УДК 531.36:534.1

© 2005 г. К. Валле, С. Я. Степанов, С. Шарль

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Работа вызвана исследованиями динамических характеристик высокоскоростных роторов в гидростатических подшипниках, проводимыми в Университете г. Пуатье (Франция). Модель определяется линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с неопределенными коэффициентами (приведенные массы, коэффициенты демпфирования и упругости, определяющие воздействие слоя жидкости на ротор). Идентификационная система алгебраических уравнений составляется по результатам испытаний системы. Под испытанием понимается возбуждение (при определенных начальных условиях) специального вида колебательных режимов движения моделируемой системы с помощью внешних силовых воздействий. Измеряются положения ротора в каждый момент на заданном интервале времени и усилия, действующие со стороны жидкости на ротор. Для обусловленности идентификационной системы необходимо, в частности, чтобы ее определитель был отличен от нуля. Получены аналитические выражения определителя идентификационной системы для модели с произвольным числом степеней свободы и для частных случаев моделей с одной и двумя степенями свободы, без демпфирования и с демпфированием. Используется временной метод идентификации. Вычисления определителя проводятся для тестовых синусоидальных колебаний. Такие движения соответствуют вынужденным или собственным колебаниям моделируемой системы. В простейших случаях определитель разлагается на множители, что приводит к простым правилам выбора испытаний: минимальное число испытаний, необходимых для идентификации, равно удвоенному числу степеней свободы модели; частоты колебаний не должны быть все одинаковыми; при совпадении частот соответствующие им векторы амплитуд колебаний должны быть линейно независимыми в конфигурационном пространстве.

В литературе рассматриваются два основных метода идентификации, базирующиеся на двух методах измерений. Первый, частотный метод, базируется на преобразовании Фурье и на измерении частотных характеристик установившихся вынужденных колебаний моделируемой системы [1, 2]. Второй, временной метод, наиболее активно развиваемый в последнее время, опирается на новую высокоточную измерительную аппаратуру, способную измерять параметры движения, практически непрерывно по времени [3–6]. Имеется [7] далеко не полный обзор методов идентификации, где помимо математической стороны описания метода значительное внимание уделено способам возбуждения тестовых колебаний. Показано [8], что увеличение количества частот возбуждения снижает влияние шума. Частотный метод [9], ориентированный на гармонические тестовые колебания [10] и на измерение спектральной плотности энергии колебаний на специальном испытательном стенде [11], был применен [11] для идентификации модели высокоскоростных гибридных подшипников. Наибольшая часть методов идентификации относится к частотным методам. Однако последние публикации показывают, что временной подход – более простой и эффективный. Наиболее интересны в этом смысле публикации [12, 13], в которых временной подход сочетается с применением метода наименьших квадратов и показано снижение необходимого числа испытаний по сравнению с частотными методами.

1. Иллюстрация рассматриваемого метода идентификации на системе линейных уравнений первого порядка. Для простоты изложения временного метода идентификации рассмотрим сначала каноническую систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{z} = Pz \tag{1.1}$$

где P – $(n \times n)$-матрица неизвестных коэффициентов, z – n-мерный фазовый вектор-столбец (вектор отклонений обобщенных координат и скоростей от их значений в стационарном движении), t – время, точка означает дифференцирование по t.

Современная измерительная аппаратура позволяет получать числовые значения обобщенных координат и силовых воздействий в виде непрерывных функций времени. Пусть произведено s испытаний и получено s измерений фазового вектора $z_i(t)$, $t \in$ $\in [0, T_i]$ $(i = 1, \ldots, s)$. Для определения элементов матрицы P используем метод наименьших квадратов с функционалом

$$S(P) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\int_0^{T_i}\|\dot{z}_i(t) - Pz_i(t)\|^2 dt = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(P^T PZ) - \mathrm{tr}(PF^T) + \ldots \tag{1.2}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{s}\int_0^{T_i} z_i z_i^T dt, \quad F = \sum_{i=1}^{s}\int_0^{T_i} z_i \dot{z}_i^T dt \tag{1.3}$$

Здесь многоточие обозначает члены, не зависящие от P, индекс T обозначает транспонирование, символами $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма вектора. Во всем дальнейшем изложении символы $\|\cdot\|$ используются для обрамления матриц, записанных их числовыми или блочными элементами. Условие минимума

$$\mathrm{grad}S(P) = PZ - F = 0$$

дает линейное идентификационное уравнение для определения матрицы P

$$PZ = F \tag{1.4}$$

Заметим, что это уравнение может быть получено в результате тензорного умножения уравнения движения (1.1) на z_i, интегрирования по $t \in [0, T_i]$ и суммирования по всем испытаниям. Для разрешения уравнения необходимо, чтобы определитель матрицы Z был отличен от нуля. Исходя из определения (1.3) матрицы Z, можно заключить только, что она является симметрической и неотрицательной. Последнее следует из соотношения

$$y^T Z y = \sum_{i=1}^{s}\int_0^{T_i}(z_i^T y)^2 dt \geq 0 \Rightarrow \det Z \geq 0$$

Вычислим определитель $\det Z$, выбирая для испытаний собственные колебания системы

$$z_i(t) = c_i \exp\lambda_i t, \quad t \in [0, T_i], \quad i = 1, \ldots, s \tag{1.5}$$

где λ_i и c_i – собственные значения и комплексные собственные фазовые векторы системы (1.1). Тогда матрица Z примет вид

$$Z = \sum_{i=1}^{s} \mu_i^2 c_i c_i^T = BB^T; \quad B = \|\mu_1 c_1, \ldots \mu_s c_s\|, \quad \mu_i = \sqrt{\int_0^{T_i} \exp 2\lambda_i t dt}$$

Неоднозначность определения μ_i несущественна, так как в выражение определителя $\det Z$ входит только μ_i^2. При $s < n$ матрицу B можно дополнить $n - s$ нулевыми столбцами до квадратной матрицы $\bar{B}$

$$Z = \bar{B}\bar{B}^T; \quad \bar{B} = \|\mu_1 c_1, \ldots, \mu_s c_s, 0, \ldots, 0\| \Rightarrow \det Z = (\det \bar{B})^2 = 0 \tag{1.6}$$

Из последнего соотношения в формуле (1.6) следует, что для невырожденности Z необходимо выполнение условия $s \geq n$. В дальнейшем ограничимся случаем $s = n$. Тогда

$$\det Z = \mu_1^2 \ldots \mu_n^2 (\det C)^2, \quad C = \|c_1, \ldots, c_n\|$$

Таким образом, для невырожденности идентификационной системы необходимо, чтобы векторы комплексных фазовых амплитуд $c_1, \ldots, c_n$ были линейно независимы. В силу непрерывной зависимости определителя $\det Z$ от параметров тестовых колебаний (1.5) идентификационная система (1.4) останется невырожденной и в случае выбора для испытаний колебаний, близких к собственным.

2. Система уравнений второго порядка без демпфирования. Недостаток подхода, описанного в предыдущем разделе, (помимо сложности оперирования с комплексными амплитудами) – невозможность рассмотрения внешних вынуждающих силовых воздействий и вынужденных колебаний системы. Член, соответствующий силовому воздействию, будучи добавленным в правую часть уравнения (1.1), имел бы смысл силы, отнесенной к приведенной массе. Он не может быть измерен приборами, так как приведенная масса заранее не известна.

Рассмотрим уравнение колебаний линейной механической системы с n степенями свободы и явно выделенными коэффициентами приведенной массы, "демпфирования" и "упругости"

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) при $c = 0$ перепишем в виде

$$Qu = f(t); \quad u = \|\ddot{x}^T, x^T\|^T, \quad Q = \|m, k\| \tag{2.2}$$

где введены составной $2n$-вектор u и составная $(n \times 2n)$-матрица Q.

Рассмотрим s испытаний $u_i(t)$, $t \in [0, T_i]$ $(i = 1, \ldots, s)$. Так же как в предыдущем разделе, идентификационные уравнения получаются в результате тензорного умножения уравнения (2.2) на u_i, интегрирования по $t \in [0, T_i]$ и суммирования по $i = 1, \ldots, s$

$$QU = G; \; U = \sum_{i=1}^{s} \int_0^{T_i} u_i u_i^T dt, \quad G = \sum_{i=1}^{s} \int_0^{T_i} f_i u_i^T dt \tag{2.3}$$

Здесь $(2n \times 2n)$-матрица U аналогична матрице Z из предыдущего раздела и является симметрической и неотрицательной. Для доказательства ее невырожденности необходимо конкретизировать структуру испытаний. Теперь в качестве испытаний помимо собственных колебаний можно рассмотреть вынужденные колебания $x_i = a_i\cos(\omega_i t + \varphi_i)$ с частотами ω_i и действительными n-мерными конфигурационными векторами амплитуд a_i

$$u_i = b_i\cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad b_i = \left\| -\omega_i^2 a_i^T, a_i^T \right\|^T, \quad i = 1, \ldots, s \tag{2.4}$$

После подстановки выражений (2.4) в уравнение (2.3) получим

$$\begin{gathered} U = \sum_{i=1}^{s} b_i b_i^T \gamma_i = \bar{B}\bar{B}^T; \quad \bar{B} = \|\mu_1 b_1, \ldots, \mu_s b_s\|, \quad \mu_i = \sqrt{\gamma_i}, \quad i = 1, \ldots, s \\ \gamma_i = \int_0^{T_i} \cos^2(\omega_i t + \varphi_i)dt = \frac{1}{4\omega_i}(2\omega_i T_i + \sin 2(\omega_i T_i + \varphi_i) - \sin 2\varphi_i) \end{gathered} \tag{2.5}$$

На основании формулы (2.5), как и в предыдущем разделе, убеждаемся, что $\det U = 0$ при $s < 2n$. Для невырожденности U необходимо, чтобы было выполнено неравенство $s \geq 2n$ и чтобы матрица B имела ранг $2n$. При $s = 2n$ имеем $\det U = (\det \bar{B})^2$, и для невырожденности U необходимо, чтобы

$$\det\bar{B} = \mu_1 \ldots \mu_{2n} \det B \neq 0, \quad B = \|b_1, \ldots, b_{2n}\| \tag{2.6}$$

или чтобы все расширенные амплитудные $2n$-векторы b_i были линейно независимы. Это условие не может быть выполнено, если частоты колебаний ω_i одинаковы для всех испытаний, так как тогда в матрице B будут присутствовать одинаковые строки.

Воспользуемся формулой Лапласа для разложения определителя $\det B$ по минорам его первых n строк

$$\begin{gathered} \det B = \sum N_{i_1, \ldots, i_n} \omega_{i_1}^2 \ldots \omega_{i_n}^2 \\ N_{i_1, \ldots, i_n} = (-1)^{n+1+2+\ldots+n+i_1+\ldots+i_n} \det\|a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\| \det\|a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}\| \\ \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, 2n\}, \quad \{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, 2n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_n\} \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь знак Σ обозначает суммирование по C_{2n}^n сочетаниям значений индексов $i_1, \ldots, i_n$ (упорядоченных по возрастанию) из натурального ряда $\{1, \ldots, 2n\}$, а через $j_1, \ldots, j_n$ обозначен набор индексов (упорядоченных по возрастанию), дополнительный к набору $i_1, \ldots, i_n$ в множестве $\{1, \ldots, 2n\}$. Учитывая соотношения

$$(-1)^{n+1+2+\ldots+n} = (-1)^{[n/2]}, \quad (-1)^{i_1+\ldots+i_n+j_1+\ldots+j_n} = (-1)^{1+\ldots+2n} = (-1)^n$$

$$N_{j_1, \ldots, j_n} = (-1)^n N_{i_1, \ldots, i_n}$$

где $[n/2]$ обозначает целую часть числа $n/2$, формулу (2.7) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \det B = \Sigma' N_{i_1, \ldots, i_n}\{\omega_{i_1}^2 \ldots \omega_{i_n}^2 + (-1)^n \omega_{j_1}^2 \ldots \omega_{j_n}^2\} \\ N_{i_1, \ldots, i_n} = (-1)^{[n/2]+i_1+\ldots+i_n} \det\|a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\| \det\|a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}\| \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь Σ' означает суммирование по половине сочетаний индексов $i_1, \ldots, i_n$ (с исключением взаимно дополнительных сочетаний). Как показала проверка в системе MAPLE, проведенная до $n = 4$ включительно, формулу (2.8) можно переписать в виде

$$\det B = \frac{1}{n!2^{n-1}}\Sigma' N_{i_1, \ldots, i_n}(\omega_{i_1}^2 + \ldots + \omega_{i_n}^2 - \omega_{j_1}^2 - \ldots - \omega_{j_n}^2)^n \tag{2.9}$$

В случае системы с одной степенью свободы ($n = 1$, $s = 2$) формулы (2.8) и (2.9) совпадают, и выражение для $\det U$ принимает вид

$$\det U = \gamma_1\gamma_2(\det B)^2 = a_1^2 a_2^2 \gamma_1\gamma_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2$$

Отсюда следует, что для систем с одной степенью свободы частоты колебаний в двух испытаниях должны быть различными.

В случае системы с двумя степенями свободы ($n = 2$, $s = 4$) формула (2.9) имеет вид

$$\det B = \frac{1}{2}N_{1,2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}N_{1,3}(\omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_2^2 - \omega_4^2)^2 + \frac{1}{2}N_{1,4}(\omega_1^2 + \omega_4^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2)^2 \tag{2.10}$$

где

$$N_{1,2} = \frac{1}{2}\det\|a_1, a_2\|\det\|a_3, a_4\|$$

$$N_{1,3} = -\frac{1}{2}\det\|a_1, a_3\|\det\|a_2, a_4\|, \quad N_{1,4} = \frac{1}{2}\det\|a_1, a_4\|\det\|a_2, a_3\|$$

В частности, при совпадении частот $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_3 = \omega_4$ выражение для $\det U$ принимает вид

$$\det U = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4(\det B)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\{\det\|a_1, a_2\|\det\|a_3, a_4\|(\omega_1^2 - \omega_3^2)^2\}^2$$

Таким образом, в случае модели с двумя степенями свободы без демпфирования идентификационная система будет невырожденной, в частности, при $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3 = \omega_4$, если векторы амплитуд a_1, a_2 и a_3, a_4 попарно неколлинеарны.

В случае $n = 2$, $s = 4$ формула (2.8) имеет вид

$$\det B = 2N_{1,2}(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_3^2\omega_4^2) + 2N_{1,3}(\omega_1^2\omega_3^2 + \omega_2^2\omega_4^2) + 2N_{1,4}(\omega_1^2\omega_4^2 + \omega_2^2\omega_3^2) \tag{2.11}$$

Можно дать простой вывод формулы (2.10) из формулы (2.11). Перепишем формулу (2.11) в виде

$$\det B = W^T P W; \quad P = \begin{Vmatrix} 0 & N_{1,2} & N_{1,3} & N_{1,4} \\ N_{1,2} & 0 & N_{1,4} & N_{1,3} \\ N_{1,3} & N_{1,4} & 0 & N_{1,2} \\ N_{1,4} & N_{1,3} & N_{1,2} & 0 \end{Vmatrix}, \quad W = \begin{Vmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{Vmatrix}$$

Матрица P – симметрическая и, следовательно, приводится ортогональным преобразованием к диагональному виду. Ее след равен нулю, поэтому сумма собственных значений равна нулю. Собственные значения и собственные векторы имеют вид

$$\lambda_1 = N_{1,2} - N_{1,3} - N_{1,4} = 2N_{1,2}, \quad Y_1 = (1, 1, -1, -1)^T$$

$$\lambda_2 = -N_{1,2} + N_{1,3} - N_{1,4} = 2N_{1,3}, \quad Y_2 = (1, -1, 1, -1)^T$$

$$\lambda_3 = -N_{1,2} - N_{1,3} + N_{1,4} = 2N_{1,4}, \quad Y_3 = (1, -1, -1, 1)^T$$

$$\lambda_4 = N_{1,2} + N_{1,3} + N_{1,4} = 0, \quad Y_4 = (1, 1, 1, 1)^T$$

Сумма $N_{1,2} + N_{1,3} + N_{1,4}$ соответствует в формуле (2.6) определителю $\det B$ с одинаковыми строками и поэтому равна нулю. Векторы Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 имеют одинаковую евклидову норму 2. В главных осях матрица P реконструируется в виде

$$P = \frac{1}{4}(\lambda_1 Y_1 Y_1^T + \lambda_2 Y_2 Y_2^T + \lambda_3 Y_3 Y_3^T + \lambda_4 Y_4 Y_4^T) =$$

$$= \frac{1}{2}(N_{1,2} Y_2 Y_2^T + N_{1,3} Y_3 Y_3^T + N_{1,4} Y_4 Y_4^T)$$

Отсюда непосредственно следует формула (2.10).

Приведем еще вывод формулы (2.11) из формулы (2.10). Раскроем первый квадрат в формуле (2.10) и сгруппируем члены следующим образом:

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2)^2 = L + 4(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_3^2\omega_4^2)$$

$$L = \omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_3^4 + \omega_4^4 - 2(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_3^2 + \omega_1^2\omega_4^2 + \omega_2^2\omega_3^2 + \omega_2^2\omega_4^2 + \omega_3^2\omega_4^2)$$

Такое же слагаемое L будет и в двух других квадратах. При суммировании члены с множителем L дадут нуль в силу соотношения $N_{1,2} + N_{1,3} + N_{1,4} = 0$. Второе, явно выписанное, слагаемое при суммировании приводит к формуле (2.11).

3. Система уравнений второго порядка с демпфированием. Вернемся к общему уравнению (2.1) колебаний линейной механической системы с n степенями свободы. Для удобства вычисления определителя системы запишем уравнение (2.1) с измененным порядком членов, вводя составной $3n$-вектор υ и составную $(n \times 3n)$-матрицу R,

$$R\upsilon = f(t); \quad \upsilon = \left\|\ddot{x}^T, x^T, \dot{x}^T\right\|^T, \quad R = \|m, k, c\| \tag{3.1}$$

Рассмотрим s испытаний $\upsilon_i(t)$, $t \in [0, T_i]$ $(i = 1, \ldots, s)$. Идентификационные уравнения для определения матрицы R получим в результате тензорного умножения уравнения (3.1) на υ_i, интегрирования по $t \in [0, T_i]$ и суммирования по $i = 1, \ldots, s$

$$RV = H; \quad V = \sum_{i=1}^{s} \int_0^{T_i} \upsilon_i \upsilon_i^T dt, \quad H = \sum_{i=1}^{s} \int_0^{T_i} f_i \upsilon_i^T dt \tag{3.2}$$

Здесь $(3n \times 3n)$-матрица V аналогична матрице U из предыдущего раздела и является симметрической и неотрицательной. Конкретизируем структуру испытаний, пусть $x_i = a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$, тогда

$$\upsilon_i = \left\|-a_i^T \omega_i^2 \cos(\omega_i t + \varphi_i),\ a_i^T \cos(\omega_i t + \varphi_i),\ -a_i^T \omega_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)\right\|^T \tag{3.3}$$

После подстановки выражения (3.3) в уравнение (3.2) получим

$$V = \sum_{i=1}^{s} \left\| \begin{matrix} a_i a_i^T \omega_i^4 \gamma_i & -a_i a_i^T \omega_i^2 \gamma_i & -a_i a_i^T \omega_i^3 \alpha_i \\ -a_i a_i^T \omega_i^2 \gamma_i & a_i a_i^T \gamma_i & a_i a_i^T \omega_i \alpha_i \\ -a_i a_i^T \omega_i^3 \alpha_i & a_i a_i^T \omega_i \alpha_i & a_i a_i^T \omega_i^2 \beta_i \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} U \end{matrix} & \begin{matrix} -\Sigma a_i a_i^T \omega_i^3 \alpha_i \\ \Sigma a_i a_i^T \omega_i \alpha_i \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -\Sigma a_i a_i^T \omega_i^3 \alpha_i & \Sigma a_i a_i^T \omega_i \alpha_i \end{matrix} & DD^T \end{array} \right\| \tag{3.4}$$

Здесь

$$D = (\omega_1 \nu_1 a_1, \ldots, \omega_s \nu_s a_s), \quad \nu_i = \sqrt{\beta_i}$$

$$\beta_i = \int_0^{T_i} \sin^2(\omega_i t + \varphi_i) dt = \frac{1}{4\omega_i}(2\omega_i T_i - \sin 2(\omega_i T_i + \varphi_i) + \sin 2\varphi_i)$$

$$\alpha_i = \int_0^{T_i} \sin(\omega_i t + \varphi_i)\cos(\omega_i t + \varphi_i) dt = -\frac{1}{4\omega_i}(\cos 2(\omega_i T_i + \varphi_i) - \cos 2\varphi_i)$$

Заметим, что интегралы γ_i и β_i всегда положительны и содержат в своих выражениях линейные по T_i члены с положительными коэффициентами, а интеграл α_i – периодическая ограниченная функция от T_i. Предполагая, что T_i – достаточно большие положительные величины и $s \geq 2n$, представим $\det V$ в виде многочлена по степеням γ_i, β_i. Максимальную степень $3n$ будет иметь член $\det U\,(DD^T)$; степень остальных членов не превосходит $3n-2$; $\det(DD^T) \neq 0$, если матрица D имеет ранг n, что выполнено всегда, когда матрица B имеет ранг $2n$.

Таким образом, при достаточно длительных временах испытаний условия невырожденности матрицы U будут достаточными условиями невырожденности матрицы V и, таким образом, достаточными условиями невырожденности идентификационной системы уравнений.

В случае системы с одной степенью свободы с демпфированием и с двумя испытаниями $n = 1$, $s = 2$ формула (3.4) примет вид

$$\det V = a_1^2 a_2^2 \gamma_1 \gamma_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 \left\{ \frac{a_1^2 \omega_1^2}{\gamma_1}(\beta_1 \gamma_1 - \alpha_1^2) + \frac{a_2^2 \omega_2^2}{\gamma_2}(\beta_2 \gamma_2 - \alpha_2^2) \right\}$$

Величины $\beta_1\gamma_1 - \alpha_1^2$ и $\beta_2\gamma_2 - \alpha_2^2$ всегда положительны, и для успешной идентификации нужно только, чтобы, как и при отсутствии демпфирования, частоты колебаний в испытаниях были различны.

Авторы приносят благодарность Д. Фортюне и А.А. Бурову за обсуждение работы и замечания.

Работа выполнена в рамках сотрудничества между Вычислительным центром им. А.А. Дородницына Российской академии наук и Университетом г. Пуатье (Франция) и при финансовой поддержке программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-2000.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kanemori Y., Iwatsubo T.* Experimental study of dynamic fluid forces and moments for a long annular seal // Trans. ASME J. Tribology. 1992. V. 114. № 4. P. 773–778.
2. *Childs D., Hale K.* A test apparatus and facility to identify the rotordynamic coefficients of high-speed hydrostatic bearings // Trans. ASME. J. Tribology. 1994. V. 116. № 2. P. 337–344.
3. *Tieu A.K., Qiu Z.L.* Identification of sixteen dynamic coefficients of two journal bearings from experimental unbalance responses // Wear. 1994. V. 177. № 1. P. 63–69.
4. *Qiu Z.L., Tieu A.K.* Identification of sixteen dynamic coefficients of two journal bearings from impulse responses // Wear. 1997. V. 212. № 2. P. 206–212.
5. *Zhang Y.Y., Xie Y.B., Qiu D.M.* Identification of linearized oil-film coefficients in a flexible rotor-bearing system, Pt I: Model and simulations, Pt II: Experiment // J. Sound and Vibration. 1992. V. 152. № 3. P. 531–547; 549–559.
6. *Jiang G.D., Hu H., Xu W., Jin Z.W., Xie Y.B.* Identification of oil film coefficients of large journal bearings on a full scale journal bearing test rig // Tribology Intern. 1997. V. 30. № 11. P. 789–793.
7. *Tiwari R., Lees A.W., Friswell M.I.* Identification of dynamic bearing parameters: A Review // The shock and vibration digest. 2004. V. 36. № 2. P. 99–124.
8. *Burrows C.R, Sahinkaya M.N.* Frequency domain estimation of linearized oil film coefficients // Trans. ASME. J. Lubrific. Technology. 1982. V. 104. № 2. P. 210–215.
9. *Kostrzewsky G.J, Flack R.D.* Accuracy evaluation of experimental derived dynamic coefficients of fluid film bearings. Pt 1. Development of the method // Tribology Trans. 1990. V. 33. № 1. P. 105–114.
10. *Rouvas C., Murphy B.T., Hale R.K.* Bearing parameter identification using power spectral density methods // Proc. Inst. Mech. Eng.: Intern. Conf. Vibrations in Rotating Machinery, 1992–06. IMechE. 1992. C432/151. P. 297–303.
11. *Kurtin K., Childs D., San Andres L.A., Hale K.* Experimental versus theorical characteristics of a high- speed hybrid (combination hydrostatic and hydrodynamic) bearing // Trans. ASME. J. Tribology. 1993. V. 115. P. 160–169.
12. *Hua Zhou, Sanxing Zhao, Hua Xu, Jun Zhu.* An experimental study on oil-film dynamic coefficients // Tribology Intern. 2004. V. 37. № 3. P. 245–253.
13. *Muller-Karger C.M., Granados A.L.* Derivation of hydrodynamic bearing coefficients using the minimum square method // Trans. ASME. J. Tribology. 1997. V. 119. № 4. P. 802–807.

Пуатье (Франция), Москва
e-mail: vallee@lms.univ-poitiers.fr
stepsj@ccas.ru
charles@lms.univ-poitiers.fr

Поступила в редакцию
21.1.2005