

УДК 533.72

© 2005 г. С. А. Савков, А. А. Юшканов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВУХАТОМНОГО ГАЗА

Получено аналитическое решение нестационарного кинетического уравнения для двухатомного газа. В качестве приложения рассмотрена задача о точечном источнике тепла или частиц.

К настоящему времени для задач, связанных с явлениями переноса в молекулярных газах [1], аналитические решения получены только в стационарном случае [2–6].

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + C_x \frac{\partial \phi}{\partial x} = I[\phi] \tag{1}$$

Здесь ϕ – поправка к равновесной (максвелловской) функции распределения, которая в рассматриваемом случае двухатомного газа определяется соотношением

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \frac{J}{k T_0} \exp(-C^2 - \gamma^2), \quad C = V \sqrt{\frac{m}{2k T_0}}, \quad \gamma = \omega \sqrt{\frac{J}{2k T_0}}$$

V и ω – собственная скорость поступательного и вращательного движения молекул газа, m и J – масса и момент инерции молекул, k – постоянная Больцмана, T_0 и n_0 – невозмущенные значения температуры и концентрации.

Примем [2]

$$I[\phi] = \sum_{i=1}^3 P_i M_i - \phi$$

где

$$M_i = 2\pi^{-3/2} \int P_i \phi \exp(-C^2 - \gamma^2) \gamma d\gamma d^3 C$$

$$P_1 = 1, \quad P_2 = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(C^2 + \gamma^2 - \frac{5}{2} \right), \quad P_3 = \sqrt{2} C_x$$

Обозначим $C_x = \mu$ и представим ϕ в виде

$$\phi = e_1 Y_1(t, x, \mu) + e_2 Y_2(t, x, \mu)$$

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{v}} (C^2 - \mu^2 + \gamma^2 - v^2), \quad v = \sqrt{2} \tag{2}$$

В результате уравнение (1) сводится к интегродифференциальному уравнению

относительно вектора $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \mathbf{Y}(t, x, \mu) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(\mu, \mu_1) \mathbf{Y}(t, x, \mu_1) \exp(-\mu_1^2) d\mu_1$$

$$\mathbf{K}(\mu, \mu_1) = \left\| \begin{array}{cc} 1 + 2\mu\mu_1 + \frac{2}{5}\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\mu_1^2 - \frac{1}{2}\right) & \frac{2}{5}v\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \\ \frac{2}{5}v\left(\mu_1^2 - \frac{1}{2}\right) & \frac{2}{5}v^2 \end{array} \right\|$$

Разделяя в соответствии с известным подходом [7] переменные, представим решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{Y}(t, x, \mu) = \exp(\sigma t - (\sigma + 1)x/\eta) \mathbf{F}(\sigma, \eta, \mu)$$

Компоненты вектора \mathbf{F} определяются из системы характеристических уравнений

$$\pi^{1/2} \left(1 - \frac{\mu}{\eta}\right) (\sigma + 1) F_1 = N_1^0 + 2\mu N_1^1 + \frac{2\mu^2 - 1}{10} (2N_1^2 - N_1^0 + 2vN_2^0)$$

$$\pi^{1/2} \left(1 - \frac{\mu}{\eta}\right) (\sigma + 1) F_2 = \frac{v}{5} (2N_1^2 - N_1^0 + 2vN_2^0) \quad (3)$$

$$N_i^\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i \mu^\alpha \exp(-\mu^2) d\mu \quad (4)$$

Следуя предложенной ранее процедуре [8], выразим входящие в систему (3), (4) высшие моменты функции F_1 через N_1^0 . Для этого умножим первое уравнение (3) на $\exp(-\mu^2)$ и $\mu \exp(-\mu^2)$ и проинтегрируем по всей области изменения μ . Решая полученную систему уравнений, найдем

$$N_1^\alpha = N_1^0 \left(\frac{\eta\sigma}{\sigma + 1} \right)^\alpha$$

Таким образом, уравнения (3), (4) также могут быть представлены в векторной форме

$$\pi^{1/2} (\eta - \mu) (\sigma + 1) \mathbf{F} = \eta \Delta \mathbf{N} \quad (5)$$

$$\Delta = \mathbf{K} \left(\mu, \frac{\eta\sigma}{\sigma + 1} \right) \quad (6)$$

$$\mathbf{N} = \left\| \begin{array}{c} N_1^0 \\ N_2^0 \end{array} \right\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F} \exp(-\mu^2) d\mu \quad (7)$$

Равенство (7) можно рассматривать как условие нормировки для функции \mathbf{F} .

В случае, когда η не является действительным числом, из уравнения (5) находим

$$\mathbf{F} = \frac{\pi^{-1/2} \eta}{(\eta - \mu) (\sigma + 1)} \Delta \mathbf{N} \quad (8)$$

Соответствующие этому решению значения η определяются условием (7), что дает

$$\mathbf{N} = \frac{\pi^{-1/2} \eta}{\sigma + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\eta - \mu} \mathbf{N}$$

Нетривиальное решение данного уравнения существует, когда

$$\det \Lambda(\sigma, \eta) = 0 \tag{9}$$

Здесь

$$\Lambda(\sigma, \eta) = (\sigma + 1)E - \pi^{-1/2} \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \exp(-\mu^2) \frac{\mu}{\eta - \mu} d\mu =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \sigma + 1 + \lambda_c(\eta) + \frac{2\eta^2 \sigma}{\sigma + 1} (\lambda_c(\eta) + 1) + \lambda_1 l & \nu \lambda_1 \\ \frac{2}{5} \nu \lambda_c(\eta) l & \sigma + 1 + \frac{4}{5} \lambda_c(\eta) \end{array} \right\| \tag{10}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_c(\eta)(2\eta^2 - 1) + 2\eta^2}{5}, \quad l = \left(\frac{\eta \sigma}{\sigma + 1} \right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$\lambda_c(z) = \pi^{-1/2} z \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\mu^2) \frac{d\mu}{\mu - z}$$

E – единичная матрица. При этом сам нормировочный вектор N может быть определен с точностью до произвольной постоянной

$$N = \text{const} \left\| \begin{array}{c} \Lambda_{22} \\ -\Lambda_{21} \end{array} \right\| \tag{11}$$

Для решения дисперсионного уравнения (9) обратимся к теории краевых задач функции комплексного переменного (см., например, [9]). Отметим, что $D(z) = \det \Lambda(\sigma, z)$ – четная кусочно-аналитическая функция в комплексной плоскости с разрезом вдоль действительной оси. Обозначим сужения этой функции на верхнюю и нижнюю полуплоскости через D^+ и D^- соответственно. Рассмотрим однородную краевую задачу Римана

$$X^+(x) = G(x)X^-(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{12}$$

с коэффициентом $G(x) = D^+(x)/D^-(x)$, где $D^\pm(x) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} D(x + iy)$.

В силу обобщенной теоремы Лиувилля общее решение задачи (12) определяется выражением

$$D^\pm(z) = A(z + i)^{-2\kappa} X^\pm(z) \prod_{\alpha=1}^{\kappa} (\eta_\alpha^2 - z^2)$$

где

$$X^\pm(z) = \left(\frac{z+i}{z\pm i} \right)^{2\kappa} \exp(\Gamma(z))$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left(\left(\frac{\mu+i}{\mu-i} \right)^{2\kappa} G(\mu) \right) \frac{d\mu}{\mu-z}$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \text{ind} G(x) = \frac{1}{2\pi} [\arg G(x)]_{\mathbb{R}_+}, \quad \mathbb{R}_+ \in (0, \infty)$$

Таким образом, для определения η_α достаточно вычислить D^\pm и X^\pm при произвольных $k + 1$ значениях z и решить полученную систему относительно указанных величин и постоянной A . Найденные таким образом значения $\pm\eta_\alpha$ являются искомыми корнями уравнения (9).

Учитывая выражение (11), из соотношения (8) получим

$$\mathbf{F}(\sigma, \eta_\alpha, \mu) = \frac{\pi^{-1/2} \eta_\alpha}{(\eta_\alpha - \mu)(\sigma + 1)} \begin{vmatrix} \Lambda_{22} \Delta_{11} - \Lambda_{21} \Delta_{12} \\ \Lambda_{22} \Delta_{21} - \Lambda_{21} \Delta_{22} \end{vmatrix} \quad (13)$$

где Λ_{ij} и Δ_{ij} – компоненты матриц (10) и (6), вычисленные при $\eta = \eta_\alpha$.

В случае действительных значений η решениями уравнений (5), (7) являются функции

$$\Phi(\sigma, \eta, \mu) = \left(\pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \Delta + \exp(\eta^2) \Lambda \delta(\eta - \mu) \right) \frac{\mathbf{N}}{\sigma + 1} \quad (14)$$

причем все интегралы от функции (14) должны вычисляться в смысле главного значения интеграла Коши.

Ввиду произвольности нормировочного вектора \mathbf{N} решения (14) можно представить как суперпозицию двух независимых функций

$$\Phi_1 = \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \begin{vmatrix} \mu^2 - \frac{1}{2} \\ v \end{vmatrix} + \exp(\eta^2) \delta(\eta - \mu) \begin{vmatrix} \lambda_p(\eta) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) + \eta^2 \\ \frac{5}{2v} (\sigma + 1) + v \lambda(\eta) \end{vmatrix}$$

$$\Phi_2 = \pi^{-1/2} \frac{\eta}{\eta - \mu} \begin{vmatrix} 1 + \frac{2\mu\eta\sigma}{\sigma + 1} \\ 0 \end{vmatrix} + \exp(\eta^2) \delta(\eta - \mu) \begin{vmatrix} \sigma + 1 + \lambda_p(\eta) + 2(\lambda_p(\eta) + 1) \frac{\eta^2 \sigma}{\sigma + 1} \\ \frac{\sigma + 1}{2v} - \frac{\sigma^2 \eta^2}{(\sigma + 1)v} \end{vmatrix}$$

Здесь

$$\lambda_p(\eta) = -2\eta \exp(-\eta^2) \int_0^\eta \exp(\mu^2) d\mu$$

Функции Φ_1 и Φ_2 составляют непрерывный спектр решений уравнения (5).

Можно доказать (см., например, [7]), что полученная система решений представляет собой полную систему ортогональных функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\sigma, \eta_\alpha, \mu) \mathbf{F}(\sigma, \eta_\beta, \mu) \exp(-\mu^2) \mu d\mu = \delta_{\alpha\beta} N_\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\sigma, \eta_\alpha, \mu) \Phi_\beta(\sigma, \eta, \mu) \exp(-\mu^2) \mu d\mu = 0 \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(\sigma, \eta', \mu) \Phi_\beta(\sigma, \eta, \mu) \exp(-\mu^2) \mu d\mu = \delta_{\alpha\beta} \delta(\eta - \eta') N_\alpha$$

где

$$\mathbf{X}_1 = N_{11}\Phi_1 - N_{12}\Phi_2, \quad \mathbf{X}_2 = N_{22}\Phi_2 - N_{12}\Phi_1$$

$$N_{11} = \left(\sigma + 1 + \lambda_p(\eta) + 2(\lambda_p(\eta) + 1) \frac{\eta^2 \sigma}{\sigma + 1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma + 1}{2} - \frac{\eta^2 \sigma^2}{\sigma + 1} \right)^2 + \pi \eta^2 \exp(-2\eta^2) \left(1 + \frac{2\eta^2 \sigma}{\sigma + 1} \right)$$

$$N_{12} = \left(\frac{\sigma + 1}{2} - \frac{\eta^2 \sigma^2}{\sigma + 1} \right) \left(\frac{5}{4}(\sigma + 1) + \lambda_p(\eta) \right) + \left(\sigma + 1 + \lambda_p(\eta) + 2(\lambda_p(\eta) + 1) \frac{\eta^2 \sigma}{\sigma + 1} \right) \left(\lambda_p(\eta) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) + \eta^2 \right) + \pi \eta^2 \exp(-2\eta^2) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{2\eta^2 \sigma}{\sigma + 1} \right)$$

$$N_{22} = \left(\lambda_p(\eta) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) + \eta^2 \right)^2 + 2 \left(\frac{5}{4}(\sigma + 1) + \lambda_p(\eta) \right)^2 + \pi \eta^2 \exp(-2\eta^2) \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \right)$$

$$N_0 = \eta \exp(\eta^2) (N_{11}N_{22} - N_{12}^2)$$

Значения N_α ввиду чрезвычайной громоздкости соответствующего выражения удобнее вычислять непосредственным численным интегрированием.

В качестве применения полученного решения рассмотрим бесконечный плоский источник тепла мощностью $W(t) = \exp(\sigma t)$, расположенный в плоскости $x = 0$.

Функцию распределения в этом случае можно представить в виде

$$\mathbf{Y}(t, x, \mu) = \mathbf{Y}^\pm(\sigma, x, \mu) \exp(\sigma t) \text{ для } \pm x > 0$$

где

$$\mathbf{Y}^\pm(\sigma, x, \mu) = \pm \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{\pm} \mathbf{F}_{\alpha}(\sigma, \pm \eta_{\alpha}, \mu) \exp(\mp(\sigma + 1)x/\eta_{\alpha}) + \sum_{\beta=0}^2 \int_0^{\pm\infty} B_{\beta} \Phi_{\beta}(\sigma, \eta, \mu) \exp(-(\sigma + 1)x/\eta) d\eta \tag{16}$$

причем суммирование в первом слагаемом следует вести только по тем значениям α , для которых $\text{Re}((\sigma + 1)/\eta_{\alpha}) > 0$.

Коэффициенты A и B определяются из условия скачка

$$\mu(\mathbf{Y}^+ - \mathbf{Y}^-) = \mathbf{S} \text{ при } x = 0$$

Отсюда в силу условий (15) находим

$$A_{\alpha}^{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\sigma, \pm \eta_{\alpha}, \mu) \mathbf{S} \exp(-\mu^2) d\mu, \quad B_{\beta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}_{\beta} \mathbf{S} \exp(-\mu^2) d\mu \tag{17}$$

В рассматриваемом случае

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_h = \frac{2}{5} \left\| \begin{array}{c} \mu^2 - \frac{1}{2} \\ \nu \end{array} \right\|$$

Соответственно

$$A_\alpha^\pm = \frac{a_\alpha^h}{N_\alpha}, \quad B_1 = \frac{\sigma+1}{N_0}(N_{11}b_1^h - N_{12}b_2^h), \quad B_2 = \frac{\sigma+1}{N_0}(N_{22}b_2^h - N_{12}b_1^h)$$

$$a_\alpha^h = \frac{2\eta_\alpha^2\sigma^2}{5\sigma+1} - \frac{\sigma+1}{5}, \quad b_1^h = 1, \quad b_2^h = 0$$

$$\mathbf{Y}_h^\pm(\sigma, x, \mu) = \pm \sum_\alpha \frac{a_\alpha^h}{N_\alpha} \mathbf{F}_\alpha(\sigma, \pm\eta_\alpha, \mu) \exp(\mp(\sigma+1)x/\eta_\alpha) +$$

$$+ \int_0^{\pm\infty} \frac{\sigma+1}{N_0} \mathbf{X}_1 \exp(-(\sigma+1)x/\eta) d\eta$$

Для относительных перепадов температуры

$$\Delta T = \frac{T-T_0}{T_0} = \frac{4}{5}\pi^{-3/2} \int (C^2 + \gamma^2 - \frac{5}{2}) \varphi \exp(-C^2 - \gamma^2) \gamma d\gamma d^3C$$

и концентрации молекул газа

$$\Delta N = \frac{n-n_0}{n_0} = 2\pi^{-3/2} \int \varphi \exp(-C^2 - \gamma^2) \gamma d\gamma d^3C$$

имеем

$$\Delta T_h = \pi^{-1/2} \exp(\sigma t) \left(\pm \sum_\alpha \frac{(a_\alpha^h)^2}{N_\alpha} \exp(\mp(\sigma+1)x/\eta_\alpha) + \right.$$

$$\left. + (\sigma+1)^2 \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{11}}{N_0} \exp(-(\sigma+1)x/\eta) d\eta \right)$$

$$\Delta N_h = \pi^{-1/2} \exp(\sigma t) \left(\pm \sum_\alpha \frac{a_\alpha^h a_\alpha^p}{N_\alpha} \exp(\mp(\sigma+1)x/\eta_\alpha) - \right.$$

$$\left. - (\sigma+1)^2 \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{12}}{N_0} \exp(-(\sigma+1)x/\eta) d\eta \right)$$

В случае раздельного возбуждения поступательных и вращательных степеней свободы

$$S_\nu = \frac{2}{3}C^2 - 1 \quad \text{и} \quad S_\omega = \gamma^2 - 1$$

векторы \mathbf{F} и \mathbf{X}_β следует представить в развернутой форме

$$\mathbf{F} = e_1 F_1 + e_2 F_2, \quad \mathbf{X}_\beta = e_1 X_{1\beta} + e_2 X_{2\beta}$$

(18)

При этом выполняются следующие соотношения:

$$A_{\alpha}^{\pm} = \frac{2}{\pi} \int (e_1 F_1(\sigma, \pm \eta_{\alpha}, \mu) + e_2 F_2(\sigma, \pm \eta_{\alpha}, \mu)) S \exp(-C^2 - \gamma^2) \gamma d\gamma d^3 C$$

$$B_{\beta} = \frac{2}{\pi} \int (e_1 X_{1\beta} + e_2 X_{2\beta}) S \exp(-C^2 - \gamma^2) \gamma d\gamma d^3 C$$

Определенный интерес представляет вычисление относительного перепада температуры, соответствующей средней энергии поступательного и вращательного движения молекул:

$$\Delta T^v = \frac{4}{3} \pi^{-3/2} \int \left(C^2 - \frac{3}{2}\right) \varphi \exp(-C^2 - \gamma^2) \gamma d\gamma d^3 C$$

$$\Delta T^{\omega} = 2 \pi^{-3/2} \int (\gamma^2 - 1) \varphi \exp(-C^2 - \gamma^2) \gamma d\gamma d^3 C$$

Для полноты картины следует рассмотреть

$$S_p = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

что соответствует источнику частиц.

Значения макроскопических параметров газа в указанных случаях определяются соотношением

$$M_s^m(t, \sigma, x) = \pm \pi^{-1/2} \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha}^s a_{\alpha}^m}{N_{\alpha}} \exp(\sigma t \mp (\sigma + 1)x/\eta_{\alpha}) + \pi^{-1/2} (\sigma + 1)^2 \int_0^{\pm\infty} \frac{N_{11} b_1^s b_1^m + N_{22} b_2^s b_2^m - N_{12} (b_1^s b_2^m + b_2^s b_1^m)}{N_0} \exp(\sigma t - (\sigma + 1)x/\eta) d\eta \quad (19)$$

Здесь и далее индекс s указывает характер источника: $s = 1 - S_h, 2 - S_v, 3 - S_{\omega}, 4 - S_p$; значения $m = 1, 2, 3, 4$ соответствуют $\Delta T, \Delta T^v, \Delta T^{\omega}, \Delta N$. Тогда имеем

$$b_1^2 = \frac{5}{6}, \quad b_1^3 = \frac{5}{4}, \quad b_1^4 = 0$$

$$b_2^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\eta\sigma}{\sigma+1}\right)^2 - \frac{1}{6}, \quad b_2^3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta\sigma}{\sigma+1}\right)^2, \quad b_2^4 = 1$$

$$a_{\alpha}^2 = \frac{10(\sigma+1) + \lambda_c(\eta_{\alpha})}{30} \left(2 \left(\frac{\eta_{\alpha}\sigma}{\sigma+1}\right)^2 - 1\right)$$

$$a_{\alpha}^3 = \frac{\lambda_c(\eta_{\alpha})}{20} \left(1 - 2 \left(\frac{\eta_{\alpha}\sigma}{\sigma+1}\right)^2\right), \quad a_{\alpha}^4 = \sigma + 1 + \frac{4}{5} \lambda_c(\eta_{\alpha})$$

Коэффициенты a_{α}^1, b_1^1 и b_2^1 определяются соотношениями (18).

Попутно необходимо обратить внимание на симметрию перечисленных моментов от функции распределения относительно перестановки верхнего и нижнего индексов, т.е. $M_s^m = M_m^s$.

Очевидно, что плоский источник можно рассматривать как систему изотропных точечных источников. Следовательно, в рассматриваемом (линейном) приближении распределение любой скалярной величины ρ_{pt} можно выразить через распределение этой величины, создаваемой точечным источником ρ_{pt} , т.е.

$$\rho_{pt}(x) = \int \rho_{pt}(r) d\Sigma = 2\pi \int_x^\infty r \rho_{pt}(r) dr$$

где r – расстояние от элемента поверхности $d\Sigma$ до рассматриваемой точки пространства. Отсюда следует, что

$$\rho_{pt}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\rho_{pt}(r)}{dr}$$

Таким образом, для точечного изотропного источника

$$M_s^m(t, \sigma, r) = \frac{\sigma + 1}{2\pi^{3/2} r} \sum_{\alpha} \frac{a_{\alpha}^s a_{\alpha}^m}{\eta_{\alpha} N_{\alpha}} \exp(\sigma t - (\sigma + 1)r/\eta_{\alpha}) + \frac{(\sigma + 1)^3}{2\pi^{3/2} r} \int_0^{+\infty} \frac{N_{11} b_1^s b_1^m + N_{22} b_2^s b_2^m - N_{12} (b_1^s b_2^m + b_2^s b_1^m)}{\eta N_0} \exp(\sigma t - (\sigma + 1)r/\eta) d\eta \quad (20)$$

В случае произвольной зависимости мощности источника от времени ее можно представить в виде интеграла Фурье

$$W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\omega} \exp(i\omega t) d\omega, \quad W_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) \exp(-i\omega t) dt$$

и в силу линейности задачи рассматривать распределение макроскопических параметров газа как суперпозицию соответствующих величин, создаваемых отдельными гармониками:

$$M_s^m(t, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_{\omega} M_s^m(t, i\omega, r) \exp(i\omega t) dt$$

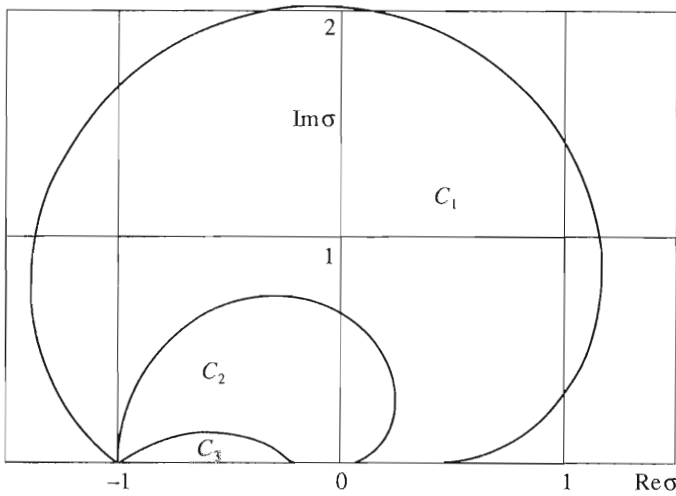
Перейдем к анализу полученного решения.

На фигуре изображены области C_1 , C_2 и C_3 изменения параметра σ , в которых дисперсионное уравнение имеет соответственно два, четыре и шесть корней. Для отрицательного полупространства $\text{Im} \sigma$ картина имеет симметричный относительно действительной оси вид. Численный анализ показывает, что при стремлении σ изнутри к границе указанных областей мнимая часть одной из пар корней стремится к нулю, и соответствующие им решения переходят в решения непрерывного спектра, при этом общее решение, т.е. сумма решений непрерывного и дискретного спектров, остается непрерывной функцией σ .

В непосредственной близости от источника ($r \ll |\sigma + 1|$) основной вклад в выражения (20) дают решения непрерывного спектра. При этом величина интегралов определяется малыми значениями η , для которых

$$\lambda_p = 0, \quad N_{11} = \frac{9}{8}(\sigma + 1)^2, \quad N_{12} = \frac{5}{8}(\sigma + 1)^2, \quad N_{22} = \frac{25}{8}(\sigma + 1)^2$$

$$N_0 = \frac{25}{8}(\sigma + 1)^4 \eta, \quad \int_0^{\infty} \exp(-(\sigma + 1)r/\eta) \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{1}{r(\sigma + 1)}$$



Соответственно

$$\Delta T_h = \frac{9}{50\pi^{3/2} r^2}, \quad \Delta T_h^\omega = \Delta T_\omega = \frac{1}{5\pi^{3/2} r^2}, \quad \Delta N_h = \Delta T_p = -\frac{1}{10\pi^{3/2} r^2}$$

$$\Delta T_v = \Delta T_v^v = \Delta T_h^v = \Delta T_v^\omega = \Delta T_\omega^v = -\Delta N_v = -\Delta T_p^v = \frac{1}{6\pi^{3/2} r^2}$$

Таким образом, распределение большинства из перечисленных моментов вблизи источника не зависит от σ и определяется только его мгновенной мощностью. Исключение составляют $\Delta T_p^\omega = \Delta N_\omega$, значения которых в рассматриваемом пределе задаются следующими членами в разложении по η , дающими вклад в распределение указанных моментов пропорциональный $1/r$.

С удалением от источника второе слагаемое в выражении (20) затухает быстрее первого. Поэтому в пределе $r \rightarrow \infty$ распределение M_s^m определяется решениями дискретного спектра (если таковые существуют).

Особый интерес представляет анализ поведения решения в случае малых значений σ . Подставляя в уравнение (9) очевидное асимптотическое представление

$$\lambda_c(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n z^{2n}}$$

с точностью до первых неисчезающих по z слагаемых, получим

$$\frac{7}{20\eta^4} - \frac{7\sigma}{10\eta^2} + \sigma^3 = 0$$

Отсюда находим

$$\eta_{\pm 1} = \pm\sqrt{7/10}\sigma^{-1}, \quad \eta_{\pm 2} = \pm(2\sigma)^{-1/2}$$

Соответственно

$$N_{\pm 1} \sqrt{\pi} \eta_{\pm 1} = \frac{49}{625\sigma}, \quad N_{\pm 2} \sqrt{\pi} \eta_{\pm 2} = \frac{7}{50}$$

$$a_{\pm 1}^1 = \frac{2}{25}, \quad a_{\pm 2}^1 = -a_{\pm 11}^4 = -a_{\pm 2}^4 = -\frac{1}{5}$$

$$a_{\pm 1}^2 = \frac{3}{25}, \quad a_{\pm 2}^2 = -\frac{3}{10}, \quad a_{\pm 1}^3 = \frac{1}{50}, \quad a_{\pm 2}^3 = -\frac{1}{20}$$

Таким образом, в пределе $\sigma \rightarrow 0$

$$\Delta T_h = \Delta T_h^{as} + I_{11}$$

$$\Delta T_h^v = \Delta T_v = \Delta T_h^{as} + \frac{5I_{11} + I_{12}}{6}, \quad \Delta T_h^\omega = \Delta T_\omega = \Delta T_h^{as} + \frac{5I_{11} - I_{12}}{4}$$

$$\Delta T_v^v = \Delta T_h^{as} + \frac{25I_{11} + 10I_{12} + I_{22}}{36}, \quad \Delta T_v^\omega = \Delta T_\omega^v = \Delta T_h^{as} + \frac{25I_{11} - I_{12}}{24}$$

$$\Delta T_\omega^\omega = \Delta T_h^{as} + \frac{25I_{11} - 10I_{12} + I_{22}}{16}$$

$$\Delta T_p = \Delta T_p^{as} - I_{12}, \quad \Delta T_p^v = \Delta T_p^{as} - \frac{5I_{12} + I_{22}}{6}, \quad \Delta T_p^\omega = \Delta T_p^{as} - \frac{5I_{12} - I_{22}}{4}$$

$$\Delta N_h = \Delta N_h^{as} - I_{12}$$

$$\Delta N_v = \Delta N_h^{as} - \frac{5I_{12} + I_{22}}{6}, \quad \Delta N_p = \Delta N_p^{as} + I_{22}, \quad \Delta N_\omega = \Delta N_h^{as} - \frac{5I_{12} - I_{22}}{4}$$

$$I_{ij} = \frac{1}{2\pi^{3/2} r} \int_0^\infty \frac{N_{ij}}{\eta N_0} \exp(-r/\eta) d\eta$$

что соответствует решению стационарной задачи. При этом функции

$$\Delta T_h^{as} = -\Delta N_h^{as} = 1/(7\pi r)$$

описывают распределение температуры и концентрации молекул газа, создаваемое стационарным точечным источником тепла на достаточно большом расстоянии от него, и не зависят от способа возбуждения энергии; функции

$$\Delta N_p^{as} = -\Delta T_p^{as} = 1/(7\pi r)$$

описывают асимптотическое распределение температуры и концентрации молекул газа, создаваемое стационарным источником частиц.

Полученные результаты могут быть использованы для теоретического анализа особенностей тепло- и массопереноса в разреженных газах, в частности, при изучении тепловых эффектов взаимодействия лазерного излучения с веществом, что особенно важно для исследования явления тепловой само- и дефокусировки луча лазера в поглощающей среде и наиболее актуально в случае, когда характерное время выделения тепла сравнимо с временем свободного пробега молекул газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 335 с.
2. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение задачи о скачке температуры в газе вращательными степенями свободы // Теорет. и мат. физика. 1993. Т. 95. № 3. С. 530–540.
3. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Скачок температуры и слабое испарение в молекулярных газах // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. № 3. С. 956–971.
4. *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А.* Скольжение двухатомного газа вдоль плоской поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 5. С. 182–189.
5. *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* О скачке температуры на границе двухатомного газа и плоской поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 4. С. 163–170.
6. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое вычисление параметров молекулярного газа на поверхности в задаче Смолуховского // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 3. С. 91–100.
7. *Case K.M., Zweifel P.F.* Linear Transport Theory. Palo Alto, etc.: Addison–Wesley Publ. Co., 1967 = Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 381 с.
8. *Латышев А.В.* Аналитическое решение эллипсоидально-статистического модельного уравнения Больмана // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 2. С. 151–164.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Орел, Москва
e-mail: yushkanov@mtu-net.ru

Поступила в редакцию
11.II.2003