

УДК 531.36

© 2005 г. А. П. Иванов

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В СИСТЕМАХ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Обсуждается проблема определения ускорений и реакций связей в системах с кулоновым трением. Показано, что реалистичное решение этой проблемы возможно лишь на основе учета деформаций в телах, составляющих систему. С этой целью исходная система расширяется за счет включения локальных деформаций в число обобщенных координат. При помощи асимптотических методов расширенная система разделяется на “медленную” исходную подсистему и “быструю” подсистему, служащую для определения реакций. Анализ быстрой подсистемы служит ключом к пониманию динамики в целом. Получены результаты о числе стационарных решений и их устойчивости, инвариантные вязкоупругим характеристикам контактных пар. Каждому устойчивому стационарному решению отвечает реализуемое движение исходной системы, а для отбора истинного движения требуется знание начальных деформаций и их производных по времени. Наряду со стационарными, “быстрая” подсистема может обладать устойчивыми осцилляционными решениями. Доказано, что устойчивым предельным циклом “быстрой” подсистемы отвечают такие движения исходной системы, в которых реакции колеблются около средних значений с высокой частотой. В качестве примеров рассмотрена система Пэнлеве – Клейна и задача о торможении колеса при помощи пары колодок.

Ранее подход, связанный с учетом деформаций и быстрых движений, широко применялся [1–5] для исследования систем с одной парой трения в связи с решением парадоксов Пэнлеве [6]; были обсуждены случаи, когда быстрая подсистема имеет единственное устойчивое равновесие или не имеет таких равновесий (катастрофа ударного типа). Примерами колебаний в звуковом диапазоне частот в системах с несколькими парами трения могут служить “рев” поршня [7] и “визг” торозных колодок [8].

1. Уравнения движения при учете деформаций. Пусть конфигурация некоторой системы твердых тел описывается координатами $\mathbf{q} \in R^n$. Перемещения подчинены некоторым связям, вообще говоря, неидеальным. Будем считать, что связи описываются соотношениями

$$q_j = 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (1.1)$$

Каждое из равенств (1.1) соответствует контакту какой-либо пары тел. С геометрической точки зрения оно задает плоскость, в которой лежат векторы возможных относительных перемещений этих тел, а также касательные составляющие $\mathbf{T}^{(j)}$ реакции $\mathbf{R}^{(j)}$. Единичный вектор \mathbf{n}_j , ортогональный этой плоскости в смысле метрики Якоби, определяемой при помощи кинетической энергии, задает направление нормальной составляющей реакции. Таким образом,

$$\mathbf{R}^{(j)} = \mathbf{T}^{(j)} + N_j \mathbf{n}_j, \quad j = 1, \dots, k$$

На этапе составления уравнений движения связи (1.1) не учитываем, а их реакции добавляем к активным силам. Используя основные теоремы динамики, запишем эти уравнения в виде

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{R}^{(1)}, \dots, \mathbf{R}^{(k)}), \quad \mathbf{q}, \mathbf{F}, \mathbf{R}^{(j)} \in R^n \quad (1.2)$$

Для описания трения используются законы вида

$$\mathbf{T}^{(j)} = \mathbf{T}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})N_j, \quad j = 1, \dots, k \quad (1.3)$$

Предполагается, что в рассматриваемый момент времени скорости относительно проскальзывания во всех контактах отличны от нуля.

Подставляя выражения (1.3) в уравнения (1.2), получим систему

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, N_1, \dots, N_k) \quad (1.4)$$

где функция \mathbf{G} кусочно непрерывно дифференцируема в некоторой области, включающей начальные значения переменных.

В классической механике систему (1.4) при учете равенств (1.1) используют для решения основной задачи динамики об определении обобщенных ускорений $\ddot{\mathbf{q}}$, а также нормальных реакций N_j . Один из недостатков такого подхода – невозможность описания высокочастотных колебаний в направлениях, нормальных поверхностям (1.1); такие колебания в некоторых случаях имеют важное практическое значение [7–9]. Кроме того, в системах с сухим трением возможны [6] парадоксальные ситуации неразрешимости системы (1.1), (1.2) или наличия у нее нескольких решений.

Для устранения этих недостатков откажемся от части (или всех) ограничений (1.1). С физической точки зрения это равносильно переходу от абсолютно твердых тел к деформируемым. Поскольку учет дополнительных степеней свободы приводит к усложнению анализа, при решении конкретных задач обычно учитывают лишь наиболее существенные отклонения от модели абсолютно твердого тела, принимая во внимание физические свойства тел, составляющих систему.

Пример. Две массы, соединенные невесомым стержнем, могут двигаться по параллельным направляющим. Данная система была предложена [6] для демонстрации парадоксов сухого трения. Здесь имеется три связи, выражающие невозможность схода масс с направляющих, а также неизменность длины стержня, и единственная координата q – перемещение масс вдоль направляющих. Для устранения парадоксов принималось во внимание [1] растяжение стержня, что приводит к появлению второй степени свободы. В качестве единственной дополнительной переменной предлагалось также [5] продольное смещение одной из направляющих. К системе с двумя дополнительными координатами можно прийти, считая стержень жестким, а направляющие – податливыми в нормальном направлении. Объединяя вышеуказанные предположения, можно построить модель с тремя и более дополнительными координатами.

Будем далее считать, что равенства (1.1) могут нарушаться вследствие деформаций, а нормальные реакции – некоторые дифференцируемые функции соответствующих деформаций и их скоростей:

$$N_j = N_j(q_j, \dot{q}_j), \quad \partial N_j / \partial q_j < 0, \quad \partial N_j / \partial \dot{q}_j < 0, \quad \partial N_j(0, 0) / \partial q_j \neq 0; \quad j = 1, \dots, k \quad (1.5)$$

Неравенства (1.5) выражают рост напряжений вместе с деформациями, а также наличие диссипации. Последняя группа этих неравенств означает, что жесткость связей при бесконечно малых деформациях отлична от нуля.

Подставив соотношения (1.5) в равенство (1.4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Такая модель непосредственно непригодна для анализа, так как функции (1.5) имеют сингулярный характер в смысле оценок $|q_j| \ll 1$, $|\partial N_j / \partial q_j| \gg 1$. Ввиду этого может оказаться, что малые начальные

возмущения существенно влияют на характер решения системы, и предельный переход $q_j \rightarrow 0$ в уравнениях (1.4) недопустим.

С целью регуляризации введем вместо q_j, \dot{q}_j новые фазовые переменные u_j, v_j ($j = 1, \dots, k$), значения которых не будут исчезающе малыми при вышеупомянутом предельном переходе.

В частности, можно положить

$$u_j = N_j(q_j, \dot{q}_j), \quad v_j = \dot{q}_j/\varepsilon, \quad j = 1, \dots, k \quad (1.6)$$

где ε – малый параметр, характеризующий скорость деформирования при данных нагрузках.

Вследствие первого из неравенств (1.5) замена (1.6) обратима. В результате ее проведения уравнения (1.4) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i &= G_i, \quad \varepsilon \dot{u}_j = U_j, \quad \varepsilon \dot{v}_j = G_j \\ U_j &= \varepsilon^2 \frac{\partial N_j}{\partial q_j} v_j + \varepsilon \frac{\partial N_j}{\partial \dot{q}_j} G_j, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}(t, q_j(u_j, \varepsilon v_j), q_i, \varepsilon v_i, \dot{q}_i); \quad j = 1, \dots, k; \quad i = k+1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.7)$$

При учете третьей группы неравенств (1.5) имеем

$$\dot{q}_j = O(\varepsilon), \quad q_j = O(\varepsilon^2); \quad j = 1, \dots, k$$

откуда

$$\partial N_j / \partial q_j = O(\varepsilon^{-2}), \quad \partial N_j / \partial \dot{q}_j = O(\varepsilon^{-1}) \quad j = 1, \dots, k \quad (1.8)$$

Вследствие (1.8) правые части системы (1.7) ограничены при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Переходя к “растянутому” времени $\tau = t/\varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \quad \mathbf{y}' = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{t}, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j), \quad \mathbf{y} = (\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j), \quad \mathbf{X} = (1, \mathbf{x}_{n+i}, \mathbf{G}_i), \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{U}_j, \mathbf{G}_j) \\ j &= 1, \dots, k; \quad i = k+1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.9)$$

где штрихом обозначается производная по τ .

В системе (1.9) G_i, U_j, G_j – кусочно непрерывно дифференцируемые функции от фазовых переменных параметров ε и t . Первая группа уравнений описывает “медленное” изменение фазовых переменных в классической модели, а оставшиеся уравнения описывают “быстрые” движения; в рамках классического подхода последние игнорируются, а дифференциальные уравнения заменяются алгебраическими уравнениями (1.1).

Пример. Материальная точка единичной массы скользит вдоль шероховатой направляющей под действием плоской системы сил. Введем систему координат XOY так, чтобы направляющая совпадала с осью абсцисс, а начальная скорость точки \dot{x} была положительной. Уравнения (1.2) имеют вид

$$\ddot{x} = -\mu|N| + X(x, \dot{x}), \quad \ddot{y} = N + Y(x, \dot{x}) \quad (1.10)$$

где μ – коэффициент трения. Примем зависимость (1.5) линейной:

$$N = -2bc\dot{y} - c^2 y, \quad c \gg 1 \quad (1.11)$$

Положим $\varepsilon = 1/c$ и перейдем в уравнениях (1.10), (1.11) к переменным $u = N, v = c\dot{y}$, $q_2 = x, p_2 = \dot{x}$ и “растянутому” времени $\tau = ct$. Имеем

$$q_2' = \varepsilon p_2, \quad p_2' = \varepsilon(X(q_2, p_2) - \mu|u|), \quad u' = -v - 2bu - 2bY(q_2, p_2), \quad v' = u + Y(q_2, p_2) \quad (1.12)$$

Если $\varepsilon = 0$, то переменные q_2 и p_2 не изменяются со временем, а все траектории на фазовой плоскости быстрых движений (u, v) стремятся к положению равновесия $u = -Y, v = 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, так как собственные значения матрицы этой линейной подсистемы отрицательны. Подставляя значение $u = -|Y|$ в первые два уравнения (1.12) и возвращаясь к исходному времени $t = \varepsilon\tau$, получим известное классическое уравнение

$$\ddot{x} = X - \mu|Y|$$

В данном примере все быстрые движения сходятся к глобальному аттрактору. Поэтому расширение классической модели за счет учета деформаций нецелесообразно. Тем не менее априори нельзя исключать и более сложные случаи быстрой динамики, когда аттракторов несколько или они имеют сложную структуру. В этих случаях игнорирование быстрых движений неправомерно.

Ниже предлагается систематический подход к анализу системы (1.9).

2. Асимптотическое разделение движений. Будем изучать систему (1.9) методами асимптотического разделения движений [10–12]. Введем в рассмотрение присоединенную систему

$$y' = Y(x, y, 0), \quad y(0) = y_0 \tag{2.1}$$

В уравнениях (2.1) значения x “замораживаются” и играют роль параметров. Система (2.1) имеет более низкую размерность, чем (1.9), что упрощает ее анализ. Цель такого анализа – отыскание аттракторов: притягивающих положений равновесия, предельных циклов и пр. Имея в виду, что в системе (1.9) переменные x меняются со временем, будем требовать от аттракторов структурной устойчивости. Для положений равновесия и предельных циклов для этого достаточно устойчивости по первому приближению.

Допустим, что при $x = x_0$ система (2.1) имеет положение равновесия $y = y^*$, причем все собственные значения матрицы Якоби

$$J_0 = J(x_0) = \|\partial Y(x_0, y^*, 0)/\partial y\|$$

имеют отрицательные действительные части. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (x_0, y^*) можно построить поверхность равновесий $y = \bar{y}(x)$ класса C_1 , в точках которой $Y(x, \bar{y}(x), 0) = 0$, причем $y^* = \bar{y}(x_0)$.

Определим систему сравнения так:

$$\bar{x} = \varepsilon X(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), 0), \quad \bar{x}(0) = x_0 \tag{2.2}$$

В системе (2.2) фазовыми переменными являются обобщенные координаты и скорости исходной системы (1.1), а деформации связей исключены: при возврате к исходной независимой переменной параметр ε исчезает.

Следующее известное утверждение [11, 12] ниже доказывается методом, позволяющим получить некоторые дальнейшие обобщения.

Предложение 1. Существуют такие положительные числа ε_1, T, C и δ , что для всех ε, τ, y_0 , удовлетворяющих условиям

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad 0 < \tau \leq T/\varepsilon, \quad \|y_0 - y^*\| < \delta$$

решения систем (1.9) и (2.2) близки друг другу в смысле неравенства

$$\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| + \|y(\tau) - \bar{y}(\bar{x})\| \leq C\varepsilon \tag{2.3}$$

Доказательство. При сделанных предположениях в системе (2.1) можно построить функцию Ляпунова в виде квадратичной формы относительно $w = y - \bar{y}(x)$

$$V(w) = 1/2(Bw, w), \quad V' = (Bw, J(x)w) + O(\|w\|^3) \leq -C_1 w^2 \tag{2.4}$$

где $C_1 = \text{const} > 0, B = B(x)$ – симметричная положительная матрица. Неравенство (2.4) удовлетворяется при достаточно малых значениях $\|w\|$ и $\|x - x_0\|$.

Заметим, что если $\varepsilon \neq 0$, то значение $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ не удовлетворяет системе (1.9). Тем не менее, функция (2.4) может служить мерой отклонения “быстрых” переменных от равновесных значений. Найдем производную от этой функции в силу уравнений (1.9)

$$V' = \left(\mathbf{B}\mathbf{w}, \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{w} + \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{w} + \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \varepsilon) \right) + O(\|\mathbf{w}\|^3) \leq -C_2 w^2 + C_3 \varepsilon \|\mathbf{w}\| \quad (2.5)$$

Неравенство (2.5) выполняется для некоторых постоянных C_2, C_3 , если числа $\varepsilon, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ достаточно малы, и все собственные значения характеристической матрицы

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \|\partial \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), 0) / \partial \mathbf{y}\|$$

имеют отрицательные действительные части. Малость величины $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ можно обеспечить за счет выбора постоянной T (не зависящей от ε).

Вследствие неравенства (2.5) величина V' отрицательна в шаровом слое

$$C_4 \geq \|\mathbf{w}\| \geq \varepsilon C_3 / C_2$$

где C_4 – постоянная. Значит, если этот слой содержит поверхность уровня $V(\mathbf{w}) = V(\mathbf{w}_0)$, то на интервале времени, для которого справедливо неравенство (2.5), выполнено неравенство $V(\mathbf{w}) \leq V(\mathbf{w}_0)$.

Для оценки величины отклонения $\alpha(\tau) = \mathbf{x}(\tau) - \bar{\mathbf{x}}(\tau)$ достаточно перейти к интегральным уравнениям

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \int_0^\tau \mathbf{X}(\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s), \varepsilon) ds, \quad \bar{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \int_0^\tau \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}(s), \bar{\mathbf{y}}(s), 0) ds$$

Отсюда следует, что

$$\alpha(\tau) \leq C_4 \varepsilon^2 \tau + C_5 \varepsilon \int_0^\tau \alpha(s) ds \quad (2.6)$$

По лемме Гронуолла

$$\alpha(\tau) \leq C_4 \varepsilon^2 \tau \exp(C_5 \varepsilon \tau)$$

откуда следует оценка (2.3).

Допустим теперь, что при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ система (2.1) имеет периодическое решение $\mathbf{y} = \Gamma_0(\tau)$, устойчивое по первому приближению. Тогда для достаточно близких к \mathbf{x}_0 значениям \mathbf{x} она также будет иметь периодическое решение $\mathbf{y} = \Gamma(\mathbf{x}, \tau)$, близкое к Γ_0 . Обозначим период этого решения $T(\mathbf{x})$.

Систему сравнения определим, усреднив правые части вдоль траектории $\Gamma(\mathbf{x}, \tau)$. Имеем

$$\bar{\mathbf{x}}' = \varepsilon \langle \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle, \quad \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \langle \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}) \rangle = \frac{1}{T(\bar{\mathbf{x}})} \int_0^{T(\bar{\mathbf{x}})} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \Gamma(\bar{\mathbf{x}}, \tau), 0) d\tau \quad (2.7)$$

Аналогично системе сравнения (2.2) в уравнениях (2.7) деформации исключены.

Предложение 2. Существуют такие положительные числа ε_1, T, C и δ , что для всех $\varepsilon, \tau, \mathbf{y}_0$, удовлетворяющих условиям

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad 0 < \tau \leq T/\varepsilon, \quad \|\mathbf{y}_0 - \Gamma(\mathbf{x}_0, 0)\| < \delta$$

решения систем (1.9) и (2.7) близки друг другу в смысле неравенства

$$\| \mathbf{x}(\tau) - \bar{\mathbf{x}}(\tau) \| + \| \mathbf{y}(\tau) - \Gamma(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \tau) \| \leq C\varepsilon \tag{2.8}$$

Формальное доказательство данного утверждения аналогично доказательству предложения 1 для случая дискретного времени. Переход к дискретной системе связан с построением отображения Пуанкаре в окрестности периодической траектории $\Gamma(\mathbf{x}, \tau)$. Вначале строится квадратичная функция Ляпунова для $\varepsilon = 0$, а затем она используется для оценки малости второго слагаемого в формуле (2.8). После этого остается воспользоваться теоремой Боголюбова об осреднении систем в стандартной форме.

3. Система с одной связью. Перейдем к качественному анализу системы (2.1). В простейшем случае, когда в соотношениях (1.1) $k = 1$, фазовое пространство двумерно. Типичные притягивающие множества в таких системах – положения равновесия и предельные циклы, и можно использовать результаты, представленные в разд. 2.

Будем считать, что фазовые переменные определены по формулам (1.6), где $k = 1$. Уравнения (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned} u' &= \Phi(u, v)v + \Psi(u, v)f(u), \quad v' = f(u) \\ \Phi &= \varepsilon^2 \frac{\partial N_1}{\partial q_1}, \quad \Psi = \varepsilon \frac{\partial N_1}{\partial \dot{q}_1}, \quad f(u) = G_1(t_0, q_1(u), q_i, 0, \dot{q}_i) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Положения равновесия системы (3.1) – точки вида $(u^*, 0)$, где $f(u^*) = 0$. Для матрицы Якоби в этих точках имеем

$$\mathbf{J}_0 = \begin{vmatrix} \Psi f'(u^*) & \Phi \\ f'(u^*) & 0 \end{vmatrix}$$

Поскольку в силу ограничений (1.5) $\Psi < 0, \Phi < 0$, приходим к следующему утверждению.

Предложение 3. Если

$$f(u^*) = 0, \quad f'(u^*) > 0 \tag{3.2}$$

то $(u^*, 0)$ – асимптотически устойчивое по первому приближению положение равновесия системы (3.1). При обратном знаке неравенства (3.2) имеет место неустойчивость.

Согласно предложению 1, каждому корню уравнения $f(u) = 0$, удовлетворяющему условию (3.2), отвечает решение полной системы (1.9), устойчивое в смысле неравенства (2.3). Отметим, что данный вывод о числе и устойчивости положений равновесия инвариантен виду зависимости $N(q, \dot{q})$ (в рамках ограничений (1.5)). В частности, можно выделить следующий важный частный случай.

Предложение 4. Если в системе (1.2), где $k = 1$, для некоторых значений $t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ частная производная $\partial F_1 / \partial N_1$ существует для почти всех N_1 , причем

$$\partial F_1 / \partial N_1 \geq c_1 > 0 \tag{3.3}$$

то основная задача динамики для системы (1.1), (1.2) имеет единственное стационарное решение, причем устойчивое.

Заметим, что условие (3.3) всегда выполнено в случаях, когда связь идеальна или имеется вязкое трение (сила трения не зависит от нормальной реакции). Действительно, исходя из уравнений Лагранжа, уравнения (1.2) можно представить в форме

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}(N_1, 0, \dots, 0)^T + \dots$$

где \mathbf{A} – матрица квадратичной части кинетической энергии, а невыписанные члены не зависят от N_1 . Следовательно, величина $\partial F_1 / \partial N_1$ равна угловому элементу положительно определенной матрицы \mathbf{A}^{-1} .

Наличие у обсуждаемой задачи осцилляционных решений, соответствующих предельным циклам системы (2.1), зависит от конкретного вида функции (1.5). Ограничимся рассмотрением простейшего и наиболее употребительного при практических расчетах случая, когда эта функция линейна (при этом ее частные производные постоянны).

Предложение 5. Если в системе (3.1) Φ, Ψ – постоянные, то эта система не имеет периодических решений, отличных от положений равновесия.

Доказательство. Пусть $\Pi(u)$ – некоторая первообразная для $f(u)$. Рассмотрим функцию

$$V(u, v) = 1/2\Phi v^2 - \Pi(u) \quad (3.4)$$

Производная функции (3.4) в силу системы (3.1) выглядит так:

$$V' = \Phi v v' - f(u)u' = -\Psi f^2(u)$$

Если величина $f(u)$ на некотором решении не равна тождественно нулю, то $V' < 0$, и это решение не может быть периодическим, что и требовалось.

Подведем итог. Для системы с одной связью динамика определяется числом нулей функции $f(u)$ в уравнении (3.1), для которых выполнено неравенство (3.2). Каждому такому значению u^* отвечает реалистичное решение основной задачи динамики, а их отсутствие свидетельствует о быстром неограниченном росте реакции N (катастрофа ударного типа). Отбор истинного решения из нескольких возможных должен основываться на учете начальных деформаций, как в классическом примере Эйлера бифуркации нагруженной колонны.

Пример. Составим уравнения движения в примере Пэнлеве – Клейна, считая стержень деформируемым, а направляющие – абсолютно жесткими. Допустим, что в данный момент времени частицы скользят вправо. Полагая их массы единичными, выразим основные теоремы динамики уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= X_1 - \mu_1 |N_1| - R \cos \varphi, & \ddot{x}_2 &= X_2 - \mu_2 |N_2| + R \cos \varphi \\ N_1 &= R \sin \varphi - Y_1, & N_2 &= -R \sin \varphi - Y_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

где x_1, x_2 – координаты частиц, (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) – приложенные к ним внешние силы, R – реакция стержня (неравенство $R > 0$ соответствует растянутому стержню), μ_1 и μ_2 – коэффициенты трения, φ – угол между стержнем и направляющими (изменениями этого угла вследствие деформаций пренебрегаем), $2l$ – длина стержня. Заметим, что аналогичная система рассматривалась [1, 4, 6] в частном случае $Y_1 = Y_2 = 0$.

Приняв во внимание, что $x_1 - x_2 = (2l - \delta) \cos \varphi$ и вычтя первое равенство (3.5) из второго, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} &= X^* + \mu_1^* |R - Y_1^*| - \mu_2^* |R + Y_2^*| + 2R \\ X^* &= (X_2 - X_1) / \cos \varphi, & \mu_{1,2}^* &= \mu_{1,2} \operatorname{tg} \varphi, & Y_{1,2}^* &= Y_{1,2} / \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.6)$$

Правая часть уравнения (3.6) совпадает с функцией $f(u)$ в (3.1), где $u = R$. Найдем нули этой функции в зависимости от параметров задачи. Введем обозначения

$$\mu_{\pm} = \mu_1^* \pm \mu_2^* \equiv (\mu_1 \pm \mu_2) \operatorname{tg} \varphi$$

Случай $Y_1^* + Y_2^* = 0$. Имеем

$$f(u) = X^* + \mu_{-} |u - Y_1^*| + 2u \quad (3.7)$$

График функции (3.7) представляет собой ломаную с угловыми коэффициентами звеньев $2 - \mu_+$ и $2 + \mu_-$ и угловой точкой $u_1 = Y_1^*$, $f_1 = X^* + 2Y_1^*$. Условия предложения 4 выражаются неравенством

$$|\mu_-| < 2 \tag{3.8}$$

которое совпадает с условием совместимости связей, полученным [4] в предположении, что $Y_1^* = Y_2^* = 0$.

При $\mu_- > 2$ угловая точка ломаной является минимумом. Значит, если $f_1 > 0$, то функция (3.7) не имеет нулей (ударная катастрофа), а если $f_1 < 0$, то она имеет два нуля $u_{1,2}^*$, причем $u_1^* < u_1, f'(u_1^*) < 0$ (неустойчивость), $u_2^* > u_1, f'(u_2^*) > 0$ (устойчивость).

При $\mu_- < -2$ угловая точка ломаной является максимумом. Значит, если $f_1 < 0$, то функция (3.7) не имеет нулей (ударная катастрофа), а если $f_1 > 0$, то она имеет два нуля $u_{1,2}^*$, причем $u_1^* < u_1, f'(u_1^*) > 0$ (устойчивость), $u_2^* > u_1, f'(u_2^*) < 0$ (неустойчивость).

В терминах теории особенностей, нарушение неравенства (3.8) приводит к складке [13].

Случай $Y_1^ + Y_2^* < 0$.* График функции (3.6) представляет собой ломаную с угловыми коэффициентами звеньев $2 - \mu_-$, $2 + \mu_+$ и $2 + \mu_-$. Результаты аналогичны приведенным выше: выполнение неравенства (3.8) гарантирует наличие единственного, причем устойчивого решения, а противоположный знак этого неравенства свидетельствует либо об ударной катастрофе, либо о сосуществовании устойчивого и неустойчивого решений (складка).

Случай $Y_1^ + Y_2^* > 0$.* График функции $f(u)$ представляет собой ломаную, звенья которой имеют угловые коэффициенты $2 - \mu_-$, $2 - \mu_+$ и $2 + \mu_-$. Если неравенство (3.8) имеет противоположный смысл, то два этих коэффициента (включая средний) отрицательны, а третий – положителен. По аналогии с предыдущим случаем имеем складку.

При

$$\mu_+ < 2 \tag{3.9}$$

выполнены условия предложения 3, и основная задача динамики имеет единственное, причем устойчивое решение для любых значений X^* , $Y_{1,2}^*$.

Если неравенство (3.8) выполнено, а знак неравенства (3.9) противоположный, ломаная будет зигзагообразной: наклон крайних ее звеньев положительный, а среднего – отрицательный. В этом случае в зависимости от значения X^* имеется либо единственное, причем устойчивое решение, либо два устойчивых решения плюс одно неустойчивое (сборка).

Отметим, что вывод о числе положений равновесия системы (3.5) вообще не связан с рассмотрением деформаций и может быть сделан из алгебраических соображений [13]. Что касается вывода о характере устойчивости, то он, как следует из дальнейшего, зависит от выбора пространства деформаций.

4. Случай двух связей. Если $k = 2$, то фазовое пространство системы (2.1) четырехмерно. По аналогии с уравнениями (3.1) запишем уравнения движения этой подсистемы в виде

$$\begin{aligned} u'_j &= \Phi_j(u_j, v_j)v_j + \Psi_j(u_j, v_j)f_j(u_j, u_2), & v'_j &= f_j(u_1, u_2) \\ f_j(u_1, u_2) &= G_j(t_0, q_1(u_1), q_2(u_2), q_i, 0, 0, \dot{q}_i); & j &= 1, 2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Положения равновесия системы (4.1) можно найти, решая совместно уравнения

$$f_j(u_1, u_2) = 0, \quad f_2(u_1, u_2) = 0 \quad (4.2)$$

Пусть (u_1^*, u_2^*) – некоторое решение системы (4.2). Составим матрицу Якоби

$$\mathbf{A} = \|a_{ij}\| = \|\partial f_i(u_1^*, u_2^*)/\partial u_j\| \quad (4.3)$$

Предложение 6. При выполнении условий

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \det \mathbf{A} > 0, \quad a_{12}a_{21} \geq 0 \quad (4.4)$$

точка $(\mathbf{u}^*, 0)$ будет устойчивым положением равновесия системы (4.1). Если же выполнено хотя бы одно из следующих двух условий: 1) $\det \mathbf{A} < 0$, 2) $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, то это положение равновесия неустойчиво.

Доказательство. Линеаризуя систему (4.1) в окрестности положения равновесия, получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \Psi \mathbf{A} \Phi \\ \mathbf{A} \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \text{diag}\{\Psi_1, \Psi_2\}, \quad \Phi = \text{diag}\{\Phi_1, \Phi_2\} \quad (4.5)$$

где значения функций Ψ_j, Φ_j вычисляются в положении равновесия.

Введем обозначения

$$\chi_0 = \Phi_1 \Phi_2, \quad \chi_1 = \Psi_1 \Phi_2 + \Psi_2 \Phi_1, \quad \chi_2 = \Psi_1 \Psi_2, \quad \chi_3 = a_{11} \Phi_1 + a_{22} \Phi_2, \quad \chi_4 = a_{11} \Psi_1 + a_{22} \Psi_2$$

Характеристическое уравнение для системы (4.5) выглядит так:

$$p_4 \lambda^4 + p_3 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 = 0 \quad (4.6)$$

$$p_4 = 1, \quad p_3 = -\chi_4, \quad p_2 = \chi_2 \det \mathbf{A} - \chi_3, \quad p_1 = \chi_1 \det \mathbf{A}, \quad p_0 = \chi_0 \det \mathbf{A}$$

Как известно, необходимые и достаточные условия принадлежности корней уравнения (4.6) левой полуплоскости таковы [14]:

$$p_s > 0, \quad s = 0, 1, 2, 3, 4; \quad p_4 p_1^2 - p_1 p_2 p_3 + p_0 p_3^2 < 0 \quad (4.7)$$

Докажем сначала утверждение о неустойчивости. Если $\det \mathbf{A} < 0$, то $p_0 < 0$, а если $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, то $p_3 < 0$ вне зависимости от значений $\Psi_s < 0$, $\Phi_s < 0$. В обоих случаях нарушена первая группа неравенств (4.7).

Для доказательства устойчивости заметим, что из первых трех условий (4.4) следует автоматическое выполнение первой группы неравенств (4.7), а последнее неравенство при учете выражений (4.6) запишется так:

$$\chi_1^2 \det \mathbf{A} < -\chi_0 \chi_1 \chi_3 \det \mathbf{A} + \chi_3 (a_{11} \Psi_1^2 \Phi_2 + a_{22} \Phi_1 \Psi_2^2) \quad (4.8)$$

Поскольку $a_{12}a_{21} > 0$, то $\det \mathbf{A} < a_{11}a_{22}$. Заменяя в левой части соотношения (4.8) $\det \mathbf{A}$ на $a_{11}a_{22}$ и отбрасывая в правой части первое слагаемое (которое всегда положительно), получим более сильное условие

$$\chi_1^2 a_{11} a_{22} < \chi_3 (a_{11} \Psi_1^2 \Phi_2 + a_{22} \Phi_1 \Psi_2^2) \quad (4.9)$$

Учитывая выражения для χ_1, χ_3 , раскрывая в соотношении (4.9) скобки и приводя подобные члены, придем к неравенству

$$2a_{11}a_{22}\Psi_1\Psi_2 < a_{11}^2\Psi_1^2 + a_{22}^2\Psi_2^2 \quad (4.10)$$

справедливость которого следует из теоремы о связи среднего арифметического со средним геометрическим (вообще говоря, неравенство (4.10) может заменяться равенством, но и в этом случае более слабое неравенство (4.8) выполнено в строгом смысле). Тем самым предложение доказано.

Замечание 1. Как и в рассмотренном в предыдущем разделе случае одной пары трения, условия предложения 6 связывают лишь динамические характеристики системы и инварианты вязкоупругим свойствам контактных пар. Покажем, что если матрица \mathbf{A} удовлетворяет первым трем условиям (4.4), но $a_{12}a_{21} < 0$, или же $\Delta > 0$, $a_{11}a_{22} < 0$, то положение равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от коэффициентов Ψ_s, Φ_s .

Рассмотрим сначала первый из этих случаев. Первое слагаемое в правой части неравенства (4.8) имеет четвертую степень по отношению к коэффициентам Φ_s , а остальные члены – лишь вторую. Следовательно, выполнения этого неравенства можно добиться за счет выбора $\Phi_1 = \Phi_2$ достаточно большими числами. С другой стороны, если эти числа близки к нулю, то в правой части неравенства (4.8) главным будет второе слагаемое. Если $a_{11}\Psi_1 = a_{22}\Phi_2$, то неравенство (4.9) перейдет в равенство, поэтому вследствие предположения $a_{12}a_{21} < 0$ условие (4.8) нарушается.

Во втором из указанных случаев, выбирая достаточно большим тот из коэффициентов Φ_s , который соответствует отрицательному элементу a_{ss} , получим $p_3 < 0$, что свидетельствует о неустойчивости. Напротив, если величина Φ_s достаточно мала, то условия устойчивости (4.7) выполнены.

Замечание 2. Допустим, что первые три условия (4.4) удовлетворены, а четвертое – нет. Тогда первая группа неравенств (4.7) выполнены, а справедливость последнего неравенства зависит от чисел Φ_s, Ψ_s , характеризующих вязкоупругие свойства деформаций. Варьируя эти числа, можно добиться изменения характера устойчивости. Это изменение сопровождается появлением у характеристического уравнения (4.6) пары чисто мнимых корней, что свидетельствует о бифуркации рождения цикла по сценарию Пуанкаре – Андронова – Хопфа.

Для систем с тремя и более парами трения результатов, аналогичных предложению 6, пока не получено. Нижеследующие утверждения, касающиеся данного случая, имеют менее общий характер.

Предложение 7. Если \mathbf{A} – симметричная положительно определенная матрица, то положение равновесия системы (4.1) асимптотически устойчиво при любых отрицательных числах Φ_s, Ψ_s .

Справедливость данного утверждения следует из теоремы Кельвина – Тэта – Четаева.

Предложение 8. Если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

$$1) \det \mathbf{A} < 0, 2) a_{ss} < 0, s = 1, \dots, k$$

то положение равновесия системы (4.1) неустойчиво при любых отрицательных числах Φ_s, Ψ_s .

Доказательство аналогично доказательству предложения 6.

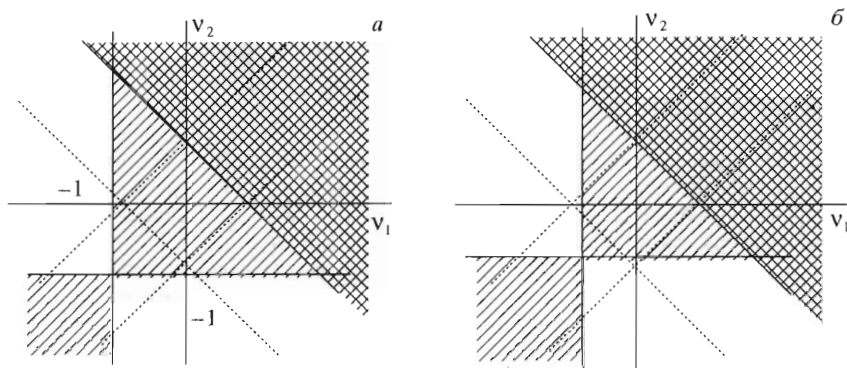
5. Анализ системы Пэнлеве – Клейна. Рассмотрим обсуждавшийся выше пример Пэнлеве – Клейна при других физических допущениях: длина стержня неизменна, а направляющие деформируемы. Будем считать, что $m_1 = m_2 = 1/2$. Уравнения движения стержня запишем в виде [13]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\mu_1|N_1| - \mu_2|N_2| + X, \quad \dot{y} = -N_1 + N_2 + Y \\ k^2 \ddot{\phi} &= h(\mu_1|N_1| - \mu_2|N_2|) - b(N_1 + N_2), \quad b = l \cos \phi \neq 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $k = l$ – радиус инерции стержня, $2h$ – расстояние между направляющими, x, y – координаты центра масс, ϕ – угол между стержнем и направляющими, X, Y и M – приложенные силы и момент.

Введем координаты $q_{1,2} = h - l \sin \phi \mp y$, представляющие собой локальные деформации направляющих. Пренебрегая в уравнениях движения изменениями переменных y, ϕ , получим при учете уравнений (5.1)

$$\ddot{q}_j = (-1)^j (N_2 - N_1 + Y) + \frac{b}{k^2} (b(N_1 + N_2) - M) - \frac{bh}{k^2} (\mu_1|N_1| - \mu_2|N_2|), \quad j = 1, 2 \quad (5.2)$$



Фиг. 1

Положения равновесия системы (5.2) найдем, приравнявая правые части к нулю. Складывая и вычитая уравнения системы, получим

$$\begin{aligned} N_1 &= N_2 + Y, & 2\kappa N_2 - \mu_1 |N_2 + Y| + \mu_2 |N_2| &= M^* \\ M^* &= M/h - \kappa Y, & \kappa &= b/h = \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned} \quad (5.3)$$

Поскольку второе уравнение (5.3) содержит два знака абсолютной величины, то в зависимости от коэффициентов трения и величин Y , M число решений варьируется от нуля до трех [13]. Матрица (4.3) такова:

$$\mathbf{A} = \sin^2 \varphi \begin{vmatrix} 1 + 2\kappa^2 - v_1 & -1 - v_2 \\ -1 - v_1 & 1 + 2\kappa^2 - v_2 \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

$$v_j = (-1)^{(j+1)} \kappa s_j \mu_j, \quad s_j = \operatorname{sign} N_j, \quad j = 1, 2$$

Определитель матрицы \mathbf{A} равен

$$\det \mathbf{A} = 2(2\kappa^2 - v_1 - v_2) \sin^2 \varphi \quad (5.5)$$

Предложение 6 для матрицы (5.4) приводит к таким результатам: при выполнении условий

$$v_1 + v_2 < 2\kappa^2, \quad v_{1,2} < 1 + 2\kappa^2 (1 + v_1)(1 + v_2) > 0 \quad (5.6)$$

положение равновесия асимптотически устойчиво, если же

$$v_1 + v_2 > 2\kappa^2 \quad (5.7)$$

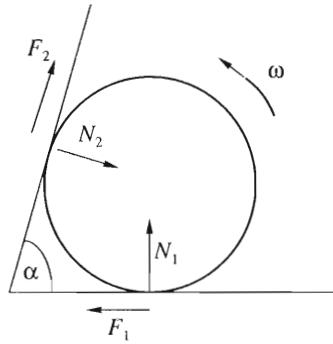
то неустойчиво.

На плоскости параметров v_1 , v_2 область (5.6) представляет собой объединение треугольника и прямоугольного сектора, а область (5.7) – полуплоскость (на фиг. 1 области неустойчивости показаны двойной штриховкой, а устойчивости – простой штриховкой).

При учете соотношений

$$\mu_j = |v_j|/\kappa, \quad j = 1, 2$$

плоскость делится четырьмя прямыми $\pm v_1 \pm v_2 = 2\kappa^2$ на части, различающиеся числом решений системы (5.3) (эти прямые показаны на фиг. 1 штриховыми линиями).



Фиг. 2

1°. Внутренность квадрата

$$|v_1| + |v_2| < 2\kappa^2 \tag{5.8}$$

соответствует регулярному случаю: система (5.3) имеет единственное решение для любых Y, M^* [13]. В зависимости от угла наклона стержня φ имеются две возможности:

1) если

$$\varphi \geq \arctg \sqrt{2} \approx 54.7^\circ \tag{5.9}$$

то квадрат (5.8) лежит внутри области устойчивости (5.6) (фиг. 1, а);

2) если неравенство (5.9) имеет противоположный смысл, то вышеупомянутый квадрат частично лежит в области устойчивости (5.6), а частично – в области, где характер устойчивости зависит от вида функций (1.5) (фиг. 1, б). Заметим, что изменение характера устойчивости связано в данном случае с бифуркацией рождения цикла, так как характеристическое уравнение (4.6) имеет нулевой корень лишь в точках прямой $v_1 + v_2 = 2\kappa^2$.

2°. При выполнении неравенства

$$\left| |v_1| - |v_2| \right| > 2\kappa^2 \tag{5.10}$$

система (5.3) в зависимости от Y, M^* имеет два решения или не имеет их вовсе [6]. Условие (5.10) выполнено в четырех прямоугольных секторах, образованных продолжениями сторон квадрата (5.8).

Допустим для определенности, что $\mu_1 > \mu_2 + 2\kappa$ (т.е. рассмотрим левый и правый секторы). Можно убедиться, что если система (5.3) имеет два решения, то они различаются знаком величины v_1 . На плоскости (v_1, v_2) им соответствуют точки, одна из которых лежит в правом секторе (неустойчивость), другая – в левом (устойчивость или возможная устойчивость).

3°. Если неравенства (5.8) и (5.10) выполнены в противоположном смысле, то система (5.3) может иметь одно или три решения [13]. Этому случаю на плоскости (v_1, v_2) соответствуют четыре полуполосы, примыкающие к сторонам квадрата (5.8). Анализ второго уравнения (5.3) показывает, что если решение единственно, то ему соответствует точка во второй, третьей или четвертой четвертях. В случае трех решений одно из них изображается точкой в первой четверти, два других – точками второй и четвертой четвертей. Таким образом, имеем два реалистичных решения уравнений движения. Чтобы определить, какое из решений будет реализовано в действительности, необходимо учитывать начальные деформации.

6. Пример осцилляционного решения. Рассмотрим торможение вращающегося диска при помощи двух одинаковых колодок, установленных под углом α друг к другу (фиг. 2). Зададим координаты q_1, q_2 как величины, противоположные нормаль-

ным деформациям колодок в точках контакта. Будем считать, что внешние силы прижимают диск к колодкам, и эти величины остаются отрицательными.

Теорема о движении центра масс в проекциях на направления, перпендикулярные колодкам, приводит к уравнениям

$$m\ddot{q}_1 = N_1 + N_2(\mu \sin \alpha - \cos \alpha) + F_1, \quad m\ddot{q}_2 = N_2 - N_1(\mu \sin \alpha + \cos \alpha) + F_2 \quad (6.1)$$

где m – масса диска, μ – коэффициент трения, F_1, F_2 – проекции главного вектора внешних сил, N_1, N_2 – нормальные реакции колодок.

Матрица (4.3) выглядит так:

$$A = \frac{1}{m} \begin{vmatrix} 1 & \mu \sin \alpha - \cos \alpha \\ -\mu \sin \alpha - \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} \quad (6.2)$$

Поскольку диагональные элементы и определитель матрицы (6.2) положительны, система (6.1) имеет единственное положение равновесия [13]. Условия (4.4) сводятся к неравенству

$$\mu < |\operatorname{ctg} \alpha| \quad (6.3)$$

Неравенство (6.3) гарантирует устойчивость равновесия вне зависимости от конкретных зависимостей напряжений от деформаций. Если угол α прямой, неравенство не имеет решений. Для тупых и острых углов неравенство справедливо для достаточно малых значений коэффициента трения.

Обсудим случай прямого угла α подробнее. Поскольку условие (6.3) не выполнено, для решения вопроса об устойчивости необходимо учитывать вид функций (1.5). Первая группа неравенств (4.7) выполняется для любых допустимых значений Φ_j, Ψ_j ($j = 1, 2$), а последнее неравенство может быть как выполнено, так и не выполнено. Обращение этого неравенства в равенство соответствует бифуркации рождения цикла. Частоту рождающегося в этой бифуркации периодического движения можно оценить из первого приближения, а для определения направления бифуркации и амплитуды необходим нелинейный анализ [15].

Допустим, что в равновесии $\Phi_j = \Phi, \Psi_j = \Psi$ ($j = 1, 2$). Тогда условия устойчивости (4.7) сводятся к неравенству

$$-\mu^2 \Phi < \Psi^2(1 + \mu^2) \quad (6.4)$$

Изменение смысла неравенства (6.4) свидетельствует о бифуркации рождения цикла, причем частота периодического движения равна $\omega = -(\mu^2 + 1)\Psi/\mu$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00520).

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейн Ф. К критике Пэнлеве кулоновых законов трения // Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 249–256.
2. Пфайфер Ф. К вопросу о так называемых кулоновых законах трения. // Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 264–316.
3. Ле Суан Ань. Парадоксы Пэнлеве и закон движения механических систем с кулоновым трением // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 520–529.
4. Фуфаев Н.А. Динамика системы в примере Пэнлеве – Клейна. О парадоксах Пэнлеве // Изв. РАН. МТТ. 1991. № 4. С. 48–53.
5. Неймарк Ю.И. Еще раз о парадоксах Пэнлеве // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 17–21.

6. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
7. *Скуридин М.А.* Динамика двузвенных и кинестатика диадных механизмов (с учетом трения) // Тр. семинара по теории машин и механизмов. 1947. Т. 2. Вып. 6. С. 55–100.
8. *Ropp K., Rudolph M.* Brake squeal. / Detection, utilization and avoidance of nonlinear dynamical effects in engineering applications. Aachen: Shaker Verlag, 2001. P. 197–225.
9. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
10. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
11. *Градиштейн И.С.* Применение теории устойчивости А.М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Мат. сб. 1953. Т. 32(74). № 2. С. 263–286.
12. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
13. *Иванов А.П.* Об особенностях динамики систем с неидеальными связями // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 212–221.
14. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
15. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. N.Y.: Springer, 1997. 459 p.

Москва
e-mail: apivanov@orc.ru

Поступила в редакцию
8.I.2004