функция $\Phi(z)$ имеет минимум в точке z_0 , причем

$$z_0 = \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2^{1/3}}{9}\varepsilon^2 + \frac{2^{5/3}}{81}\varepsilon^3 + \dots, \quad \varepsilon = qy^{-1/3}$$

Следуя методу Лапласа [7], разложим функцию $\Phi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0

$$\Phi(z) = \frac{1}{z_0} + (z_0 - \varepsilon)^2 + \left(1 + \frac{1}{z_0}\right)(z - z_0)^2 - \frac{(z - z_0)^3}{z_0^4} + \frac{(z - z_0)^4}{z_0^5} + \dots$$

и подставим в выражение (4.10). Получим

$$J_i = y^{(i+1)/3} z_0^i \exp\left[-y^{2/3}\left(z_0 - \varepsilon\right)^2 + \frac{1}{z_0}\right] \int_0^{\infty} \exp\left[-y^{2/3}\left(1 + \frac{1}{z_0}\right)(z - z_0)^2\right] dz \quad (4.11)$$

Вычисляя этот интеграл, разлагая полученное выражение в ряд по ε , заменяя ε на $qy^{-1/3}$, имеем

$$J_i(y, q)|_{y \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \beta^i \left[1 + \frac{i+1}{3} q \beta^{-1}\right] \exp\left[-3\beta^2 + 2q\beta - \frac{2}{3}q^2\right], \quad \beta = \left(\frac{y}{2}\right)^{1/3} \quad (4.12)$$

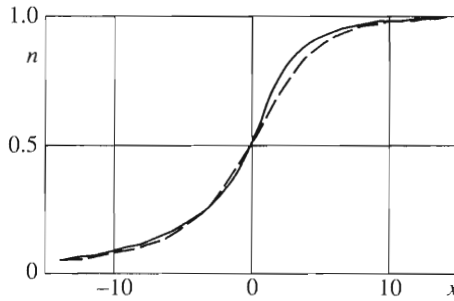
Отсюда получаем следующие асимптотические выражения при $x \rightarrow \infty$:

$$n_{ij} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{n_j}{n_i} \exp\left[-3\theta_j^{1/3} \left(\frac{\sigma_0 n_i |x|}{2}\right)^{2/3}\right], \quad i, j = 1, 2 \quad (4.13)$$

При больших числах M_1 в формулах (4.8) величины n_{11} и n_{21} малы по сравнению с n_{12} и n_{22} соответственно. Пренебрегая ими, найдем

$$n = \begin{cases} n_1(1 + n_{12}), & x \rightarrow -\infty \\ n_2(1 - n_{22}), & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.14)$$

Способ построения интерполяционных формул отличается от использованных в разд. 2 и 3 заданием асимптотических представлений на концах бесконечного интер-



вала. Используется следующий прием: предполагается, что функция $n(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, и функция разбивается на левую и правую части точкой $x = 0$. Находятся интерполяции для левой и правой частей, содержащие неизвестные значения функции и ее первой производной, в точке $x = 0$. Для определения этих значений полагаются равными вторые и третьи производные от левой и правой части при $x = 0$. Искомая интерполяция дается громоздкими формулами, которые здесь не приводятся. Результаты расчетов профиля плотности при $M_1 = 10 \dots 30$ были сопоставлены с результатами расчетов эталонным для кинетической теории методом прямого статистического моделирования. На фигуре при $M_1 = 11$ представлены интерполяционная кривая нормализованной плотности n (сплошная линия) и данные численного расчета (штриховая кривая). Координата x отнесена к длине свободного пробега перед волной. Относительная разница между этими результатами не превосходит 10%, что близко к погрешности расчетов методом прямого статистического моделирования.

Автор благодарит В.С. Галкина и В.А. Жарова за обсуждения, а С.В. Русакова за предоставленные численные результаты решения задачи о структуре ударной волны методом прямого статистического моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00501) и в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1984.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gluzman S., Yukalov V.I.* Unified approach to crossover phenomena // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58. № 4. P. 4197–4209.
2. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
3. *Lo S.S., Loyalka S.K.* An efficient computation of near-continuum rarefied gas flows // *ZAMP.* 1982. V. 33. № 3. P. 419–424.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. 6. М.: Наука, 1986. 736 с.
5. *Власов В.И.* Улучшение метода статистических испытаний (Монте-Карло) для расчета течений разреженных газов // *Докл. АН СССР.* 1966. Т. 167. № 5. С. 1016–1018.
6. *Баранцев Р.Г.* Об асимптотическом законе выравнивания скачка в одноатомном газе // *ЖЭТФ.* 1962. Т. 42. Вып. 3. С. 889–895.
7. *Баранцев Р.Г., Энгельгарт В.Н.* Асимптотические методы в механике газа и жидкости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 88 с.