

УДК 533.6.12

© 2005 г. В. И. Жук

КНОИДАЛЬНАЯ ВОЛНА В ПЛОСКОЙ ПРИСТЕНОЧНОЙ СТРУЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Показано, что ситуация неклассического пограничного слоя с самоиндуцированным давлением реализуется в примыкающей к плоской твердой поверхности подобласти тангенциального струйного потока, где локализована зона возмущенного нелинейного движения. А именно, установлено существование класса возмущений сравнительно большой амплитуды, когда течение данного типа приобретает многоярусную структуру. Изложены предположения, при которых для конечных амплитуд пульсаций эволюция волновых полей подчиняется уравнению Кортевега–де Вриза. Рассмотрено нелинейное осциллирующее решение уравнения Кортевега–де Вриза в виде кноидальной волны, которое дает пример периодического критического слоя, прилегающего к обтекаемой стенке. Упомянутый критический слой в сделанных предположениях распадается на основную нелинейную невязкую часть и тонкий пристеночный вязкий подслои. Сформулирован следующий результат: условие существования периодического решения в вязком подслое сужает множество допустимых значений параметров кноидальных волн.

1. Введение. Стационарное двумерное течение в ламинарной струе несжимаемой вязкой жидкости, ограниченной снизу плоским экраном, имеет профиль тангенциальной составляющей скорости $u^* = u_\infty^* U_0(\tilde{x}, Y_m)$, изображенный на фигуре. Здесь и далее звездочками помечены размерные величины, в качестве постоянной u_∞^* , задающей масштаб скорости, может быть выбрана, например, максимальная скорость в каком-нибудь фиксированном сечении струи $x^* = L_\infty^*$. Будут рассматриваться области $x^* = L_\infty^* (1 + \tilde{x})$, протяженность которых $L_\infty^* \tilde{x}$, $\tilde{x} \ll 1$, существенно меньше, чем характерная длина L_∞^* потока по совмещенной с твердой стенкой оси x^* декартовой системы $\{x^*, y^*\}$. Именно поэтому функция U_0 в дальнейшем считается зависящей только от одной пространственной координаты по нормали к стенке Y_m .

Для пояснения сказанного введем число Рейнольдса $Re = \rho_\infty^* u_\infty^* L_\infty^* / \mu_\infty^*$, где ρ_∞^* и μ_∞^* – плотность и коэффициент вязкости жидкости, и будем считать $Re \rightarrow \infty$. Тогда предположение о том, что стационарное течение формируется силами вязкости, влечет за собой оценку $Re^{-1/2} L_\infty^*$ характерного размера струи по поперечной координате y^* (как следствие баланса инерционных и вязких членов в уравнениях Навье–Стокса). Упомянутая оценка означает, что (быстрая) переменная $Y_m = Re^{1/2} L_\infty^{*-1} y^*$ порядка единицы в основной толще струи. Производные функции U_0 по пространственным координатам $\tilde{x} = (x^* - L_\infty^*) L_\infty^{*-1}$, $\tilde{y} = y^* L_\infty^{*-1}$ имеют различный порядок:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \tilde{x}} = O(1), \quad \frac{\partial U_0}{\partial \tilde{y}} = Re^{1/2} \frac{\partial U_0}{\partial Y_m} = O(Re^{1/2})$$

Уравнение неразрывности при учете последних формул для производных устанавливает величину $v^* u_\infty^{*-1} = O(\text{Re}^{-1/2})$ вертикальной компоненты v^* скорости стационарного движения жидкости в струе.

Приведенная выше оценка для v^* , а также для производных скорости U_0 иллюстрирует то обстоятельство, что линии тока в струе почти параллельны плоской стенке и, следовательно, зависимость функции U_0 от продольной переменной \tilde{x} проявляется лишь на расстояниях, сравнимых с масштабом длины L_∞^* , и несущественна в областях протяженностью порядка толщины струи $\text{Re}^{-1/2} L_\infty^*$, $\text{Re} \rightarrow \infty$. В этом смысле рассматриваемое струйное течение аналогично течению в пограничном слое с той лишь разницей, что скорость обращается в нуль не только на стенке, но и на внешнем крае струи:

$$U_0 \rightarrow 0, \quad Y_m \rightarrow 0; \quad U_0 = \lambda_1 Y_m + \frac{1}{2} \lambda_2 Y_m^2 + \dots, \quad Y_m \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

Вводя, помимо указанных выше переменных \tilde{x} , \tilde{y} , также время $\tilde{t} = L_\infty^{*-1} u_\infty^* t^*$, компоненты $\tilde{u} = u^* u_\infty^{*-1}$, $\tilde{v} = v^* u_\infty^{*-1}$ вектора скорости $\tilde{\mathbf{v}} = \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ и избыточное давление $\tilde{p} = (p^* - p_\infty^*) \rho_\infty^{*-1} u_\infty^{*-2}$, где p_∞^* – давление на верхнем крае струи, запишем уравнения Навье–Стокса в безразмерной форме

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{v}} = -\nabla \tilde{p} + \text{Re}^{-1} \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}}, \quad (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right\} \quad (1.2)$$

Решение системы уравнений (1.2) при $\text{Re} \rightarrow \infty$ будем искать как сумму основного стационарного решения вида (1.1) и возмущения, внесенного в поток тем или иным способом. Пусть $\tilde{\lambda}$ – характерная длина волны возмущения (по оси \tilde{x}), а амплитуда возмущения продольной компоненты скорости \tilde{u} порядка $\alpha \ll 1$.

Поскольку основная часть струи имеет толщину порядка $\text{Re}^{-1/2}$, из уравнения неразрывности следует оценка вертикальной компоненты скорости

$$\tilde{v} = O(\text{Re}^{-1/2} \alpha \tilde{\lambda}^{-1}) \quad (1.3)$$

а из проекции уравнения движения (1.2) на ось \tilde{y} с учетом этой оценки выводим оценку возмущения давления

$$\tilde{p} = O(\text{Re}^{-1} \alpha \tilde{\lambda}^{-2}) \quad (1.4)$$

В нелинейной области вблизи обтекаемой поверхности, где в силу условия при $Y_m \rightarrow 0$ в соотношениях (1.1) основная скорость U_0 имеет порядок своего возмущения, проекция уравнения движения на ось \tilde{x} дает

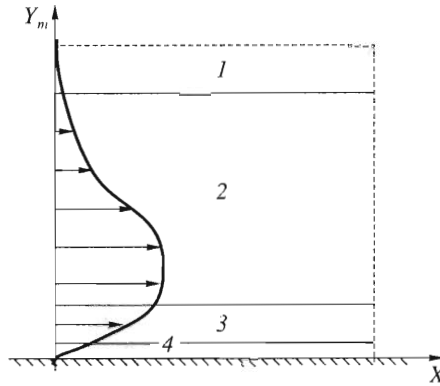
$$\tilde{p} = O(\alpha^2) \quad (1.5)$$

Сравнивая оценки (1.4) и (1.5), получим оценку длины волны возмущения

$$\tilde{\lambda} = O(\text{Re}^{-1/2} \alpha^{-1/2}) \quad (1.6)$$

а из уравнений движения следует величина характерного времени

$$\tilde{t} = O(\text{Re}^{-1/2} \alpha^{-3/2}) \quad (1.7)$$



Если независимые параметры Re и α подчиняются условию

$$\alpha Re \gg 1$$

то в силу оценки (1.6) определяющая продольный масштаб возмущений характерная длина

$$\lambda \ll 1 \quad (1.8)$$

Условие (1.8) всюду ниже будет выполнено, что позволяет, как отмечено ранее, не учитывать в областях протяженностью порядка λ зависимость функции U_0 от переменной \bar{x} . В соответствии с этим полагаем $U_0 = U_0(Y_m)$, а оценки (1.3)–(1.8), фиксирующие класс рассматриваемых возмущений, будем использовать в качестве направляющих соображений для разложения решения уравнений Навье–Стокса в формальные асимптотические последовательности.

Указанные асимптотические оценки пространственно-временных и амплитудных параметров возмущений характерны для так называемой области свободного взаимодействия [1–5]. В применении к пристеночным струям, а также к течениям с аналогичными профилями продольной компоненты скорости была развита [6–9] концепция свободного взаимодействия. При этом асимптотическое описание основывалось на выделении внутри струи двух расположенных друг над другом слоев (ярусов, или палуб), а также слабо возмущенной области, непосредственно примыкающей к струе сверху (область 1 на фигуре). Было предложено [10] обобщение такой трехъярусной модели на нестационарные движения. Трехъярусная структура возникает не для произвольных $\alpha \rightarrow 0$ и $Re \rightarrow \infty$, а связанных вполне определенным порядковым соотношением [6–10]

$$\alpha = Re^{-1/7} \quad (1.9)$$

Ниже рассматривается случай, когда амплитудный параметр α , оставаясь малым, превышает по порядку величины оценку из правой части соотношения (1.9). Увеличение амплитудного параметра ведет к изменению структуры области взаимодействия, а именно к разделению нижнего нелинейного пристеночного подслоя (в упомянутой трехъярусной модели) на вязкую и невязкую части, а картина поля течения, таким образом, становится четырехъярусной. Механизм эволюции возмущений, как будет видно из дальнейшего, в этом случае описывается невязкими уравнениями, которые интегрируются независимо от уравнений для вязкого пристеночного подслоя. Однако существование регулярного (во всех конечных точках) решения в вязком подслое фактически служит внутренним критерием реализации данной, модифицированной по сравнению с имеющейся в литературе [6–10] схемы возмущенного течения.

2. Четырехъярусная асимптотическая структура возмущенного поля скоростей.
 В соответствии с оценками (1.6), (1.7) введем новые независимые переменные

$$T = \text{Re}^{1/2} \alpha^{3/2} \tilde{t}, \quad X = \text{Re}^{1/2} \alpha^{1/2} \tilde{x}, \quad Y_m = \text{Re}^{1/2} \tilde{y} \quad (2.1)$$

и в основной толще струи, т.е. в области 2 на фигуре, где $[T, X, Y_m] = O(1)$, представим решение уравнений Навье–Стокса в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= U_0(Y_m) + \alpha u_{1m}(T, X, Y_m) + \alpha^2 u_{2m}(T, X, Y_m) + \dots \\ \tilde{v} &= \alpha^{3/2} v_{1m}(T, X, Y_m) + \alpha^{5/2} v_{2m}(T, X, Y_m) + \dots \\ \tilde{p} &= \alpha^2 p_{1m}(T, X, Y_m) + \alpha^3 p_{2m}(T, X, Y_m) + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Внесем разложения (2.2) в уравнения (1.2) и сохраним в них главные члены, тогда в качестве системы уравнений первого приближения имеем

$$U_0 \frac{\partial u_{1m}}{\partial X} + v_{1m} \frac{dU_0}{dY_m} = 0, \quad U_0 \frac{\partial v_{1m}}{\partial X} = -\frac{\partial p_{1m}}{\partial Y_m}, \quad \frac{\partial u_{1m}}{\partial X} + \frac{\partial v_{1m}}{\partial Y_m} = 0 \quad (2.3)$$

Решение системы (2.3) определяется с точностью до произвольной функции $A_1 = A_1(T, X)$ следующим образом:

$$u_{1m} = A_1(T, X) \frac{dU_0}{dY_m}, \quad v_{1m} = -\frac{\partial A_1}{\partial X} U_0(Y_m), \quad p_{1m} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} \int_{+\infty}^{Y_m} U_0^2(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

Выражения (2.4) получены с учетом условия $p_{1m} \rightarrow 0$ на внешней границе ($Y_m \rightarrow +\infty$) области 2. Произвольная функция должна удовлетворять условию $A_1(T, X) \rightarrow 0$ при $X \rightarrow -\infty$, обеспечивающему затухание возмущений $[u_{1m}, v_{1m}, p_{1m}] \rightarrow 0$ на бесконечности вверх по потоку от рассматриваемой области. Смысл решения (2.4) состоит в том, что угловой коэффициент $\partial \tilde{y}(\tilde{t}, \tilde{x}) / \partial \tilde{x} = \tilde{v} \tilde{u}^{-1}$ линии тока $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{t}, \tilde{x})$ возмущенного струйного течения в области 2, согласно разложениям (2.2), с точностью $O(\alpha^{5/2})$ равен $\alpha^{3/2} v_{1m} U_0^{-1} = -\alpha^{3/2} \partial A_1 / \partial X$. Интегрирование соотношения

$$\frac{\partial \tilde{y}(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \alpha^{1/2} \frac{\partial Y_m(T, X)}{\partial X} = \frac{\tilde{v}}{\tilde{u}}$$

дает уравнение линии тока

$$Y_m = Y_{-\infty} - \alpha A_1(T, X)$$

Постоянная интегрирования $Y_{-\infty}$ фиксирует линию тока, задавая ее положение при $X \rightarrow -\infty, A_1(T, X) \rightarrow 0$. Действительно, параметр $Y_{-\infty}$ устанавливает асимптоту линии тока в невозмущенном течении при $X \rightarrow -\infty$, где вектор скорости коллинеарен стенке: $\tilde{u} = U_0(Y_m), \tilde{v} = 0$. Таким образом, функция $A_1(T, X)$ представляет собой величину мгновенного смещения линий тока в области 2 относительно их невозмущенного положения.

Воспользовавшись вторым соотношением (1.1), запишем предельную форму решения (2.2), (2.4) при $Y_m \rightarrow 0$, т.е. вблизи ограничивающей течение твердой поверхности

$$\tilde{u} = \lambda_1 Y_m + \lambda_1 \alpha A_1 + \dots, \quad \tilde{v} = -\alpha^{3/2} \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} Y_m + \dots, \quad \tilde{p} = -\alpha^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} \int_0^{+\infty} U_0^2(\xi) d\xi + \dots \quad (2.5)$$

Первые два члена асимптотического представления (2.5) для \tilde{y} становятся одного порядка малости, если $Y_m = O(\alpha)$. Последняя оценка задает толщину того расположенного в донной части области 2 нелинейного подслоя, где возмущение скорости порядка самой скорости. Назовем этот подслоем областью 3 (фигура). Масштабы времени и продольной координаты одинаковы в областях 2 и 3, а новая поперечная координата

$$Y_a = \alpha^{-1} Y_m \quad (2.6)$$

в области 3 имеет порядок единицы. Формулы (2.5) показывают, что вместо представления (2.2) решение в нелинейной области 3 следует искать в виде

$$\tilde{u} = \alpha u_{1a}(T, X, Y_a) + \dots, \quad \tilde{v} = \alpha^{5/2} v_{1a}(T, X, Y_a) + \dots, \quad \tilde{p} = \alpha^2 p_{1a}(T, X, Y_a) + \dots \quad (2.7)$$

В результате подстановки в систему уравнений Навье–Стокса (1.2) выражений (2.7) находим для функций первого приближения

$$\frac{\partial u_{1a}}{\partial T} + u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial X} + v_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial Y_a} = -\frac{\partial p_{1a}}{\partial X} + \alpha^{-7/2} \text{Re}^{-1/2} \frac{\partial^2 u_{1a}}{\partial Y_a^2}, \quad \frac{\partial p_{1a}}{\partial Y_a} = 0, \quad \frac{\partial u_{1a}}{\partial X} + \frac{\partial v_{1a}}{\partial Y_a} = 0 \quad (2.8)$$

В первом уравнении системы (2.8) вязкие и инерционные члены одного порядка, если малый параметр α (амплитуда возмущений продольной скорости) и число Рейнольдса Re связаны соотношением (1.9); этот случай изучался ранее [6–10]. В дальнейшем анализе остановимся на случае

$$\text{Re}^{-1/7} \ll \alpha \ll 1 \quad (2.9)$$

Условия (2.9) влекут за собой более сложную по сравнению с известной [6–10] структуру потока. Прежде всего следует отметить, что коэффициент $\alpha^{-7/2} \text{Re}^{-1/2}$ при старшей производной в первом уравнении из (2.8) становится малым параметром. Следовательно, в предположении (2.9) область 3 описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u_{1a}}{\partial T} + u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial X} + v_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial Y_a} = -\frac{\partial p_{1a}}{\partial X}, \quad \frac{\partial p_{1a}}{\partial Y_a} = 0, \quad \frac{\partial u_{1a}}{\partial X} + \frac{\partial v_{1a}}{\partial Y_a} = 0 \quad (2.10)$$

Асимптотическими краевыми условиями для уравнений (2.10) на верхней границе области 3 ($Y_a \rightarrow +\infty$) служат условия сращивания с решением (2.2) на нижней границе области 2 ($Y_m \rightarrow 0$), т.е. предельные выражения (2.5). Переписав последние в переменной Y_a (2.6), получим требуемую асимптотику решения системы уравнений (2.10)

$$Y_a \rightarrow +\infty: u_{1a} \rightarrow \lambda_1(Y_a + A_1), \quad v_{1a} \rightarrow -\lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} Y_a \quad (2.11)$$

причем для давления сращивание с разложениями (2.5) дает

$$p_{1a} = -\Delta \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2}, \quad \Delta = \int_0^{+\infty} U_0^2(\xi) d\xi \quad (2.12)$$

Можно убедиться, что функции

$$u_{1a} = \lambda_1(Y_a + A_1), \quad v_{1a} = -\lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} Y_a - \frac{\partial A_1}{\partial T} - \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial p_{1a}}{\partial X} \quad (2.13)$$

удовлетворяют как уравнениям (2.10), так и краевым условиям (2.11).

Таким образом, возмущения в области 2 и, при выполнении условия (2.9), в области 3 описываются невязкими уравнениями (2.3) и (2.10); решения этих уравнений выражаются формулами (2.4), (2.13), содержащими произвольную функцию $A_1(T, X)$. Однако первое равенство (2.13) показывает, что на стенке $Y_a = 0$ не удовлетворяется одно из условий прилипания, а именно $u_{1a} = 0$. Это свидетельствует о существовании примыкающего непосредственно к стенке вязкого подслоя (область 4 на фигуре), толщина которого существенно меньше толщины области 3.

Член со второй производной в правой части первого уравнения системы (2.8) становится порядка единицы на расстояниях $Y_a = O(\alpha^{-7/4} \text{Re}^{-1/4})$ от твердой стенки. Указанная оценка, определяя толщину вязкого подслоя, диктует необходимость введения новой вертикальной координаты

$$Y_l = \alpha^{7/4} \text{Re}^{1/4} Y_a \tag{2.14}$$

Вязкая область 4 характеризуется условием $Y_l = O(1)$, а параметры течения в ней представляются в виде

$$\tilde{u} = \alpha u_{1l}(T, X, Y_l) + \dots, \quad \tilde{v} = \alpha^{3/4} \text{Re}^{-1/4} v_{1l}(T, X, Y_l) + \dots, \quad \tilde{p} = \alpha^2 p_{1l}(T, X, Y_l) + \dots \tag{2.15}$$

Внося выражения (2.15) в уравнения Навье–Стокса (1.2) и удерживая члены основного порядка, приходим к уравнениям Прандтля

$$\frac{\partial u_{1l}}{\partial T} + u_{1l} \frac{\partial u_{1l}}{\partial X} + v_{1l} \frac{\partial u_{1l}}{\partial Y_l} = -\frac{\partial p_{1l}}{\partial X} + \frac{\partial^2 u_{1l}}{\partial Y_l^2}, \quad \frac{\partial p_{1l}}{\partial Y_l} = 0, \quad \frac{\partial u_{1l}}{\partial X} + \frac{\partial v_{1l}}{\partial Y_l} = 0 \tag{2.16}$$

Нижней границей области 4 служит твердая поверхность, на которой краевые условия очевидны:

$$Y_l = 0: u_{1l} = v_{1l} = 0 \tag{2.17}$$

Предельное условие при приближении изнутри к верхней границе $Y_l \rightarrow +\infty$ области 4 следует как результат сращивания с решением (2.13) при приближении к названной границе извне из области 3, что ввиду соотношений (2.9), (2.14) соответствует. Полагая в равенствах (2.13) $Y_a \rightarrow 0$, получим

$$Y_l \rightarrow +\infty: u_{1l} \rightarrow \lambda_1 A_1(T, X) \tag{2.18}$$

Второе уравнение системы (2.16) позволяет срастить давление: $p_{1l}(T, X) = p_{1a}(T, X)$. Учитывая выражение (2.12), следует принять

$$p_{1l}(T, X) = -\Delta \frac{\partial^2 A_1(T, X)}{\partial X^2} \tag{2.19}$$

Покажем, что задача построения поля течения в областях 2 и 3 может быть решена независимо от задачи интегрирования уравнений (2.16) в области 4. С этой целью обратимся к сращиванию компонент скорости v_{1a} и v_{1l} . Как видно из представлений (2.15), при $Y_a \rightarrow 0$ функция \tilde{v} должна являться величиной $O(\alpha^{3/4} \text{Re}^{-1/4})$; сравнение с разложением (2.7) дает

$$Y_a \rightarrow 0: v_{1a} = O(\alpha^{-7/4} \text{Re}^{-1/4}) \tag{2.20}$$

В силу неравенства (2.9) условие сращивания (2.20) с точностью до малого параметра $\alpha^{-7/4} \text{Re}^{-1/4}$ эквивалентно условию непротекания: $v_{1a} = 0$ при $Y_a = 0$. Но выпол-

нение последнего возможно лишь в случае, когда функция $A_1(T, X)$ удовлетворяет уравнению Кортевега–де Вриза (КдВ)

$$\frac{\partial A_1}{\partial T} + \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} = \frac{\Delta}{\lambda_1} \frac{\partial^3 A_1}{\partial X^3} \quad (2.21)$$

Данное утверждение следует из выражений (2.13) для v_{1a} и (2.12) для p_{1a} . Если функция $A_1(T, X)$ найдена из уравнения (2.21), то поле возмущенного потока в областях 2 и 3 строится по формулам (2.4) и (2.12), (2.13) соответственно.

Таким образом, при формировании невязкого течения в областях 2 и 3 вязкая пристеночная область 4 играет пассивную роль. Поле скоростей в ней определяется из решения классической задачи (2.16)–(2.18) для системы уравнений Прандтля с заданным градиентом давления (поскольку в соотношениях (2.18), (2.19) функция $A_1(T, X)$ известна).

3. Нелинейные возмущения в виде кноидальных волн. Предположим выполненным условие (2.9), при котором реализуется четырехъярусная структура возмущенного поля скоростей, а функция смещения линий тока $A_1(T, X)$ из соотношений (2.4), (2.12), (2.13) удовлетворяет уравнению КдВ (2.21).

Исключим постоянные Δ и λ_1 из последующих формул, перейдя к новым переменным

$$\begin{aligned} t &= \Delta^{-2/7} \lambda_1^{8/7} T, & x &= \Delta^{-3/7} \lambda_1^{5/7} X, & y_a &= \Delta^{-1/7} \lambda_1^{4/7} Y_a \\ u &= \Delta^{-1/7} \lambda_1^{-3/7} u_{1a}, & v &= \Delta^{1/7} \lambda_1^{-4/7} v_{1a}, & p &= \Delta^{-2/7} \lambda_1^{-6/7} p_{1a}, & A &= \Delta^{-1/7} \lambda_1^{4/7} A_1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

В переменных (3.1) имеем

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \quad (3.2)$$

Полагая в уравнении КдВ (3.2)

$$A(x, t) = \Phi_0(\xi_0), \quad \xi_0 = x - c_0 t \quad (3.3)$$

получим после однократного интегрирования (постоянная интегрирования выбрана равной нулю, что дает возможность искать затухающие на бесконечности решения: $\Phi_0 \rightarrow 0, |\xi_0| \rightarrow \infty$)

$$\frac{d^2 \Phi_0}{d\xi_0^2} = -c_0 \Phi_0 + \frac{\Phi_0^2}{2} \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований

$$\Phi_0 \rightarrow \gamma_0 \Phi_0, \quad \xi_0 \rightarrow \gamma_0^{-1/2} \xi_0, \quad c_0 \rightarrow \gamma_0 c_0 \quad (3.5)$$

Поэтому выбор параметра $\gamma_0 = |c_0|$ в (3.5) позволяет исключить c_0 из уравнения (3.4) посредством замены

$$\Phi_0 = |c_0| \Phi(\xi), \quad \xi = |c_0|^{1/2} \xi_0 \quad (3.6)$$

причем для неизвестной функции $\Phi(\xi)$ имеем уравнение

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} = -\Phi \operatorname{sign} c_0 + \frac{\Phi^2}{2} \quad (3.7)$$

В дальнейшем полагаем $c_0 < 0$, поскольку изменение знака перед линейным членом в правой части уравнения (3.7) достигается заменой $\Phi = \tilde{\Phi} + 2 \operatorname{sign} c_0$. Вводя, как обычно,

$$\Theta = \frac{d\Phi}{d\xi}, \quad \frac{d^2\Phi}{d\xi^2} = \Theta \frac{d\Theta}{d\Phi}$$

понижаем порядок уравнения (3.7):

$$\Phi^2 + \frac{\Phi^3}{3} = \Theta^2 + K \tag{3.8}$$

Выбор в уравнении (3.8) постоянной $K = 0$ соответствует сепаратрисе на фазовой плоскости $\{\Phi, \Theta\}$ и приводит к уравнению

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \pm \Phi \sqrt{1 + \frac{\Phi}{3}} \tag{3.9}$$

Рассмотрим случай $\Phi < 0$, тогда интегрирование уравнения (3.9) дает солитонное (экспоненциально стремящееся к нулю при $\xi \rightarrow \pm\infty$) решение

$$\Phi = -3 \operatorname{ch}^{-2} \frac{\xi - \xi_{00}}{2} \tag{3.10}$$

Учитывая соотношения (3.3), (3.6), заключаем, что солитон уравнения КдВ определяется выражением, включающим два параметра c_0 и x_0 :

$$A = -3|c_0| \operatorname{ch}^{-2} \left[\frac{|c_0|}{2} (x + |c_0|t - x_0) \right] \tag{3.11}$$

Итак, солитон уравнения КдВ движется влево без изменения своей формы и имеет амплитуду, втрое превышающую модуль его фазовой скорости.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – корни полинома

$$\Phi^3 + 3\Phi^2 - 3K = (\Phi - \beta_1)(\Phi - \beta_2)(\Phi - \beta_3) \tag{3.12}$$

Рассмотренный выше солитон (3.10) изображается фазовой траекторией уравнения (3.8) в виде петли, содержащей две сепаратрисы седловой точки $\Phi = \Theta = 0$ и соответствующей кратному корню полинома (3.12) для $K = 0$: $\beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_3 = -3$, причем $\beta_1 > \Phi > \beta_3$. Стационарную точку для $K = 4/3$ типа центра $\Phi = -2, \Theta = 0$ охватывают замкнутые траектории, отвечающие $\beta_1 > 0 > \beta_2 > \beta_3$ для $4/3 > K > 0$. В этом случае периодические решения уравнения (3.7) описываются эллиптическим интегралом; после введения обозначений

$$\sin^2 \chi = \frac{\beta_2 - \beta_3}{\beta_1 - \beta_3}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{\Phi - \beta_3}{\beta_2 - \beta_3} \tag{3.13}$$

и замены переменной

$$\Phi = \beta_3 + (\beta_2 - \beta_3) \sin^2 \theta$$

имеем

$$\xi - \xi_{00} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\beta_1 - \beta_3}} \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \chi \sin^2 \theta}} \tag{3.14}$$

Пусть постоянная K в уравнении (3.8) такова, что

$$K = 4/3 - \tilde{\epsilon}, \quad \tilde{\epsilon} \rightarrow +0 \quad (3.15)$$

Корни полинома (3.12) удобно искать, переписав его в терминах новой переменной: $\Phi = -2 + \tilde{\Phi}$. Выражение (3.12) обращается в нуль в случае

$$\tilde{\Phi}^3 - 3\tilde{\Phi}^2 + 3\tilde{\epsilon} = 0 \quad (3.16)$$

Видно, что при малых $\tilde{\epsilon}$ наибольший корень уравнения (3.16) располагается вблизи точки $\tilde{\Phi} = 3$, а два других корня лежат в право- и левосторонней окрестностях точки $\tilde{\Phi} = 0$. Более точно, в предположении (3.15) из равенства (3.16) получаем

$$\beta_1 = 1 + \frac{1}{3}\tilde{\epsilon} + O(\tilde{\epsilon}^2), \quad \beta_2 = -2 + \sqrt{\tilde{\epsilon}} + \frac{1}{6}\tilde{\epsilon} + O(\tilde{\epsilon}^{3/2}), \quad \beta_3 = -2 - \sqrt{\tilde{\epsilon}} + \frac{1}{6}\tilde{\epsilon} + O(\tilde{\epsilon}^{3/2}), \quad (3.17)$$

$$\tilde{\epsilon} \rightarrow +0$$

Подставим в уравнения (3.13), (3.14), описывающие замкнутую фазовую траекторию, асимптотику (3.17). Поскольку из первого соотношения (3.13) имеем

$$\sin^2 \chi = \frac{2}{3}\sqrt{\tilde{\epsilon}} + O(\tilde{\epsilon}) \quad (3.18)$$

то равенство (3.14) переписывается в виде

$$\xi - \xi_{00} = \pm 2 \left[\varphi - \frac{1}{12}\sqrt{\tilde{\epsilon}} \sin 2\varphi + O(\tilde{\epsilon}) \right] \quad (3.19)$$

Второе соотношение (3.13) дает

$$\Phi = -2 - \sqrt{\tilde{\epsilon}} + 2\sqrt{\tilde{\epsilon}} \sin^2 \varphi + O(\tilde{\epsilon}) \quad (3.20)$$

Для $\tilde{\epsilon} \rightarrow +0$ зависимость $\xi = \xi(\varphi)$, задаваемую формулой (3.19), можно обратить:

$$\varphi = \pm \left[\frac{1}{2}(\xi - \xi_{00}) + \frac{1}{12}\sqrt{\tilde{\epsilon}} \sin(\xi - \xi_{00}) + O(\tilde{\epsilon}) \right] \quad (3.21)$$

Остается внести выражение (3.21) в правую часть равенства (3.20), чтобы получить явный вид решений (3.14), описываемых замкнутыми фазовыми траекториями в малой окрестности особой точки $\Phi = -2$, $\Theta = 0$ типа центра:

$$\Phi = -2 + \frac{1}{4}\tilde{\epsilon} - \sqrt{\tilde{\epsilon}} \cos(\xi - \xi_{00}) - \frac{1}{12}\tilde{\epsilon} \cos 2(\xi - \xi_{00}) + O(\tilde{\epsilon}^{3/2}) \quad (3.22)$$

Трехпараметрическое семейство решений уравнения КдВ получим из равенства (3.22), воспользовавшись соотношениями (3.3), (3.6) и обозначив (k – волновое число)

$$k = |c_0|^{1/2}, \quad kx_0 = \xi_{00} + \pi, \quad \hbar = k^2 \sqrt{\tilde{\epsilon}} \rightarrow 0$$

Бегущая с отрицательной фазовой скоростью периодическая волна задается выражением

$$A(t, x) = -2k^2 + \frac{\hbar^2}{4k^2} + \hbar \cos[k(x - x_0 + k^2 t)] - \frac{\hbar^2}{12k^2} \cos[2k(x - x_0 + k^2 t)] + O(\hbar^3) \quad (3.23)$$

Уравнение КдВ инвариантно относительно преобразования Галилея (переход в движущуюся со скоростью D_0 в отрицательном направлении оси x систему координат):

$$x \rightarrow x - D_0 t, \quad A \rightarrow D_0 + A \tag{3.24}$$

Групповое свойство (3.24) уравнения КдВ позволяет ввести в выражение (3.23) еще один параметр и избавиться от предположения об отрицательных фазовых скоростях. Полагая в соотношениях (3.24) $D_0 = k^2 + c$, получим четырехпараметрическое семейство волновых решений уравнения КдВ с фазовыми скоростями c любого знака:

$$A(t, x) = c - k^2 + \frac{\hbar^2}{4k^2} + \hbar \cos[k(x - x_0 - ct)] - \frac{\hbar^2}{12k^2} \cos[2k(x - x_0 - ct)] + O(\hbar^3) \tag{3.25}$$

Если $A(t, x)$ – решение уравнения КдВ (3.2), то замена

$$A \rightarrow \vartheta A, \quad t \rightarrow \vartheta^{-3/2} t, \quad x \rightarrow \vartheta^{-1/2} x \tag{3.26}$$

приводит к решению того же уравнения. Поэтому все решения (3.23), (3.25) получаются из стационарного решения уравнения КдВ

$$A = -1 + \frac{\hbar^2}{4} + \hbar \cos x - \frac{\hbar^2}{12} \cos 2x + O(\hbar^3) \tag{3.27}$$

применением групповых преобразований (3.24), (3.26).

Функция $\text{am}(\Omega|\mathbb{N})$, обратная к функции

$$\Omega(\varphi|\mathbb{N}) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \mathbb{N} \sin^2 \theta}}$$

носит название амплитуды Якоби [11], а функция

$$\text{cn}(\Omega|\mathbb{N}) = \cos[\text{am}(\Omega|\mathbb{N})]$$

известна как эллиптический косинус Якоби (кноида). Упомянутые функции [11] позволяют представить неявную зависимость (3.13), (3.14) в виде

$$\Phi = \beta_2 - (\beta_2 - \beta_3) \text{cn}^2 \left\{ \left[\sqrt{\frac{\beta_1 - \beta_3}{12}} (\xi - \xi_{00}) \right] \middle| \mathbb{N} \right\} \tag{3.28}$$

Четвертьпериод $K = K(\mathbb{N})$ функции $\text{cn}(\Omega|\mathbb{N})$ и параметр \mathbb{N} определяются посредством (3.13), (3.14), а именно

$$K(\mathbb{N}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \mathbb{N} \sin^2 \theta}}, \quad \mathbb{N} = \sin^2 \chi = \frac{\beta_2 - \beta_3}{\beta_1 - \beta_3}$$

Периодические нелинейные решения типа (3.28), называемые кноидальными волнами [12.13], в слабонелинейном пределе малых амплитуд $\beta_2 - \beta_3 = O(\sqrt{\tilde{\varepsilon}})$, $\tilde{\varepsilon} \rightarrow +0$ обладают, как показано выше, представлением (3.25).

4. Сужение класса возможных решений при учете вязкого пристеночного подслоя. Класс колебательных решений нелинейной системы уравнений (2.10), определяемый уравнением (3.8) при $0 < K < 4/3$ и в случае малых амплитуд \hbar допускающий

представления (3.25), (3.27), описывает движение в области $Y_a = O(1)$; однако решения из данного класса не удовлетворяют условию отсутствия скольжения $u_a = 0$ на стенке $Y_a = 0$, как видно из первого равенства (2.13). Последнее обстоятельство указывает на уже отмеченное выше присутствие в потоке тонкого подслоя $Y_l = O(1)$ с оценкой толщины (2.14), в котором структура поля скоростей формируется вязкими тангенциальными напряжениями (область 4 на фигуре).

Краевую задачу (2.16)–(2.19) также перепишем в новых переменных (3.1), присоединив к ним величины

$$u_l = \Delta^{-1/7} \lambda_1^{-3/7} u_{1l}, \quad v_l = \Delta^{1/7} \lambda_1^{-4/7} v_{1l}, \quad p_l = \Delta^{-2/7} \lambda_1^{-6/7} p_{1l}, \quad y = \Delta^{-1/7} \lambda_1^{4/7} Y_l$$

Тогда для вязкого пристеночного подслоя имеем

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial y} = -\frac{\partial p_l}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p_l}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial v_l}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$y = 0: u_l = v_l = 0; \quad y \rightarrow +\infty: u_l \rightarrow A(t, x)$$

Вследствие равенства (2.19) давление в соотношениях (4.1) представляет собой заданную функцию

$$p_l(t, x) = -\frac{\partial^2 A(t, x)}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

Решение уравнения КдВ (3.25) примем в качестве внешнего граничного условия для внутренней задачи (4.1), (4.2) в вязком пристеночном подслое. Ниже будет показано, что периодическое решение в вязком подслое существует не при всех c и k в равенстве (3.25), а только в случае выполнения определенного соотношения между ними.

Поскольку уравнения (4.1) также инвариантны относительно преобразования (3.24):

$$x \rightarrow x - D_0 t, \quad A \rightarrow D_0 + A, \quad u_l \rightarrow D_0 + u_l \quad (4.3)$$

перейдем в систему координат, где волна (3.25) стационарная, т.е. положим в соотношениях (3.24), (3.25) $D_0 = -c$. Обратим внимание также на инвариантность задачи (4.1) относительно однопараметрической группы преобразований

$$t \rightarrow \vartheta^{-3/2} t, \quad x \rightarrow \vartheta^{-1/2} x, \quad y \rightarrow \vartheta^{-3/4} y, \quad u_l \rightarrow \vartheta u_l, \quad v_l \rightarrow \vartheta^{3/4} v_l, \quad p_l \rightarrow \vartheta^2 p_l \quad (4.4)$$

Применение этих преобразований подразумевает, что входящая в соотношения (4.1), (4.2) граничная функция $A(t, x)$ преобразуется в соответствии с заменой (3.26).

Отбросим в равенстве (3.25) несущественную постоянную x_0 и совершим замену (3.24), положив $D_0 = -c$, а также замену (3.26), выбрав $\vartheta = k^{-2}$. В результате, переобозначив $\hbar \rightarrow \hbar k^2$, получим равенство (3.27). Произведем теперь последовательно преобразования (4.3) и (4.4) применительно к задаче (4.1) с точно таким же выбором D_0 и ϑ . Тогда построение внутреннего решения в вязком пристеночном подслое, порождаемого внешним граничным условием (3.25), сводится к решению стационарной краевой задачи

$$u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + v_l \frac{\partial u_l}{\partial y} = -\frac{\partial p_l}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p_l}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{\partial v_l}{\partial y} = 0 \quad (4.5)$$

$$y = 0: u_l = c_w, \quad v_l = 0; \quad y \rightarrow +\infty: u_l \rightarrow A(x)$$

Параметр $c_w = -ck^{-2}$ – скорость стенки по касательной к себе, функция $A(x)$ задается выражением (3.27), а градиент давления вычисляется с помощью стационарного

аналога соотношения (4.2). Как будет видно из дальнейшего, величина c_w не может быть задана произвольно.

Итак, в случае

$$A = -1 + \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar}{2}e^{ix} + \frac{\hbar}{2}e^{-ix} - \frac{\hbar^2}{24}e^{2ix} - \frac{\hbar^2}{24}e^{-2ix} + \dots \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial p_l}{\partial x} = \frac{i\hbar}{2}e^{ix} - \frac{i\hbar}{2}e^{-ix} - \frac{i\hbar^2}{3}e^{2ix} + \frac{i\hbar^2}{3}e^{-2ix} + \dots$$

введем подлежащие определению постоянные m_0, m_1, m_2 и рассмотрим разложение

$$c_w = m_0 + \hbar m_1 + \hbar^2 m_2 + O(\hbar^3) \quad (4.7)$$

Ясно, что для $m_0 \neq -1$ решение задачи (4.5), (4.6) в случае $\hbar = 0$ выражается через зависящую от автомодельной переменной $yx^{-1/2}$ функцию Блазиуса и не является периодическим. Поэтому следует принять $m_0 = -1$. Последнее равенство позволяет искать решение задачи (4.5), (4.6) в виде

$$u_l = -1 + \hbar q'_0(y) + \hbar^2 f'_0(y) - \hbar f'_1(y)e^{ix} - \hbar \bar{f}'_1(y)e^{-ix} - \hbar^2 f'_2(y)e^{2ix} - \hbar^2 \bar{f}'_2(y)e^{-2ix} + O(\hbar^3) \quad (4.8)$$

$$v_l = i\hbar f_1(y)e^{ix} - i\hbar \bar{f}_1(y)e^{-ix} + 2i\hbar^2 f_2(y)e^{2ix} - 2i\hbar^2 \bar{f}_2(y)e^{-2ix} + O(\hbar^3)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение, штрих – производную по y . В первом приближении по параметру \hbar верны уравнения

$$f_1''' + i f_1' = -i/2, \quad q_0''' = 0 \quad (4.9)$$

Краевые условия для уравнений (4.9) следуют из соотношений (4.5), (4.6), (4.8):

$$y \rightarrow +\infty: f_1' \rightarrow -1/2, \quad q_0' \rightarrow 0 \quad (4.10)$$

$$y = 0: f_1 = f_1' = 0, \quad q_0' = m_1 \quad (4.11)$$

Из второго уравнения (4.9) и второго предельного условия (4.10) находим $q_0' \equiv 0$. Это означает, что $m_1 = 0$. Первое уравнение (4.9) дает

$$f_1' = -1/2 + M_1^+ e^{\tau y} + M_1^- e^{-\tau y}, \quad \tau = (1-i)/\sqrt{2} \quad (4.12)$$

Требование отсутствие экспоненциального роста при $y \rightarrow +\infty$ в правой части уравнения (4.12) достаточно для выполнения предельного условия (4.10), поэтому постоянная $M_1^+ = 0$, другая постоянная в уравнении (4.12) определяется первым граничным условием (4.11), т.е. $M_1^- = 1/2$. Интегрируя уравнение (4.12) с учетом первого граничного условия (4.11), получим

$$f_1 = -y/2 + (1 - e^{-\tau y})/(2\tau) \quad (4.13)$$

Во втором приближении по параметру \hbar подстановка выражений (4.8) в уравнения (4.5) приводит к уравнениям

$$f_2''' + 2i f_2' = i/3 - i f_1'^2 + i f_1 f_1', \quad f_0''' = -i f_1 \bar{f}_1'' + i \bar{f}_1 f_1'' \quad (4.14)$$

В качестве краевых условий для уравнений (4.14) из соотношений (4.6), (4.8) имеем

$$y \rightarrow +\infty: f_2' \rightarrow 1/24, \quad f_0' = 1/4 \quad (4.15)$$

$$y = 0: f_2 = f_2' = 0, \quad f_0' = m_2 \quad (4.16)$$

Остановимся сначала на первом уравнении (4.14), которое после подстановки в его правую часть функции f_1 первого приближения (4.13) имеет общее решение вида

$$f_2' = 1/24 + (\tau y - 1)e^{-\tau y}/4 + M_2^+ e^{\tau\sqrt{2}y} + M_2^- e^{-\tau\sqrt{2}y}$$

(M_2^+ , M_2^- – произвольные постоянные). Исключим из этого решения экспоненциально растущее слагаемое, полагая $M_2^+ = 0$, после чего убеждаемся, что первое предельное условие (4.15) выполнено. Равенство $M_2^- = 5/24$ обеспечивает удовлетворение первого граничного условия (4.16). Тогда, вновь учитывая первое условие (4.16), получим

$$f_2 = [y(1 - 6e^{-\tau y}) + 5(1 - e^{-\tau\sqrt{2}y})/(\tau\sqrt{2})]/24 \quad (4.17)$$

Обратимся теперь ко второму уравнению (4.14). Первое условие (4.11) позволяет упростить это уравнение посредством интегрирования его правой части по частям. Имеем

$$f_0''(y) - f_0''(0) = i\bar{f}_1(y)f_1'(y) - if_1(y)\bar{f}_1'(y) \quad (4.18)$$

Обозначая

$$I(y) \equiv \int_0^y [i\bar{f}_1(s)f_1'(s) - if_1(s)\bar{f}_1'(s)] ds$$

из выражения (4.13) выводим равенство

$$I(y) = \frac{1}{4} [3 - y\sqrt{2} + e^{-\sqrt{2}y} - (\tau y + 2 + i)e^{-\tau y} - (\bar{\tau}y + 2 - i)e^{-\bar{\tau}y}] \quad (4.19)$$

Эквивалентная запись уравнения (4.18) имеет вид

$$f_0'(y) = E_0 + E_1 y + I(y); \quad E_0 = f_0'(0), \quad E_1 = f_0''(0) \quad (4.20)$$

где E_0, E_1 – произвольные постоянные. Выберем $E_1 = \sqrt{2}/4$, тогда в соответствии с выражением (4.19) не будет линейно растущих членов в правой части уравнения (4.23), т.е. существует конечный предел

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} [E_1 y + I(y)] = 3/4 \quad (4.21)$$

С другой стороны, асимптотическое условие (4.15) показывает, что рассматриваемый предел (4.21) равен

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} [f_0'(y) - f_0'(0)] = 1/4 - E_0 \quad (4.22)$$

Сопоставление соотношений (4.21) и (4.22) дает $E_0 = -1/2$. Таким образом, постоянные E_0 и E_1 , а тем самым и функция $g_0 = f_0'(y)$, единственным образом находятся из второго уравнения (4.14) и второго предельного условия (4.15). Поскольку граничное условие (4.16) в определении функции g_0 не участвует, оно может быть удовлетворено лишь в случае специального задания параметра m_2 .

Итак, полагая в уравнении (4.20) $y = 0$, в соответствии с условием (4.16) находим

$$m_2 = -1/2 \tag{4.23}$$

Следовательно, 2π -периодическое по переменной x решение задачи (4.5), (4.6) существует в области $y > 0$ и выражается формулами (4.8), (4.13), (4.17), (4.19), (4.20), если фигурирующая в задаче (4.5) тангенциальная скорость c_w границы области $y = 0$ связана с амплитудой \hat{h} предельных функций из выражений (4.6) следующим образом:

$$c_w = -1 - \hat{h}^2/2 + O(\hat{h}^3) \tag{4.24}$$

Перейдем теперь в систему координат, в которой стенка неподвижна, воспользовавшись инвариантностью системы уравнений Прандтля относительно преобразования (4.3). Для этого достаточно в соотношении (4.3) положить $D_0 = |c_w|$, c_w дается выражением (4.24). В результате получим нестационарное решение, периодическое как по x , так и по t . Наконец, период колебательного решения может быть выбран любым благодаря инвариантности уравнений Прандтля относительно преобразования (4.4). Положим в соотношении (4.4) $\hat{h} = k^2 \tilde{h}$ и обозначим $\vartheta = k^2$. Последовательное применение преобразований (4.3), (4.4) с указанными выше параметрами D_0 и ϑ порождает семейство решений задачи (4.1), зависящее от трех параметров c , k и \hat{h} . Данное семейство решений обладает при $y_1 \rightarrow +\infty$ асимптотикой $u_1 \rightarrow A(x, t)$, где предельная функция $A(x, t)$ получается из первого выражения (4.6) упомянутыми преобразованиями (4.3), (4.4)

$$A(t, x) = \frac{3\hat{h}^2}{4k^2} + \hat{h} \cos[k(x - ct)] - \frac{\hat{h}^2}{12k^2} \cos[2k(x - ct)] + O(\hat{h}^3) \tag{4.25}$$

причем вследствие равенства (4.24) параметры c , k , \hat{h} не являются независимыми, а подчиняются соотношению

$$c = k^2 + \frac{\hat{h}^2}{2k^2} + O(\hat{h}^3) \tag{4.26}$$

Функция (4.25) – решение уравнения КдВ (поскольку данное уравнение инвариантно относительно преобразований (3.24), (3.26)). Выражение (4.25) представляет собой сужение трехпараметрического семейства решений (3.25) благодаря связи (4.26). Указанная связь возникает из условия существования периодического решения в вязком пристеночном подслое 4 (внутреннего решения, для которого (3.25) – внешнее решение, относящееся к области 3).

Укажем другой способ определения постоянной (4.23), исходя из сформулированного Вудом [14] необходимого условия существования 2π -периодического решения уравнений пограничного слоя Прандтля. С этой целью заметим, что задача (4.5) посредством преобразования

$$x = -\hat{x}, \quad y = |c_w|^{-1/2} \hat{y}, \quad u = -|c_w| \hat{u}, \quad v = |c_w|^{1/2} \hat{v}, \quad p = |c_w|^2 \hat{p}, \quad A = -|c_w| U_\infty$$

сводится к задаче классического пограничного слоя. Величина c_w берется согласно выражениям (4.7), причем, как показано выше, $m_0 = -1$, $m_1 = 0$.

Именно для такой задачи классического пограничного слоя упомянутое условие существования 2π -периодического решения [14] гласит:

$$\int_0^{2\pi} (U_\infty^3 - U_\theta) d\hat{x} = O(\hat{h}^4) \tag{4.27}$$

где $U_\infty(\hat{x})$ – заданная (2π -периодическая) функция.

Подставим разложение функции A , согласно первому выражению (4.6), и представление (4.7) параметра c_w в предельную функцию $U_\infty = -|c_w|A^{-1}$. Тогда в качестве подинтегрального выражения в равенстве (4.27) получим

$$U_\infty^3 - U_\infty = 2m_2\hbar^2 - 2\hbar \cos x + 2\hbar^2 \cos^2 x + \frac{2\hbar^2}{3} \cos 2x + O(\hbar^3) \quad (4.28)$$

Интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ от входящих в функцию (4.28) слагаемых до $O(\hbar^2)$ включительно необходимо приравнять к нулю в соответствии с условием (4.27), что приводит к значению неизвестной постоянной m_2 , в точности совпадающему со значением (4.23).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00807 и 04-01-773).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейланд В.Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
2. *Stewartson K.* Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // *Advances in Applied Mechanics*. N.Y., etc.: Acad. Press, 1974. V. 14. P. 145–239.
3. *Smith F.T.* On the high Reynolds number theory of laminar flows // *IMA J. Appl. Math.* 1982. V. 28. № 3. P. 207–281.
4. *Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик.В., Королев Г.Л.* Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В.Сычева. М.: Наука, 1987. 255 с.
5. *Жук В.И.* Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.
6. *Messiter A. F., Liñán A.* The vertical plate in laminar free convection: effects of leading and trailing edges and discontinuous temperature // *ZAMP*. 1976. V. 27. № 5. P. 633–651.
7. *Smith F.T., Duck P.W.* Separation of jets or thermal boundary layers from a wall // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1977. V. 30. Pt. 2. P. 143–156.
8. *Merkin J.H., Smith F.T.* Free convection boundary layers near corners and sharp trailing edges // *ZAMP*. 1982. V. 33. № 1. P. 36–52.
9. *Merkin J.H.* Free convection boundary layers over humps and indentations // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1983. V. 36. Pt. 1. P. 71–85.
10. *Рыжов О.С.* Неустойчивость распространяющейся вдоль стенки струи вязкой жидкости // *ПМТФ*. 1982. № 2. С. 26–33.
11. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Eds. M. Abramowitz and I. Stegun.* N.Y. etc.: Wiley, 1972 = *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица и И. Стюгана.* М.: Наука, 1979. 832 с.
12. *Drazin P.G.* On the stability of cnoidal waves // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1977. V. 30. Pt. 1. P. 91–105.
13. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Наука. Физматлит, 2000. 272 с.
14. *Wood W.W.* Boundary layers whose streamlines are closed // *J. Fluid Mech.* 1957. V. 2. Pt 1. P. 77–87.

Москва
e-mail: zhuk@ccas.ru

Поступила в редакцию
1.XII.2004