УДК 533.6.011

© 2005 г. А. Н. Богданов, В. Н. Диесперов

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТРАНСЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Предлагается модифицированная "трехпалубная" модель для исследования свободного нестационарного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях. Модификация модели заключается в учете сингулярного члена трансзвукового разложения, позволяющая уточнить уравнение Линя–Рейсснера–Цяня и более правильно описать нестационарные и нелинейные явления. С использованием модифицированной модели рассматривается устойчивость пограничного слоя, взаимодействующего с нестационарным невязким течением на трансзвуковых скоростях. Показано, что модифицированная модель позволяет учесть дополнительное возмущение, выпадающее из рассмотрения при использовании классической трехпалубной модели.

В модели, описывающей свободное нестационарное вязко-невязкое взаимодействие пограничного слоя и внешнего течения на трансзвуковых скоростях [1], аналогично свободному вязко-невязкому взаимодействию в стационарном сверхзвуковом потоке [2], поле течения поделено на три части – "палубы" ("трехпалубная" модель). Решения описывающих течение уравнений, выведенных отдельно для каждой палубы при помощи метода асимптотических разложений в приближении больших чисел Рейнольдса, сращиваются с использованием граничных условий на границах палуб.

Как оказалось, для главных членов разложений в первой палубе, называемой также внешней или верхней, течение невязкое нестационарное и описывается уравнением Линя–Рейснера–Цяня (ЛРЦ) для потенциала скорости. Во второй (главной, или средней) палубе, занимающей основную часть пограничного слоя, течение в первом приближении невязкое вихревое и стационарное. В третьей (пристеночной) палубе течение в первом приближении описывается стационарными уравнениями пограничного слоя несжимаемой жидкости. Выведенные уравнения предлагалось [1] использовать для анализа нестационарных процессов при свободном вязко-невязком взаимодействии пограничного слоя с внешним потоком в трансзвуковом диапазоне скоростей. На основе полученной системы уравнений был найден закон подобия для течений такого рода.

По поводу полученных результатов можно высказать ряд замечаний. Известно [3], что уравнение ЛРЦ обладает недостатками, не позволяющими правильно описать распространение в потоке именно нестационарных возмущений: уравнение ЛРЦ дает бесконечные скорости распространения слабых возмущений вниз по потоку, волновые фронты возмущений от точечного источника во все моменты времени представляют собой незамкнутые кривые (параболы), задача Коши для такого уравнения некорректна, уравнение ЛРЦ не описывает высокочастотные возмущения и т.д.

Ниже предлагается модификация уравнений свободного нестационарного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях. Именно, при выводе уравнения трансзвукового течения из полных уравнений для потенциала предлагается сохранить в уравнении член со второй производной по времени. Хотя он имеет более высокий порядок малости, однако в получаемом уравнении такой член сингулярный, и пренебрежение им приводит к вырождению указанного уравнения (одного из основных в модели течения) в вырожденное гиперболическое (каковым является уравнение ЛРЦ) и появлению перечисленных выше недостатков модели. Учет этого члена позволяет уточнить модель течения и более правильно описать нестационарные и нелинейные явления.

Также с использованием модифицированной модели ниже анализируется поведение линейных и слабонелинейных возмущений. Показана возможность роста возмущения, выпадающего при традиционном анализе. Построены волновые фронты слабых возмущений. Исследовано возникновение ударной волны из слабонелинейного возмущения.

Проблема устойчивости пограничного слоя при свободном вязко-невязком взаимодействии в рамках трехпалубной модели подробно изучалась О.С. Рыжовым и его учениками [4–9]. Первоначально внешнее течение полагалось стационарным; случаи сверхзвуковых и дозвуковых скоростей внешнего течения рассматривались как отдельные задачи.

Для взаимодействия со сверхзвуковым внешним течением было выведено дисперсионное соотношение (ДС) и даны результаты его подробного анализа с использованием ЭВМ [4]. Был дан вывод ДС и его анализ для случая взаимодействия с дозвуковым течением [5][1]; обнаружено наличие растущего возмущения для дозвукового режима взаимодействия, для сверхзвукового режима растущих возмущений нет.

Исследования [6, 7] показали наличие бесконечного числа волн возмущений, бегущих в пограничном слое вниз по течению, и единственной волны, распространяющейся вверх по течению. Было обнаружено также [8], что задача устойчивости пограничного слоя при вязко-невязком взаимодействии сводится к тому же ДС, какое получается в задаче о развитие длинноволновых возмущений в вязкой несжимаемой жидкости. Таким образом, возмущения во взаимодействующем пограничном слое представляют собой волны Толлмина–Шлихтинга, и вместо полных уравнений Навье–Стокса для их анализа можно использовать уравнения Прандтля.

Была проанализирована [9] устойчивость пограничного слоя, свободно взаимодействующего с нестационарным трансзвуковым внешним течением. В этой связи были исследованы системы описывающих течение уравнений и показано, что при их выводе приходится выбирать между учетом нестационарного характера течения в нижней палубе (пограничном слое) и учетом нелинейности течения в верхней палубе (внешнего невязкого течения). (В иностранной литературе (см., например, [10]) соответствующие модели получили название трансзвукового режима первого и второго родов.) При исследовании устойчивости для потенциала скорости внешнего течения было использовано [9] линейное уравнение ЛРЦ. Найдено [9], что ДС имеет один растущий корень независимо от того, превосходит или нет скорость внешнего течения скорость звука; при этом скорость роста возмущений зависит от величины волнового числа. Сравнение с результатами исследований при взаимодействии на дозвуковой скорости показало [9], что полученные результаты противоречат известному при дозвуковом режиме взаимодействия переходу с ростом величины волнового числа к устойчивым затухающим колебаниям.

В настоящее время предложены и другие модели для изучения процессов, происходящих при свободном нестационарном вязко-невязком взаимодействии. Для случая, когда возмущения поля течения превышают допустимую трехпалубной моделью величину предложена другая ("четырехпалубная" модель) [11]. В рамках этой модели удалось построить солитонные решения уравнений свободного нестационарного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях (в области взаимодействия на дозвуковой скорости).

Сравнение экспериментальных и теоретических результатов исследований развития возмущений при свободном вязко-невязком взаимодействии с привлечением трехпалубной модели свидетельствует об их хорошем качественном согласовании [12]. Трехпалубная модель правильно предсказывает все качественные черты процесса излучения неустойчивых колебаний: распространение возмущений вверх по потоку, локальный максимум амплитуды возмущений над вибратором с менее выраженным локальным минимумом ниже по потоку, возбуждение волны Толлмина–Шлихтинга. Перечислены возможные причины количественного несоответствия результатов (расхождение в 2–3 раза численных значений характерных частот): пространственный (трехмерный) характер неустойчивых колебаний, в то время как теория базируется на плоском (двумерном) подходе, большие изменения местных чисел Рейнольдса с расстоянием от источника возмущений, соответствующие в теории переходу с нижней на верхнюю

[1] Обобщение проведенных исследований см. *Терентьев Е.Д.* Нестационарные задачи пограничного слоя со свободным взаимодействием. Дис. ... д-ра. физ. мат. наук. 01.02.05. М., 1986. 202 с.

ветвь кривой нейтральной устойчивости, и т.д. Никакие особенные различия эксперимента и теории в развитии возмущений вниз по потоку в обзоре [12] не отмечены.

Ниже также рассматривается устойчивость пограничного слоя, свободно взаимодействующего с нестационарным невязким течением на трансзвуковых скоростях. Для описания поля течения используется трехпалубная модель, для моделирования внешнего нестационарного трансзвукового течения – модифицированное линейное уравнение ЛРЦ [3]. Использование указанного уравнения позволяет преодолеть недостатки моделирования нестационарного трансзвукового течения на основе классического трансзвукового приближения [13]. В частности, в отличие от ранее проведенных исследований удается учесть распространение нестационарных возмущений во внешнем потоке как вверх, так и вниз по течению. Получено ДС, включающее рассмотренные ранее случаи, и определены его корни. Показано, что модифицированная модель позволяет учесть растущее со временем возмущение, распространяющееся вниз по течению и выпадающее из рассмотрения при использовании традиционной модели [9].

1. Модифицированная трехпалубная модель свободного нестационарного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях. Внешнее течение (вдали от обтекаемой поверхности), будем считать невязким нестационарным, для его параметров будем использовать разложения вида [1]

$$t = L(t_0 + \varepsilon^{4/5} t_1)/U_\infty, \quad x = L(1 + \varepsilon^{12/5} x_1), \quad y = L\varepsilon^{8/5} y_1$$

$$u = U_\infty(1 + \varepsilon^{8/5} u_{11} + \varepsilon^{16/5} u_{12} + \ldots), \quad \upsilon = U_\infty(\varepsilon^{12/5} \upsilon_{11} + \varepsilon^{20/5} \upsilon_{12} + \ldots) \tag{1.1}$$

$$\rho = \rho_\infty(1 + \varepsilon^{8/5} \rho_{11} + \varepsilon^{16/5} \rho_{12} + \ldots), \quad p = p_\infty + \rho_\infty U_\infty^2(\varepsilon^{8/5} p_{11} + \varepsilon^{8/5} p_{12} + \ldots)$$

p – давление, ρ – плотность, u, υ – компоненты скорости вдоль осей пространственных координат x, y (соответственно), t – время. Члены разложений f_{11} – функции соответствующих первой "палубе" координат (x_1, y_1, t_1), ε – малый параметр, зависящий от числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_\infty L U_\infty / \nu_\infty$, L – характерная длина, U – скорость невозмущенного течения, ν – коэффициент кинематической вязкости, индексом ∞ отмечены характерные значения параметров (постоянных величин). В нижних палубах модифицированной модели используются соответствующие уравнения обычной трехпалубной модели [1].

При трансзвуковых скоростях разность $M^2 - 1$ (M – число Маха) – малая величина. При использовании разложений (1.1) $M^2 - 1$ есть $O(\varepsilon^{8/5})$. Подстановка разложений (1.1) в принятые за исходные уравнения вязкого сжимаемого газа [14] дает для главных членов ($O(\varepsilon^{-4/5})$) соотношения акустики (предполагается, что набегающий поток –однородный и постоянный)

$$p_{11} = \rho_{11} = -u_{11} \tag{1.2}$$

Следующее приближение (для членов $O(\varepsilon^{4/5})$) дает известное в газовой динамике уравнение Линя–Рейсснера–Цяня (ЛРЦ) (см., например, [13]) для потенциала скорости течения, использовавшееся многими авторами для анализа нестационарных трансзвуковых течений. Однако это уравнение обладает рядом существенных недостатков (указанных выше). Заметим, что уравнение ЛРЦ является характерным пределом: других, дающих более общие результаты для этой задачи, разложений нет. Это обстоятельство задает (через условия сращивания) вид разложения параметров по времени и продольной координате в других областях исследуемого течения (для главной и пристеночной палуб).

Выход из создавшихся трудностей представляется в использовании вместо уравнения ЛРЦ модифицированного уравнения [3], отличие которого от уравнения ЛРЦ заключается в наличии члена со второй производной по времени, что позволяет провести уточненный анализ нестационарных и нелинейных явлений в потоке.

Для потенциала скорости ϕ ($u_{11} = \partial\phi/\partial x_1$, $\upsilon_{11} = \partial\phi/\partial y_1$) модифицированное уравнение ЛРЦ [3] имеет вид ($\delta = \varepsilon^{8/5} = \mathrm{Re}^{-1/5}$, γ – показатель адиабаты Пуассона)

$$\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial t_1\partial x_1} + K^*\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y_1^2} = 0, \quad K^* = (1 - M_\infty^2)\delta^{-1} - (\gamma + 1)\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) и его приложения к задачам нестационарной трансзвуковой аэродинамики подробно исследованы [3, 15]. Моделирование нестационарного трансзвукового течения на основе модифицированного уравнения (1.3) позволяет получить картину, более соответствующую физической природе течения. В отличие от уравнения ЛРЦ уравнение (1.3) (и это является его главным достоинством) не имеет вырожденных характеристических направлений и описывает (хотя и с разной степенью точности) нестационарные возмущения, распространяющиеся в любом направлении в поле течения.

Проведенный ранее [3] анализ поведения линейных и слабонелинейных нестационарных возмущений на основе уравнения (1.3) дал следующие результаты.

Для линейных гармонических возмущений (ω – частота, k – волновое число)

$$\phi \sim \exp(i(-\omega t + kx + ly))$$

стационарного течения с медленно меняющимися параметрами определены корни дисперсионного соотношения (ДС)

$$\omega_1 = 2\frac{k}{\delta} + \frac{k}{2}\bar{\Omega}, \quad \omega_2 = -\frac{k}{2}\bar{\Omega}; \quad \bar{\Omega} = K^{*0} + \frac{i}{k}(\gamma + 1)\frac{\partial^2\phi^0}{\partial x_1^2} + \left(\frac{l}{k}\right)^2 \tag{1.4}$$

Верхним нулевым индексом отмечены параметры невозмущенного течения. При $\delta \to 0$ корень ω_1 выпадает и анализ соответствующих возмущений, распространяющихся вниз по потоку, невозможен. Между тем, как видно из (1.4), мнимая часть корней, отвечающая росту (затуханию) возмущения, зависит от характера невозмущенного течения (от величины $\partial^2\phi^0/\partial x_1^2$). Знаки корней ω_1, ω_2 противоположны, т.е. получается, что отбрасываемый при $\delta \to 0$ корень будет при $\partial^2\phi^0/\partial x_1^2 > 0$ соответствовать волне с нарастающей амплитудой ($\mathrm{Im}\,\omega_1 > 0$), в то время как оставленный корень соответствует затухающей волне ($\mathrm{Im}\,\omega_2 < 0$).

Характеристические поверхности для точечного источника возмущений, находящегося в точке (x_0, y_0), определяются уравнением

$$K^*t^2 + 2t(x - x_0) - \delta(x - x_0)^2 = (y - y_0)^2(1 + \delta K^*) \tag{1.5}$$

которое при $K^* = \mathrm{const}$ дает эллипс в плоскости $t = \mathrm{const}$.

Положим для простоты $x_0 = y_0 = 0$, пренебрежем величиной δK^* и преобразуем уравнение (1.5) к виду

$$y^2 + \delta(x - \delta^{-1}t)^2 = (K^* + \delta^{-1})t^2 \tag{1.6}$$

аналогично уравнению характеристического фронта слабого возмущения, определяемого волновым уравнением в движущейся среде (a – скорость звука)

$$y^2 + (x - Ut)^2 = a^2t^2$$

По уравнению (1.6) видно, что скорость невозмущенного течения, сносящего слабое возмущение вниз по потоку, в этой модели есть δ^{-1}. Коэффициент $K^* + \delta^{-1}$ характеризует скорость распространения фронта такого возмущения. При $\delta \to 0$ скорость сноса возмущения становится бесконечной, бесконечной становится и скорость распространения фронта возмущения вниз по потоку. Сложение скоростей движущегося вверх по течению фронта возмущения и сносящего его невозмущенного течения дает конечную скорость, а участки фронта возмущения, распространяющиеся вниз по потоку, уходят в бесконечность, и эллипс (1.5) вырождается в параболу в плоскости $t =$ $=$ const [3, 13].

Опрокидывание участка характеристического фронта, порожденного некоторым возмущением, означает возникновение ударной волны. Условие опрокидывания (как условие пересечения характеристических фронтов, соответствующее началу опрокидывания) можно определить по уравнению (1.5). Для фронта, движущегося вдоль луча $y =$ const, опрокидывание означает выполнение равенства $\partial x/\partial x_0 = 0$, для чего необходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = -\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{\delta}{t^2}(x - x_0)\right) \tag{1.7}$$

Из выражения (1.7) следует, что при $\delta = 0$ опрокидывание фронта происходит только в случае возмущений сжатия, при этом тем раньше (при меньшем t), чем больше абсолютная величина градиента скорости. В случае $\delta \neq 0$ (как видно из (1.7)) опрокидываются также только возмущения сжатия, причем для распространяющихся вниз по течению ($x > x_0$) возмущений опрокидывание происходит быстрее (при той же начальной амплитуде возмущения). Анализ же, проводимый на основе уравнения ЛРЦ, совершенно не учитывает возмущения, распространяющиеся вниз по потоку.

Таким образом, использование модифицированной трехпалубной модели позволяет провести уточненное описание нестационарных и нелинейных явлений в поле течения.

2. Устойчивость пограничного слоя, взаимодействующего с нестационарным невязким течением на трансзвуковых скоростях. Примем, используя известную модель [9], что возмущения рассматриваемого пограничного слоя – периодические по времени t и координате x, направленной по скорости невозмущенного течения; зависимость от поперечной координаты y произвольна:

$$f(y)\exp(\omega t + ikx) \tag{2.1}$$

За невозмущенное выберем течение с параметрами

$$u = y, \quad v = 0, \quad p = \text{const}$$

Ранее для моделирования внешнего нестационарного невязкого течения было использовано [9] линейное уравнение ЛРЦ. Ниже предлагается использовать модифицированное линейное уравнение ЛРЦ (1.3), в котором вместо параметра K^* введен параметр $K_\infty = (M_\infty^2 - 1)\delta^{-1}$,

$$\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x} + K_\infty\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.2}$$

для сверхзвукового потока $K_\infty > 0$, для дозвукового потока $K_\infty < 0$, $K_\infty = 0$ отвечает течению со звуковой скоростью.

Уравнения для нижних палуб совпадают с соответствующими уравнениями, полученными ранее [9]. Кроме того, будем считать, что для упрощения выкладок совершено преобразование зависимых и независимых переменных, позволяющее исключить коэффициент 2 перед смешанной производной в уравнении (2.2); ниже для преобразованных переменных оставим те же обозначения, что и для исходных.

Подставляя возмущения вида (2.1) в уравнения пограничного слоя [9], разрешая полученную линеаризованную систему и используя модифицированное уравнение (2.2) и соответствующие граничные условия, получим модифицированное ДС

$$F(\Omega) = i^{1/3}k^{7/3}/\sqrt{\delta\omega^2 + ik(\omega + ikK_\infty)} \tag{2.3}$$

где

$$F(\Omega) = \frac{d\mathrm{Ai}}{d\Omega}\Bigg/\left(\int\limits_{\Omega}^{\infty}\mathrm{Ai}(\zeta)d\zeta\right), \quad \Omega = \omega(ik)^{-2/3}$$

$\mathrm{Ai} = \mathrm{Ai}(\Omega)$ – функция Эйри.

При $\delta = 0$ равенство (2.3) дает ДС (2.3) из работы [9].

Если считать внешний поток стационарным (положить $\omega = 0$ в правой части равенства (2.3)), то ДС примет вид

$$F(\Omega) = -(ik)^{4/3}/\sqrt{K_\infty} \tag{2.4}$$

при $K_\infty = 1$ (модельное сверхзвуковое течение) соответствующий полученному в работе [4]. При $K_\infty = -1$ (модельное дозвуковое течение) имеем

$$F(\Omega) = -i^{1/3}k^{4/3} \tag{2.5}$$

Полученное в [5] ДС при дозвуковом внешнем течении соответствует соотношению (2.5) при $k > 0$. Анализа соотношения (2.5) достаточно для того, чтобы определить корни ДС при дозвуковом внешнем течении (см. диссертацию Е.Д. Терентьева, ссылка[1]). Таким образом, соотношение (2.3) содержит (как частные случаи) ДС для задач устойчивости пограничного слоя при свободном вязко-невязком взаимодействии в различных режимах (стационарном и нестационарном, на дозвуковых, трансзвуковых и сверхзвуковых скоростях) рассмотренные ранее [4–9]. Заметим здесь, что соотношение (2.4) непригодно для анализа устойчивости пограничного слоя в случае течения со звуковой скоростью $K_\infty = 0$ (это было отмечено в указанной выше диссертации Е.Д. Терентьева), в то время как соотношение (2.3) и его частный случай при $\delta = 0$ свободны от этого ограничения.

Выражения в левой части соотношений (2.3)–(2.5) можно разложить в бесконечный ряд по степеням ω. Ограничившись конечным числом членов ряда, можно получить алгебраическое уравнение соответствующей степени. Корни указанных уравнений отвечают волнам, распространяющимся в пограничном слое.

Рассмотрим асимптотическое поведение корней соотношения (2.3). При $\Omega \to \infty$ (например, высокочастотное приближение $\omega \to \infty$, $k \to \infty$) выражение в правой части уравнения (2.3) можно разложить следующим образом:

$$F(\Omega) = -\Omega - 1/\sqrt{\Omega} + O(1/\Omega^2) \tag{2.6}$$

В этом случае из соотношения (2.3) вытекает

$$\omega + ik/\sqrt{\omega} = -ik^3/\sqrt{\delta\omega^2 + ik(\omega + ikK_\infty)} \tag{2.7}$$

а из соотношения (2.5) –

$$\omega + ik/\sqrt{\omega} = -ik^2 \tag{2.8}$$

Пренебрежем в левой части уравнений (2.7), (2.8) членом $ik/\sqrt{\omega}$. Из уравнения (2.8) тогда сразу следует, что в главных членах $\omega = -ik^2$. Организуя итерационный процесс, можно найти

$$\omega = -ik^2 + i\sqrt{i}$$

откуда

$$\omega_{\pm} = -ik^2 \mp \sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2$$

Корень ω_- был найден ранее [5, 9]; ему соответствуют нарастающие со временем возмущения.

В свою очередь уравнение (2.7) можно преобразовать в уравнение четвертого порядка по ω

$$\delta\omega^4 + ik\omega^3 - k^2K_\infty\omega^2 + k^6 = 0 \tag{2.9}$$

При $\delta = 0$ (2.9) – уравнение третьего порядка, поэтому видно, что один из корней уравнения (2.9) при $\delta = 0$ выпадает. Таким образом, модифицированная модель описывает на одну волну возмущений больше, чем модель Рыжова–Савенкова [9]. В свою очередь, эта последняя модель описывает на одну волну возмущений больше, чем модель, предполагающая стационарность внешнего течения [7].

Пусть k – действительное число, введем $\omega = -i\bar{\omega}$, тогда уравнение (2.9) можно преобразовать в уравнение с действительными коэффициентами

$$\bar{\omega}^4 - \frac{k}{\delta}\bar{\omega}^3 + \frac{k^2K_\infty}{\delta}\bar{\omega}^2 + \frac{k^6}{\delta} = 0 \tag{2.10}$$

Найдем его корни при $\delta = 0$. Введем обозначения

$$\chi_1 = \frac{k^2}{2} + \frac{K_\infty^3}{27}, \quad \chi_2 = \chi_1^2 - \frac{K_\infty^6}{8}, \quad \chi^{\pm} = (\chi_1 + \chi_2^{1/2})^{1/3} \pm (\chi_1 - \chi_2^{1/2})^{1/3}$$

Если $\chi_2 > 0$, то имеем один действительный корень и два комплексно-сопряженных

$$\bar{\omega}_1 = k\chi^+ + \frac{kK_\infty}{3}, \quad \bar{\omega}_{2,3} = -\frac{k}{2}\chi^+ + \frac{kK_\infty}{3} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}k\chi^-$$

Для старших по k членов имеем для действительного корня выражение

$$\bar{\omega}_1 = k^{5/3} + \frac{1}{3}kK_\infty \tag{2.11}$$

которое при учете замены $\omega = -i\bar{\omega}$ совпадает с двумя первыми членами формулы (3.3) работы [9].

Как видно, корень (2.11) имеет порядок $k^{5/3}$. Подставляя главный член $\omega = -ik^{5/3}$ вместо ω в отброшенный выше член $ik/\sqrt{\omega}$, определим порядок этого члена (метод Ньютона). Имеем

$$ik/\sqrt{\omega} = O(k^{1/6})$$

Таким образом, порядок отброшенного члена меньше оставленных, что служит оправданием пренебрежения этим членом, сделанное выше при выведении ДС (2.9).

Для мнимых корней имеем

$$\bar{\omega}_{2,3} = -k^{5/3}/2 + kK_\infty/3 \pm i\sqrt{3}k^{5/3}/2 \tag{2.12}$$

Видно, что инкремент нарастания возмущений равен (в отличие от полученного ранее [9]) $\sqrt{2}\,k^{1/6}/3$; однако, как и ранее, возмущения растут и при дозвуковом, и при сверхзвуковом внешних течениях (т.е. независимо от знака K_∞). Как отмечено выше, предыдущие исследования [4, 5] показали рост возмущений только для дозвукового режима.

Если $\chi_2 = 0$, то уравнение (2.10) имеет три действительных корня:

$$\bar{\omega}_1 = 2k\chi^{1/3} + kK_\infty/3, \quad \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 = -k\chi^{1/3} + kK_\infty/3 \tag{2.13}$$

Если $\chi_2 < 0$, имеет место неприводимый случай (также три действительных корня), для корней уравнения (2.10) можно воспользоваться формулами

$$\bar{\omega}_1 = \frac{2}{3}kK_\infty\cos\frac{\alpha}{3}, \quad \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 = -\frac{2}{3}kK_\infty\cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right); \quad \cos\alpha = 1 + \frac{27k^3}{2K_\infty^3} \tag{2.14}$$

Поскольку возмущения выбираются в виде (2.1), справедливо равенство

$$\exp(\omega t) = \exp(-i\bar{\omega}t)$$

поэтому наличие корней $\bar{\omega}$ с положительной мнимой частью означает экспоненциальный рост возмущений и неустойчивость течения. Как раз такая ситуация наблюдается в случае $\chi_2 > 0$: один из корней приводит к неустойчивости. Условие $\chi_2 > 0$ выполняется, если

$$k^2 > K_\infty^3(1/\sqrt{2} - 2/27) \tag{2.15}$$

При $K_\infty > 0$ (для сверхзвуковых течений) условие (2.15) выполняется для достаточно больших k; при $K_\infty \le 0$ оно выполняется для любых k (т.е. всегда выполняется для течений с дозвуковой и звуковой скоростью). Последний случай находится в согласии с использованным выше высокочастотным приближением (ω, $k \to \infty$).

В случае действительных корней (2.13), (2.14) течение устойчиво. Такая ситуация возникает в сверхзвуковом течении при изменении знака неравенства (2.15) на противоположный, при этом допустимая величина k возрастает с ростом числа Маха (в сверхзвуковом потоке отвечающем росту K_∞).

Простая проверка показывает, что корни (2.10) не являются корнями уравнения, получаемого из (2.10) при $\delta = 0$. Таким образом, модифицированная модель дает другую величину и для всех прочих (соответствующих определенным ранее [9]) возмущений в поле рассматриваемого течения.

При $\delta \ne 0$ для решения уравнения (2.10) можно применить метод Феррари [16]. Довольно громоздкие выкладки позволяют найти четыре корня y_1, y_2, y_3, y_4, причем при $\delta \to 0$, $y_1 = k/\delta + O(1)$, y_2, y_3, $y_4 = O(1)$. Если принять $\delta = 0$, то первый корень выпадает, подобно тому, как это происходит в нестационарной трансзвуковой аэродинамике, когда для моделирования слабых возмущений используется уравнение ЛРЦ (см. выше п. 1).

Рассмотрим частный случай, для этого уравнение (2.10) представим в виде

$$\left(\bar{\omega} - \frac{k}{\delta}\right)(\bar{\omega}^3 - \delta k^4\bar{\omega} - k^5) + \frac{k^2\bar{\omega}^2}{\delta}(K_\infty + \delta^2k^2) = 0$$

Видно, что при $K_\infty = -\delta^2 k^2$ оно имеет корень

$$\bar{\omega}_1 = k/\delta$$

соответствующий волне, распространяющейся вниз по течению ($\omega/k > 0$, $\omega < 0$) без изменения амплитуды. Этот случай отвечает вязко-невязкому взаимодействию на дозвуковых скоростях и не противоречит выбранному асимптотическому представлению (при $k = O(1/\delta)$, $|K_\infty| = O(1)$). Другие корни при $K_\infty = -\delta^2 k^2$ определяются из уравнения

$$\bar{\omega}^3 - \delta k^4 \bar{\omega} - k^5 = 0 \qquad (2.16)$$

которое (как следует, например, из формул Виета) не имеет неограниченно растущих при $\delta \to 0$ корней.

Уравнение (2.16) отличается от уравнения (2.10) при $\delta = 0$ отсутствием квадратичного члена и наличием линейного. Введем обозначения

$$\sigma = \frac{k^{10}}{4} - \frac{\delta^3 k^{12}}{27}, \quad \sigma_\pm = \left(\frac{k^5}{2} \pm \sqrt{\sigma}\right)^{1/3}$$

и выпишем корни уравнения (2.16) при $\sigma > 0$

$$\bar{\omega}_2 = \sigma_+ + \sigma_-, \quad \bar{\omega}_{3,4} = -(\sigma_+ + \sigma_-)/2 \pm i\sqrt{3}(\sigma_+ - \sigma_-)/2$$

При $\delta \to 0$, $1/\delta = O(k)$ найденные корни в главном приближении по k совпадают с корнями (2.11), (2.12).

Приближенно особый корень ($\omega = O(1/\delta)$) можно определить по уравнению (2.7), подставив $\omega = -ik/\delta$ вместо $\sqrt{\omega}$. Имеем

$$\omega = -ik/\delta + (1-i)\sqrt{k\delta/2}$$

Соответствующее этому корню возмущение возрастает со временем, причем при $1/\delta = O(k)$ этот рост в точности соответствует случаю взаимодействия на дозвуковых скоростях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00807).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О.С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
2. *Нейланд В.Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
3. *Богданов А.Н.* Высшие приближения трансзвукового разложения в задачах нестационарных трансзвуковых течений// ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 798–811.
4. *Рыжов О.С., Терентьев Е.Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 1007–1023.
5. *Рыжов О.С., Терентьев Е.Д.* О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 974–986.
6. *Жук В.И., Рыжов О.С.* Об одном свойстве линеаризованных уравнений пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 5. С. 1042–1045.

7. *Жук В.И., Рыжов О.С.* О решениях дисперсионного уравнения из теории свободного взаимодействия пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1085–1088.
8. *Жук В.И., Рыжов О.С.* Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1326–1329.
9. *Рыжов О.С., Савенков И.В.* Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока// ПМТФ. 1990. № 2. С. 65–71.
10. *Bowles R.I., Smith F.T.* On boundary-layer transition in transonic flow // J. Enging Math. 1993. V. 27. № 3. P. 309–342.
11. *Жук В.И.* Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.
12. *Козлов В.В., Рыжов О.С.* Восприимчивость пограничного слоя: асимптотическая теория и эксперимент. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 56 с.
13. *Cole J.D., Cook L.P.* Transonic Aerodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1986 = *Коул Дж.Д., Кук Л.П.* Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
14. *Pai S.I.* Introduction to the Theory of Compressible Flow. Princeton: Van Nostrand, 1959. *Бай Ши-И.* Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 410 с.
15. *Богданов А.Н.* Моделирование переходного режима работы трансзвукового сопла // Мат. моделирование. 1995. Т. 7. № 9. С. 117–126.
16. Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Eds M. Abramowitz and I.A. Stegun. Washington: Nat. Bureau Standards. 1964 = Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовитца, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва
e-mail: bogdanov@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
25.V.2004