УДК 531.36

© 2005 г. А. П. Маркеев

КОНСТРУКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ НОРМАЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Рассматривается периодическая по времени гамильтонова система. Предполагается, что система имеет положение равновесия, а функция Гамильтона аналитична в его окрестности. Предлагается конструктивный алгоритм получения коэффициентов нормальной формы функции Гамильтона. В его основе лежит специальная процедура построения и анализа симплектического отображения окрестности положения равновесия на себя. Изложение ведется на примере системы с двумя степенями свободы. Коэффициенты нормальной формы выражены через коэффициенты производящей функции отображения. Разработанный алгоритм применяется для решения задачи об устойчивости относительного равновесия волчка Ковалевской при вертикальных колебаниях его точки подвеса.

Для многих задач об устойчивости движения и нелинейных колебаниях механических систем необходимо исследование поведения траекторий канонической системы дифференциальных уравнений в окрестности ее положения равновесия, совпадающего с началом координат фазового пространства. При этом функция Гамильтона часто бывает периодической по времени или явно от времени не зависит.

Один из основных технических приемов исследования – метод нормальных форм Пуанкаре, который получил широкое развитие и применение в разнообразных нелинейных задачах [1–3]. Сущность этого метода состоит в том, что при помощи канонического преобразования функция Гамильтона приводится к некоторой простейшей (нормальной) форме. Соответствующая ей каноническая система дифференциальных уравнений существенно упрощается, что значительно облегчает ее исследование.

Если гамильтониан не зависит явно от времени, то процедура получения его нормальной формы сводится к алгебраическим операциям с коэффициентами разложения гамильтониана в ряд в окрестности положения равновесия [1, 2, 4]. И, например, условия устойчивости и неустойчивости положения равновесия можно явно выразить через коэффициенты исходного гамильтониана [4].

Но если функция Гамильтона явно зависит от времени, то процедура получения нормальной формы довольно сложна. Сначала надо построить периодическое по времени линейное каноническое преобразование, нормализующее квадратичную по фазовым переменным часть гамильтониана. А затем осуществляется нормализация членов третьей и более высоких степеней в разложении гамильтониана в ряд. Соответствующее нелинейное каноническое преобразование близко к тождественному и задается рядами с периодическими по времени коэффициентами. Эти ряды строятся при помощи преобразования Биркгофа [5] или при помощи его современных модификаций типа преобразования Депри – Хори [6]. Построение этих рядов – весьма громоздкая процедура. Техническая сторона процедуры нормализации может быть сильно упрощена, если использовать метод точечных отображений (см. [4], гл.6).

В предлагаемом алгоритме, как и в предложенном ранее [4], осуществляется нормализация не самой периодической по времени функции Гамильтона, а производящей функции отображения за период, порождаемого соответствующей этой функции Гамильтона канонической системой дифференциальных уравнений. А уже затем по нормальной форме производящей функции восстанавливается нормальная форма функции Гамильтона.

Как и ранее [4], построение отображения основано на решении в виде рядов уравнения Гамильтона – Якоби в окрестности положения равновесия. Но в отличие от имеющегося алгоритма [4] здесь не требуется предварительной нормализации квадратичной части исходного гамильтониана.

Предлагаемый алгоритм весьма прост. Он ненамного сложнее алгоритма нормализации автономной гамильтоновой системы. Правда, алгоритм должен, как правило, осуществляться при помощи компьютерных вычислений. Но для получения коэффициентов разложения в ряд производящей функции отображения требуется только один раз проинтегрировать по периоду систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую очень просто получить по исходному гамильтониану, а начальные условия заранее известны. Коэффициенты же нормальной формы гамильтониана явно выражаются через коэффициенты разложения в ряд производящей функции отображения.

1. Алгоритм нормализации периодического гамильтониана. *Построение отображения*. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, движение которой описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2, t)$. Будем считать, что функция H аналитична в окрестности точки $q_j = p_j = 0$ $(j = 1, 2)$, соответствующей положению равновесия системы, а ее разложение в ряд имеет вид

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \tag{1.1}$$

где H_k – форма степени k относительно q_1, q_2, p_1, p_2 с 2π – периодическими по t коэффициентами.

Пусть $q_j^{(0)}$, $p_j^{(0)}$ $(j = 1, 2)$ – начальные значения величин q_j, p_j, а $q_j^{(1)}$, $p_j^{(1)}$ – их значения при $t = 2\pi$. Если $q_j^{(0)}$, $p_j^{(0)}$ достаточно малы, то величины $q_j^{(1)}$, $p_j^{(1)}$ будут аналитическими функциями относительно $q_1^{(0)}$, $q_2^{(0)}$, $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$ и задают отображение T окрестности положения равновесия на себя. Укажем алгоритм построения этого отображения.

Пусть $\mathbf{X}(t)$ – фундаментальная матрица решений линеаризованных уравнений движения. Ее элементы удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_{js}}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial x_{j+2,s}}, \quad \frac{dx_{j+2,s}}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_{js}}, \quad H_2 = H_2(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}, x_{4s}, t);$$
$$j = 1, 2; \quad s = 1, 2, 3, 4 \tag{1.2}$$

и начальным условиям

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_4 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{E}_4$ – единичная матрица четвертого порядка.

Вместо переменных q_j, p_j $(j = 1, 2)$ введем новые канонически сопряженные переменные u_j, υ_j по формуле

$$\begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{Vmatrix} = \mathbf{X}(t) \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

Эта замена является каноническим унивалентным преобразованием [7]. Разложение нового гамильтониана $G(u_1, u_2, \upsilon_1, \upsilon_2, t)$ в ряд не содержит членов второй степени относительно $u_1, u_2, \upsilon_1, \upsilon_2$:

$$G = G_3 + G_4 + \dots \tag{1.5}$$

причем G_k – это форма H_k из разложения (1.1), в которой старые переменные выражены через новые по формуле (1.4).

Замена (1.4) приводит задачу построения отображения T к нахождению отображения $q_j^{(0)}$, $p_j^{(0)} \to u_j^{(1)}$, $v_j^{(1)}$ за период изменения t от 0 до 2π. При этом $q_j^{(0)} = u_j^{(0)}$, $p_j^{(0)} = v_j^{(0)}$, а

$$\left\| \begin{matrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{matrix} \right\| = \mathbf{X}(2\pi) \left\| \begin{matrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{matrix} \right\| \tag{1.6}$$

Так как в разложении (1.5) отсутствуют члены второй степени, отображение $q_j^{(0)}$, $p_j^{(0)} \to u_j^{(1)}$, $v_j^{(1)}$ близко к тождественному. Зададим его неявно при помощи равенств

$$\begin{gathered} q_j^{(0)} = \frac{\partial S}{\partial p_j^{(0)}}, \quad v_j^{(1)} = \frac{\partial S}{\partial u_j^{(1)}}; \quad j = 1, 2 \\ S = u_1^{(1)} p_1^{(0)} + u_2^{(1)} p_2^{(0)} + S_3(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) + S_4(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) + \dots \end{gathered} \tag{1.7}$$

где S – вычисленная при $t = 2\pi$ функция

$$\Phi = u_1^{(1)} p_1^{(0)} + u_2^{(1)} p_2^{(0)} + \Phi_3(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, t) + \Phi_4(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, t) + \dots \tag{1.8}$$

удовлетворяющая уравнению Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + G\left(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_1^{(1)}}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2^{(1)}}, t\right) = 0; \quad \Phi_k(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, 0) \equiv 0, \quad k = 3, 4, \dots \tag{1.9}$$

Подставив разложения (1.5) и (1.8) в левую часть уравнения (1.9) и приравняв нулю совокупности членов третьей, четвертой и т.д. степеней, получим уравнения для форм Φ_3, Φ_4, ...

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} = -G_3, \quad \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} = -G_4 - \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial G_3}{\partial p_j^{(0)}} \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_j^{(1)}}, \dots; \quad G_k = G_k(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, t) \tag{1.10}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$, $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$ в левой и правой частях этих уравнений, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов форм Φ_3, Φ_4, ... В силу тождеств из (1.9) значения этих коэффициентов при $t = 0$ равны нулю. Уравнения для коэффициентов должны рассматриваться совместно с системой уравнений (1.2), (1.3), определяющей элементы фундаментальной матрицы $\mathbf{X}(t)$, входящие в замену (1.4) и поэтому содержащиеся в выражениях для функций G_3, G_4, … . Проинтегрировав получающуюся таким образом систему от $t = 0$ до $t = 2\pi$, получим функции S_3, S_4, … и потом из равенств (1.6) и (1.7) найдем явный вид отображения T:

$$
\left\| \begin{matrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{matrix} \right\| = \mathbf{X}(2\pi) \left\| \begin{matrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{matrix} \right\|
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{q}_j &= q_j^{(0)} - \frac{\partial S_3}{\partial p_j^{(0)}} + \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 S_3}{\partial p_j^{(0)} \partial q_l^{(0)}} \frac{\partial S_3}{\partial p_l^{(0)}} - \frac{\partial S_4}{\partial p_j^{(0)}} + O_4 \\
\tilde{p}_j &= p_j^{(0)} + \frac{\partial S_3}{\partial q_j^{(0)}} - \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_j^{(0)} \partial q_l^{(0)}} \frac{\partial S_3}{\partial p_l^{(0)}} + \frac{\partial S_4}{\partial q_j^{(0)}} + O_4
\end{aligned} \qquad (1.11)
$$

$$
S_k = S_k(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}); \quad j = 1, 2; \quad k = 3, 4
$$

Через O_4 обозначены члены выше третьей степени относительно $q_1^{(0)}$, $q_2^{(0)}$, $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$.

Линейная нормализация отображения (1.11). Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$ линеаризованного отображения (1.11) является возвратным и имеет вид

$$
\varrho^4 - a_1\varrho^3 + a_2\varrho^2 - a_1\varrho + 1 = 0 \qquad (1.12)
$$

где a_1 – след матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, a_2 – сумма всех ее главных миноров второго порядка. Будем рассматривать только случай, когда параметры системы лежат внутри области устойчивости положения равновесия $q_j = p_j = 0$ ($j = 1, 2$) в первом приближении. В плоскости коэффициентов a_1, a_2 эта область задается системой неравенств [8]

$$
-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < (a_2 + 2)^2/4 \qquad (1.13)
$$

При выполнении этих неравенств корни уравнения (1.12) комплексно сопряженные, различные и имеют модули, равные единице. Характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, 2$) будут чисто мнимыми.

В данном разделе делается замена переменных, приводящая линейную часть отображения (1.11) к вещественной нормальной форме. Эту замену можно построить следующим образом. Зададим какие-либо (произвольные) знаки величин λ_j ($j = 1, 2$) и обозначим через $\mathbf{e}_j$ собственный вектор матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, соответствующий корню (мультипликатору) $\varrho_j = e^{i2\pi\lambda_j}$ уравнения (1.12). Для действительной и мнимой частей $\mathbf{r}_j$ и $\mathbf{s}_j$ вектора $\mathbf{e}_j$ имеем следующую систему уравнений:

$$
\mathbf{X}(2\pi)\mathbf{r}_j = \cos 2\pi\lambda_j \mathbf{r}_j - \sin 2\pi\lambda_j \mathbf{s}_j, \quad \mathbf{X}(2\pi)\mathbf{s}_j = \cos 2\pi\lambda_j \mathbf{s}_j + \sin 2\pi\lambda_j \mathbf{r}_j \qquad (1.14)
$$

Пусть $\mathbf{r}_j^*$, $\mathbf{s}_j^*$ – какое-либо нетривиальное решение системы (1.14). Через g_j обозначим скалярное произведение векторов $\mathbf{r}_j^*$ и $\mathbf{I}\mathbf{s}_j^*$, т.е.

$$g_j = (\mathbf{r}_j^*, \mathbf{I}\mathbf{s}_j^*), \quad \mathbf{I} = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_2 \\ -\mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

где $\mathbf{E}_2$ – единичная матрица второго порядка. Можно показать [4], что величины g_j ($j = 1, 2$) отличны от нуля.

Введем обозначения

$$\delta_j = \operatorname{sign} g_j, \quad \sigma_j = \delta_j \lambda_j, \quad c_j = |g_j|^{-1/2}, \quad j = 1, 2 \tag{1.15}$$

и образуем матрицу $\mathbf{N}$ четвертого порядка, у которой j-й и $(j+2)$-й столбцы равны соответственно $c_j \delta_j \mathbf{r}_j^*$ и $c_j \mathbf{s}_j^*$ ($j = 1, 2$).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрица $\mathbf{N}$ симплектическая и приводит матрицу $\mathbf{X}(2\pi)$ к вещественной нормальной форме $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{N}'\mathbf{I}\mathbf{N} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{N}^{-1}\mathbf{X}(2\pi)\mathbf{N} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} \mathbf{G}_c & \mathbf{G}_s \\ -\mathbf{G}_s & \mathbf{G}_c \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{G}_c = \begin{Vmatrix} \cos 2\pi\sigma_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi\sigma_2 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{G}_s = \begin{Vmatrix} \sin 2\pi\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sin 2\pi\sigma_2 \end{Vmatrix}$$

Матрица $\mathbf{G}$ задает два независимых поворота на углы $2\pi\sigma_1$ и $2\pi\sigma_2$.

Вместо переменных q_j, p_j ($j = 1, 2$) введем в отображении (1.11) новые переменные Q_j, P_j ($j = 1, 2$) при помощи унивалентного канонического преобразования, задаваемого матрицей $\mathbf{N}$:

$$\begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{Vmatrix} = \mathbf{N} \begin{Vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{Vmatrix} \tag{1.16}$$

Опустив промежуточные выкладки, сразу выпишем отображение (1.11) в новых переменных

$$\begin{Vmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Vmatrix} = \mathbf{G} \begin{Vmatrix} \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \end{Vmatrix} \tag{1.17}$$

$$\tilde{Q}_j = Q_j^{(0)} - \frac{\partial F_3}{\partial P_j^{(0)}} + \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 F_3}{\partial P_j^{(0)} \partial Q_l^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_l^{(0)}} - \frac{\partial F_4}{\partial P_j^{(0)}} + O_4$$

$$\tilde{P}_j = P_j^{(0)} + \frac{\partial F_3}{\partial Q_j^{(0)}} - \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_j^{(0)} \partial Q_l^{(0)}} \frac{\partial F_3}{\partial P_l^{(0)}} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_j^{(0)}} + O_4; \quad j = 1, 2$$

Здесь

$$F_3 = S_3^* \tag{1.18}$$

$$F_4 = S_4^* + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[(n_{1,2+j}n_{3,2+j} + n_{2,2+j}n_{4,2+j})\left(\frac{\partial S_3^*}{\partial Q_j^{(0)}}\right)^2 + (n_{1j}n_{3j} + n_{2j}n_{4j})\left(\frac{\partial S_3^*}{\partial P_j^{(0)}}\right)^2\right] -$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\left[(n_{13}n_{3j} + n_{23}n_{4j})\frac{\partial S_3^*}{\partial Q_1^{(0)}}\frac{\partial S_3^*}{\partial P_j^{(0)}} + (n_{14}n_{3j} + n_{24}n_{4j})\frac{\partial S_3^*}{\partial Q_2^{(0)}}\frac{\partial S_3^*}{\partial P_j^{(0)}}\right] +$$

$$+ (n_{13}n_{34} + n_{23}n_{44})\frac{\partial S_3^*}{\partial Q_1^{(0)}}\frac{\partial S_3^*}{\partial Q_2^{(0)}} + (n_{11}n_{32} + n_{21}n_{42})\frac{\partial S_3^*}{\partial P_1^{(0)}}\frac{\partial S_3^*}{\partial P_2^{(0)}} \tag{1.19}$$

где n_{rs} – элементы матрицы $\mathbf{N}$, а S_k^* $(k = 3, 4)$ – формы S_k из (1.11), в которых $q_j^{(0)}$, $p_j^{(0)}$ выражены через $Q_j^{(0)}$, $P_j^{(0)}$ в соответствии с заменой переменных (1.16).

Линеаризованному отображению (1.17) соответствует нормальная форма H_2^* квадратичной части H_2 исходного гамильтониана (1.1):

$$H_2^* = \frac{1}{2}\sigma_1(Q_1^2 + P_1^2) + \frac{1}{2}\sigma_2(Q_2^2 + P_2^2) \tag{1.20}$$

Нелинейная нормализация отображения. Нелинейную нормализацию удобнее провести в комплексных переменных. Сделаем в (1.17) унивалентное каноническое преобразование $Q_1, Q_2, P_1, P_2 \to x_1, x_2, y_1, y_2$ по формулам

$$Q_j = \frac{1+i}{2}(x_j + y_j), \quad P_j = -\frac{1-i}{2}(x_j - y_j); \quad j = 1, 2 \tag{1.21}$$

где i – мнимая единица.

В комплексных переменных x_j, y_j отображение (1.17) принимает вид

$$\begin{aligned} x_j^{(1)} &= \varrho_j\left(x_j^{(0)} - \frac{\partial Z_3}{\partial y_j^{(0)}} + \sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^2 Z_3}{\partial y_j^{(0)}\partial x_l^{(0)}}\frac{\partial Z_3}{\partial y_l^{(0)}} - \frac{\partial Z_4}{\partial y_j^{(0)}} + O_4\right) \\ y_j^{(1)} &= \varrho_{j+2}\left(y_j^{(0)} + \frac{\partial Z_3}{\partial x_j^{(0)}} - \sum_{l=1}^{2}\frac{\partial^2 Z_3}{\partial x_j^{(0)}\partial x_l^{(0)}}\frac{\partial Z_3}{\partial y_l^{(0)}} + \frac{\partial Z_4}{\partial x_j^{(0)}} + O_4\right); \quad j = 1, 2 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь

$$\varrho_j = e^{i2\pi\sigma_j}, \quad \varrho_{j+2} = e^{-i2\pi\sigma_j}; \quad j = 1, 2 \tag{1.23}$$

– корни характеристического уравнения (1.12), а

$$Z_3 = F_3^*, \quad Z_4 = F_4^* + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2}\left[\left(\frac{\partial F_3^*}{\partial x_j^{(0)}}\right)^2 - \left(\frac{\partial F_3^*}{\partial y_j^{(0)}}\right)^2 + 2\frac{\partial F_3^*}{\partial x_j^{(0)}}\frac{\partial F_3^*}{\partial y_j^{(0)}}\right] \tag{1.24}$$

где F_k^* $(k = 1, 2)$ – формы F_k, определяемые соотношениями (1.18) и (1.19), в которых $Q_j^{(0)}$, $P_j^{(0)}$ выражены через $x_j^{(0)}$, $y_j^{(0)}$ по формулам (1.21). Формы Z_k из соотношений (1.24) будем записывать в виде сумм

$$Z_k = \sum z_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} x_1^{(0)^{\nu_1}} x_2^{(0)^{\nu_2}} y_1^{(0)^{\mu_1}} y_2^{(0)^{\mu_2}}; \quad k = 3, 4$$

Здесь (и далее при использовании аналогичных представлений для форм) суммирование производится по целым неотрицательным числам ν_1, ν_2, μ_1, μ_2, сумма которых равна k.

Нормализация отображения (1.22) в членах второй степени. Вместо переменных x_j, y_j $(j = 1, 2)$ введем новые переменные ξ_j, η_j $(j = 1, 2)$ при помощи производящей функции $R(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2)$ вида

$$R = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + R_3 + R_4 + \ldots; \quad R_s = \sum r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \eta_1^{\mu_1} \eta_2^{\mu_2} \tag{1.25}$$

Из равенств

$$y_j = \frac{\partial R}{\partial x_j}, \quad \xi_j = \frac{\partial R}{\partial \eta_j}; \quad j = 1, 2$$

находим явные выражения старых переменных через новые

$$\begin{aligned} x_j &= \xi_j - \frac{\partial R_3}{\partial \eta_j} + \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 R_3}{\partial \eta_j \partial \xi_l} \frac{\partial R_3}{\partial \eta_l} - \frac{\partial R_4}{\partial \eta_j} + O_4 \\ y_j &= \eta_j + \frac{\partial R_3}{\partial \xi_j} - \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 R_3}{\partial \xi_j \partial \xi_l} \frac{\partial R_3}{\partial \eta_l} + \frac{\partial R_4}{\partial \xi_j} + O_4; \quad j = 1, 2 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Здесь R_k – функции из разложения (1.25), в которых переменные x_j заменены на ξ_j.

При помощи равенств (1.26) выразим величины $x_j^{(1)}$, $y_j^{(1)}$ и $x_j^{(0)}$, $y_j^{(0)}$ через $\xi_j^{(1)}$, $\eta_j^{(1)}$ и $\xi_j^{(0)}$, $\eta_j^{(0)}$ соответственно и подставим их в соотношения (1.22). Разрешив затем полученные равенства относительно $\xi_j^{(1)}$, $\eta_j^{(1)}$, получим отображение в новых переменных

$$\xi_j^{(1)} = \varrho_j \left(\xi_j^{(0)} - \frac{\partial W_3}{\partial \eta_j^{(0)}} + \ldots \right), \quad \eta_j^{(1)} = \varrho_{j+2} \left(\eta_j^{(0)} + \frac{\partial W_3}{\partial \xi_j^{(0)}} + \ldots \right); \quad j = 1, 2 \tag{1.27}$$

где многоточие означает совокупность слагаемых, степень которых относительно $\xi_1^{(0)}$, $\xi_2^{(0)}$, $\eta_1^{(0)}$, $\eta_2^{(0)}$ выше второй, а

$$\begin{aligned} W_3 &= Z_3(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}) + R_3(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}) - \\ &- R_3(\varrho_1\xi_1^{(0)}, \varrho_2\xi_2^{(0)}, \varrho_3\eta_1^{(0)}, \varrho_4\eta_2^{(0)}) \end{aligned} \tag{1.28}$$

Подберем функцию R_3 так, чтобы максимально упростить (или даже совсем уничтожить) члены второй степени в отображении (1.27).

Запишем W_3 в виде суммы

$$W_3 = \sum w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \xi_1^{(0)^{\nu_1}} \xi_2^{(0)^{\nu_2}} \eta_1^{(0)^{\mu_1}} \eta_2^{(0)^{\mu_2}}$$

Из равенств (1.23) и (1.28) имеем следующие выражения для ее коэффициентов:

$$w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = z_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + \left(1 - e^{i2\pi l_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}}\right) r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}; \quad l_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = (\nu_1 - \mu_1)\sigma_1 + (\nu_2 - \mu_2)\sigma_2 \quad (1.29)$$

Внутри области (1.13) устойчивости линеаризованного отображения невозможны резонансы до второго порядка включительно. Предположим, что нет и резонансов третьего порядка, т.е. невозможно равенство

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 = n \qquad (1.30)$$

где n – произвольное целое число, а k_1, k_2 – целые числа, удовлетворяющие равенству $|k_1| + |k_2| = 3$. Тогда число $l_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ в соотношениях (1.29) не будет целым и, положив

$$r_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \frac{z_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}}{e^{i2\pi l_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}} - 1} \qquad (1.31)$$

получим $w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = 0$. Тогда $W_3 = 0$ и в нормализованном отображении (1.27) будут отсутствовать члены второй степени.

Пусть теперь в системе есть один резонанс третьего порядка. Будем рассматривать не произвольные резонансы, а только те, для которых числа k_1 и k_2 в соотношении (1.30) удовлетворяют неравенству $k_1k_2 \geq 0$. Только такие резонансы могут привести устойчивую в первом приближении систему к ее неустойчивости в нелинейном приближении [9]. Далее для определенности будем считать, что числа k_1 и k_2 неотрицательны. Таким образом, предполагается, что в системе реализуется одно из следующих четырех резонансных соотношений:

$$1)\ 3\sigma_1 = n, \quad 2)\ 3\sigma_2 = n, \quad 3)\ \sigma_1 + 2\sigma_2 = n, \quad 4)\ 2\sigma_1 + \sigma_2 = n \qquad (1.32)$$

Тогда в W_3 нельзя уничтожить два одночлена, для которых величина $l_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ равна n или $-n$. Нормализованное в членах второй степени отображение будет задаваться равенствами (1.27), в которых

$$W_3 = z_{k_1k_200} \xi_1^{(0)^{k_1}} \xi_2^{(0)^{k_2}} + z_{00k_1k_2} \eta_1^{(0)^{k_1}} \eta_2^{(0)^{k_2}} \qquad (1.33)$$

Нормализация отображения в членах третьей степени. Пусть резонансы третьего порядка отсутствуют. Выбрав коэффициенты формы R_3 по формуле (1.31), уничтожим в отображении (1.27) все члены второй степени. Вычисления показывают, что при таком выборе R_3 отображение запишется в виде

$$\xi_j^{(1)} = \varrho_j \left(\xi_j^{(0)} - \frac{\partial W_4}{\partial \eta_j^{(0)}} + O_4 \right), \quad \eta_j^{(1)} = \varrho_{j+2} \left(\eta_j^{(0)} + \frac{\partial W_4}{\partial \xi_j^{(0)}} + O_4 \right); \quad j = 1, 2 \qquad (1.34)$$

$$W_4 = Z_4(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}) + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial Z_3(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)})}{\partial \eta_j^{(0)}} \frac{\partial R_3(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)})}{\partial \xi_j^{(0)}} +$$
$$+ R_4(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}) - R_4(\varrho_1\xi_1^{(0)}, \varrho_2\xi_2^{(0)}, \varrho_3\eta_1^{(0)}, \varrho_4\eta_2^{(0)}) \qquad (1.35)$$

Пусть в системе нет резонансов четвертого порядка. Можно попытаться выбрать форму R_4 так, чтобы полностью уничтожить члены третьей степени в отображении (1.34). Это однако сделать невозможно. Как видно из выражений (1.29), в функции W_4 неуничтожаемы одночлены, для которых $\nu_1 = \mu_1$, $\nu_2 = \mu_2$. Нормализованное в членах третьей степени отображение запишется в виде равенств (1.34), в которых

$$W_4 = w_{2020}\xi_1^{(0)^2}\eta_1^{(0)^2} + w_{1111}\xi_1^{(0)}\xi_2^{(0)}\eta_1^{(0)}\eta_2^{(0)} + w_{0202}\xi_2^{(0)^2}\eta_2^{(0)^2} \tag{1.36}$$

Коэффициенты формы (1.36) – вещественные числа. Они выражаются через коэффициенты форм F_3 и F_4 из соотношений (1.18) и (1.19) по формулам (3.7)–(3.9), разд. 3.

Пусть теперь в системе есть резонанс четвертого порядка, т.е. выполняется равенство (1.30), в котором $|k_1| + |k_2| = 4$. Как и при резонансе третьего порядка, ограничимся рассмотрением однократных резонансов и только таких, для которых числа k_1 и k_2 неотрицательны. Возможны следующие пять таких резонансов:

$$1)\ 4\sigma_1 = n, \quad 2)\ 4\sigma_2 = n, \quad 3)\ 2(\sigma_1 + \sigma_2) = n, \quad 4)\ \sigma_1 + 3\sigma_2 = n, \quad 5)\ 3\sigma_1 + \sigma_2 = n \tag{1.37}$$

Для каждого из этих резонансов в нормализованном отображении (1.34) форма W_4 помимо неуничтожаемых одночленов из формы (1.36) будет содержать еще два одночлена, характерных для данного конкретного резонанса:

$$\begin{gathered} W_4 = w_{2020}\xi_1^{(0)^2}\eta_1^{(0)^2} + w_{1111}\xi_1^{(0)}\xi_2^{(0)}\eta_1^{(0)}\eta_2^{(0)} + w_{0202}\xi_2^{(0)^2}\eta_2^{(0)^2} + \\ + w_{k_1k_200}\xi_1^{(0)^{k_1}}\xi_2^{(0)^{k_2}} + w_{00k_1k_2}\eta_1^{(0)^{k_1}}\eta_2^{(0)^{k_2}} \end{gathered} \tag{1.38}$$

Последние (резонансные) коэффициенты в форме (1.38) – комплексно-сопряженные числа:

$$w_{k_1k_200} = \mu_{k_1k_200} - i\nu_{k_1k_200}, \quad w_{00k_1k_2} = \mu_{k_1k_200} + i\nu_{k_1k_200} \tag{1.39}$$

Выражения для величин $\mu_{k_1k_200}$ и $\nu_{k_1k_200}$ приведены в разд.3 (формулы (3.10)–(3.19)).

Нормальная форма гамильтониана. По нормальной форме отображения уже несложно построить соответствующую 2π-периодическую по t нормальную форму $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t)$ исходной функции Гамильтона (1.1). Если нет резонансов до четвертого порядка включительно, то

$$\Gamma = i\sigma_1\xi_1\eta_1 + i\sigma_2\xi_2\eta_2 - \frac{1}{2\pi}(w_{2020}\xi_1^2\eta_1^2 + w_{1111}\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 + w_{0202}\xi_2^2\eta_2^2) + O_5 \tag{1.40}$$

где O_5 – члены выше четвертой степени относительно ξ_j, η_j, а w_{0202}, w_{1111}, w_{0202} – коэффициенты формы (1.36).

Если есть однократный резонанс третьего порядка (см. равенства (1.30), (1.32)), то

$$\Gamma = i\sigma_1\xi_1\eta_1 + i\sigma_2\xi_2\eta_2 - \frac{1}{2\pi}(z_{k_1k_200}e^{-int}\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2} + z_{00k_1k_2}e^{int}\eta_1^{k_1}\eta_2^{k_2}) + O_4 \tag{1.41}$$

Здесь $z_{k_1k_200}$, $z_{00k_1k_2}$ – коэффициенты формы (1.33).

Если резонансы третьего порядка отсутствуют, но есть однократный резонанс четвертого порядка (см. равенства (1.30), (1.37)), то

$$\begin{gathered} \Gamma = i\sigma_1\xi_1\eta_1 + i\sigma_2\xi_2\eta_2 - \frac{1}{2\pi}(w_{2020}\xi_1^2\eta_1^2 + w_{1111}\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 + w_{0202}\xi_2^2\eta_2^2 + \\ + w_{k_1k_200}e^{-int}\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2} + w_{00k_1k_2}e^{int}\eta_1^{k_1}\eta_2^{k_2}) + O_5 \end{gathered} \tag{1.42}$$

где $w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ – коэффициенты формы (1.38).

В вещественных канонически сопряженных переменных r_j, φ_j ($j = 1, 2$), вводимых при помощи унивалентного канонического преобразования

$$\xi_j = -\frac{1+i}{2}\sqrt{2r_j}e^{i\varphi_j}, \quad \eta_j = \frac{1+i}{2}\sqrt{2r_j}e^{-i\varphi_j}; \quad i = 1, 2 \tag{1.43}$$

нормализованные гамильтонианы (1.40), (1.41), (1.42) примут соответственно такие формы:

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}) \tag{1.44}$$

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + \frac{\sqrt{2}}{4\pi}r_1^{k_1/2}r_2^{k_2/2}(\alpha_{k_1k_200}\sin\gamma + \beta_{k_1k_200}\cos\gamma) + O((r_1 + r_2)^2) \tag{1.45}$$

$$H = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 + r_1^{k_1/2}r_2^{k_2/2}(\alpha_{k_1k_200}\sin\gamma +$$

$$+ \beta_{k_1k_200}\cos\gamma) + O((r_1 + r_2)^{5/2}) \tag{1.46}$$

Здесь

$$c_{20} = \frac{1}{2\pi}w_{2020}, \quad c_{11} = \frac{1}{2\pi}w_{1111}, \quad c_{02} = \frac{1}{2\pi}w_{0202} \tag{1.47}$$

$$\alpha_{k_1k_200} = \frac{1}{\pi}\nu_{k_1k_200}, \quad \beta_{k_1k_200} = \frac{1}{\pi}\mu_{k_1k_200}, \quad \gamma = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 - nt \tag{1.48}$$

2. Об устойчивости относительного равновесия твердого тела при колебаниях его точки подвеса. Рассмотрим твердое тело, движущееся в однородном поле тяжести. Пусть $O_*X_*Y_*Z_*$ – неподвижная система координат, ось O_*Z_* которой направлена вертикально вверх. Предположим, что одна точка O тела движется вдоль вертикали O_*Z_* по гармоническому закону $O_*O = -a\cos(\Omega t)$ ($a > 0$). Пусть mg – вес тела, а $\mathbf{l}$ – радиус-вектор центра тяжести относительно точки O. С телом свяжем систему координат $Oxyz$, направив ее оси вдоль главных осей инерции тела для точки O. Соответствующие моменты инерции равны A, B, C. Еще одна система координат $OXYZ$ движется поступательно, ее оси параллельны соответствующим осям системы $O_*X_*Y_*Z_*$.

Существуют два положения относительного (в системе $OXYZ$) равновесия тела, когда его центр тяжести лежит на вертикали O_*Z_*. Одно равновесие отвечает нормальному положению тела (центр тяжести расположен ниже точки O), а второе отвечает перевернутому положению тела (центр тяжести расположен выше точки O). Исследуем задачу об устойчивости этих положений равновесия тела. Будем считать, что тело обладает геометрией масс волчка Ковалевской. Тогда $A = B = 2C$, а центр тяжести можно считать лежащим на оси Ox.

Функция Гамильтона. Взаимную ориентацию трехгранников $Oxyz$ и $OXYZ$ будем задавать при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ. Пусть $\mathbf{v}_0$ – скорость точки O тела, а p, q, r – компоненты вектора угловой скорости тела в системе координат $Oxyz$. Кинетическая и потенциальная энергия вычисляются по формулам

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + m(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{l}) + \frac{1}{2}C(2p^2 + 2q^2 + r^2), \quad \Pi = mgl\sin\theta\sin\varphi$$

Если отбросить слагаемые, не зависящие от ψ, θ, φ и их производных по времени, то получим следующее выражение для функции Лагранжа $L = T - \Pi$:

$$L = C(\dot\psi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{1}{2}C(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)^2 + ma\Omega l\sin(\Omega t)(\dot\varphi\sin\theta\cos\varphi +$$

$$+ \dot\theta\cos\theta\sin\varphi) - mgl\sin\theta\sin\varphi \tag{2.1}$$

Обобщенные импульсы вычисляем обычным образом:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \tag{2.2}$$

Координата ψ – циклическая, поэтому $p_\psi = \text{const}$. Будем считать, что $p_\psi = 0$. Тогда при помощи равенств (2.1) и (2.2) можно стандартным путем получить функцию Гамильтона $H = H(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi, t)$. Введем затем безразмерное "время" $\tau = \Omega t$ и перейдем к новым координатам и импульсам q_j, p_j ($j = 1, 2$) при помощи канонического (с валентностью $(C\Omega)^{-1}$) преобразования

$$\begin{gathered} \varphi = \frac{3}{2}\pi + q_1, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + q_2 \\ p_\varphi = C\Omega p_1 + ma\Omega l \sin\tau \sin q_1, \quad p_\theta = C\Omega p_2 + ma\Omega l \sin\tau \sin q_2 \end{gathered} \tag{2.3}$$

В новых переменных функция Гамильтона будет такой:

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{4}\left(p_1 + 2\beta\sin\tau\sin q_1 \sin^2\frac{q_2}{2}\right)^2 (\operatorname{tg}^2 q_2 + 2) + \\ & + \frac{1}{4}\left(p_2 + 2\beta\sin\tau\sin q_2 \sin^2\frac{q_1}{2}\right)^2 - \alpha\cos q_1 \cos q_2 - \beta\cos\tau(\cos q_1 + \cos q_2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{mgl}{C\Omega^2}, \quad \beta = \frac{mal}{C}$$

О гамильтониане возмущенного движения. Уравнения движения с гамильтонианом (2.4) допускают два частных решения: $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ и $q_1 = \pi, q_2 = p_1 = p_2 = 0$, отвечающих нормальному и перевернутому положениям относительного равновесия тела. Гамильтониан возмущенного движения для нормального положения равновесия тела совпадает с самим гамильтонианом (2.4). Его разложение в ряд по степеням q_j, p_j имеет вид (слагаемые, не зависящие от q_j, p_j, отброшены)

$$H = H_2 + H_4 + \ldots \tag{2.5}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta\cos\tau)q_1^2 + \frac{1}{4}p_2^2 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta\cos\tau)q_2^2 \tag{2.6}$$

$$H_4 = -\frac{1}{24}(\alpha + \beta\cos\tau)(q_1^4 + q_2^4) + \frac{1}{4}q_2^2(p_1^2 - \alpha q_1^2) + \frac{1}{4}\beta\sin\tau q_1 q_2(q_1 p_2 + 2q_2 p_1) \tag{2.7}$$

Для перевернутого положения равновесия введем возмущения q_j', p_j', сделав такую каноническую замену переменных:

$$q_1 = \pi + q_1', \quad q_2 = q_2', \quad p_1 = p_1', \quad p_2 = p_2' - 2\beta\sin\tau\sin q_2'$$

Если в соответствующем гамильтониане возмущенного движения заменить τ на $\tau + \pi$, изменить знак у параметра α и опустить штрихи в обозначениях переменных q_j', p_j', то получим гамильтониан, в точности совпадающий с гамильтонианом (2.4). Поэтому при анализе устойчивости положений относительного равновесия тела можно в качестве гамильтониана возмущенного движения взять функцию (2.4), считая, что $\beta \geq 0$, а α – величина любого знака. В результате анализа полуплоскость $\beta \geq 0$ разобьется на области устойчивости и неустойчивости. Те из них, где $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, будут областями устойчивости и неустойчивости нормального положения равновесия. Области, в которых $\alpha < 0$, $\beta \ge 0$, после зеркального отражения относительно оси $\alpha = 0$ дадут области устойчивости и неустойчивости перевернутого положения тела.

Результаты исследования устойчивости. Линейная задача. В первом приближении уравнения возмущенного движения для пар канонически сопряженных переменных q_1, p_1 и q_2, p_2 разделяются. Характеристическое уравнение (1.12) принимает вид

$$(\rho^2 - 2A_1\rho + 1)(\rho^2 - 2A_2\rho + 1) = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(x_{11}(2\pi) + x_{33}(2\pi)), \quad A_2 = \frac{1}{2}(x_{22}(2\pi) + x_{44}(2\pi))$$

Области устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров α, β получаются наложением двух диаграмм Айнса – Стретта для уравнения Матье [10].

Области устойчивости в первом приближении задаются системой неравенств $|A_1| < 1$, $|A_2| < 1$. Если хотя бы одно из этих неравенств выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость.

Далее, чтобы не иметь дело со счетным множеством областей устойчивости и неустойчивости в полуплоскости $\beta \ge 0$ допустимых значений параметров, ограничимся только частью этой полуплоскости, выделяемой неравенствами $\alpha \le 2$, $0 \le \beta \le 10$. При таких значениях параметров существует четыре области устойчивости в первом приближении. Они представляют собой множества внутренних точек треугольников g_s ($s = 1, ..., 4$), основаниями которых служат отрезки [0, 1/4], [1/4, 1/2], [1/2, 1], [1, 2] оси $\beta = 0$. Противоположные этим основаниям вершины Q_s треугольников – точки $Q_1(-0.0851, 0.5942)$, $Q_2(0.3687, 0.2547)$, $Q_3(0.9216, 0.9776)$, $Q_4(1.7924, 2.2558)$ (фигура). Левую и правую криволинейные границы треугольников g_s зададим уравнениями $\alpha = \alpha_s^{(l)}(\beta)$ и $\alpha = \alpha_s^{(r)}(\beta)$ соответственно. При малых β имеем

$$\alpha_1^{(l)} = -\frac{1}{4}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \alpha_1^{(r)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\beta + O(\beta^3), \quad \alpha_2^{(l)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta + O(\beta^3)$$

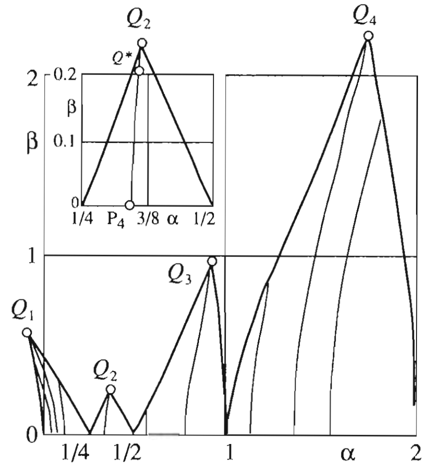
$$\alpha_2^{(r)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta + O(\beta^3), \quad \alpha_3^{(l)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta + O(\beta^3)$$

$$\alpha_3^{(r)} = 1 - \frac{1}{12}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \alpha_4^{(l)} = 1 + \frac{5}{12}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \alpha_4^{(r)} = 2 - \frac{1}{24}\beta^2 + O(\beta^4)$$

Для значений α, β, удовлетворяющих неравенствам $\alpha \le 2$, $0 \le \beta \le 10$ и лежащих вне указанных областей g_s ($s = 1,\ldots, 4$), имеет место неустойчивость в строгой нелинейной постановке задачи.

Нормальная форма квадратичной части (2.6) гамильтониана возмущенного движения имеет вид (1.20). При $\beta = 0$ имеем $\sigma_1 = \sqrt{\alpha}$, $\sigma_2 = \sqrt{\alpha/2}$. Воспользовавшись непрерывностью характеристических показателей, можно получить формулы для вычисления величин σ_1 и σ_2 в областях g_s устойчивости в первом приближении. Если ввести обозначение $c_j = (2\pi)^{-1}\arccos A_j$ ($j = 1, 2$), то $\sigma_1 = c_1$, $\sigma_2 = c_2$ в области g_1, $\sigma_1 = 1 - c_1$, $\sigma_2 = c_2$ в области g_2, $\sigma_1 = 1 - c_1$, $\sigma_2 = 1 - c_2$ в области g_3, $\sigma_1 = 1 + c_1$, $\sigma_2 = 1 - c_2$ в области g_4.

Нелинейная задача. Резонансы третьего порядка в исследуемой задаче об устойчивости равновесия тела оказались несущественными, так как разложение (2.5) не содержит формы третьей степени H_3. Из структуры форм (2.6) и (2.7) видно, что



также несущественны те из резонансов четвертого порядка (1.30), в которых числа k_1 и k_2 нечетны. Вычисления показали, что резонансы четвертого порядка (1.30), в которых числа k_1 и k_2 имеют разные знаки, в рассматриваемых областях устойчивости в первом приближении не реализуются, а в случае одинаковых знаков k_1 и k_2 возможны только девять резонансов:

$$\begin{gathered} 1)\ 4\sigma_1 = 1, \quad 2)\ 2(\sigma_1+\sigma_2) = 1, \quad 3)\ 4\sigma_2 = 1, \quad 4)\ 2(\sigma_1+\sigma_2) = 2, \quad 5)\ 4\sigma_1 = 3 \\ 6)\ 2(\sigma_1+\sigma_2) = 3, \quad 7)\ 4\sigma_2 = 3, \quad 8)\ 2(\sigma_1+\sigma_2) = 4, \quad 9)\ 4\sigma_1 = 5 \end{gathered} \tag{2.8}$$

В плоскости α, β каждому из резонансных соотношений (2.8) соответствует кривая, исходящая из точки P_m (α_m, 0) оси $\beta = 0$, причем

$$\begin{gathered} \alpha_1 = 0.0625, \quad \alpha_2 = 0.0858, \quad \alpha_3 = 0.1250, \quad \alpha_4 = 0.3431, \quad \alpha_5 = 0.5625 \\ \alpha_6 = 0.7721, \quad \alpha_7 = 1.1250, \quad \alpha_8 = 1.3726, \quad \alpha_9 = 1.5625 \end{gathered}$$

Резонансные кривые показаны на фигуре. В области g_1 существует три резонансные кривые *1–3*, в области g_2 – одна кривая *4*, в области g_3 – две кривые *5*, *6*, в области g_4 – три кривые *7–9*.

Вне резонансных кривых (2.8) гамильтониан возмущенного движения (2.5) имеет нормальную форму (1.44). Если

$$D = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0 \tag{2.9}$$

то исследуемое положение равновесия устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [4, 11]. Кроме того, если функция

$$F(r_1, r_2) = c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 \tag{2.10}$$

знакоопределенна при $r_1 \geq 0$, $r_1 \geq 0$, то положение равновесия формально устойчиво [4, 9, 12].

При резонансе четвертого порядка нормализованный гамильтониан имеет вид (1.46). При выполнении неравенства

$$|F(k_1, k_2)| > k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2} \sqrt{\alpha_{k_1k_200}^2 + \beta_{k_1k_200}^2} \tag{2.11}$$

положение равновесия устойчиво в третьем приближении (т.е. при учете в разложении (2.5) членов до H_4 включительно). Если же это неравенство выполняется с противоположным знаком, то положение равновесия неустойчиво по Ляпунову [4].

Вычисления по алгоритму разд. 1 показали, что для значений параметров α, β, лежащих в рассматриваемых областях устойчивости в первом приближении вне кривых (2.8), величина D отрицательна. Поэтому для таких параметров положение относительного равновесия тела устойчиво для большинства начальных условий, а также и формально устойчиво.

На всех резонансных кривых (2.8), кроме кривой $2(\sigma_1 + \sigma_2) = 2$, выполняется неравенство (2.11), поэтому на них имеет место устойчивость в третьем приближении. Кривая же $2(\sigma_1 + \sigma_2) = 2$ разбивается точкой $Q_*(0.3622, 0.2161)$ на участки устойчивости и неустойчивости (левая верхняя часть фигуры). На участке P_4Q_* имеет место устойчивость в третьем приближении, а на участке Q_*Q_2 относительное равновесие тела неустойчиво по Ляпунову.

3. Расчетные формулы. В этом разделе приведены формулы для вычисления коэффициентов нормальных форм (1.44)–(1.46). Для форм F_k и F_k^* ($k = 3, 4$), определяемых равенствами (1.18), (1.19) и (1.24), введем обозначения

$$F_k = \sum f_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} {Q_1^{(0)}}^{\nu_1} {Q_2^{(0)}}^{\nu_2} {P_1^{(0)}}^{\mu_1} {P_2^{(0)}}^{\mu_2}, \quad F_k^* = \sum f^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} {x_1^{(0)}}^{\nu_1} {x_2^{(0)}}^{\nu_2} {y_1^{(0)}}^{\mu_1} {y_2^{(0)}}^{\mu_2} \tag{3.1}$$

Для формы F_3^* имеем $f^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = z_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$ и справедливы соотношения

$$f^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = -\frac{1-i}{4}(a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + ib_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}), \quad f^*_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = -\frac{1-i}{4}(a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} - ib_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}) \tag{3.2}$$

$$(a_{3000} = f_{3000} - f_{1020}), \quad (b_{3000} = f_{2010} - f_{0030}), \quad (a_{2100} = f_{2100} - f_{1011} - f_{0120})$$

$$(b_{2100} = f_{2001} + f_{1110} - f_{0021}), \quad (a_{2010} = f_{1020} + 3f_{3000}), \quad (b_{2010} = f_{2010} + 3f_{0030})$$

$$(a_{1110} = 2(f_{2100} + f_{0120})), \quad (b_{1110} = 2(f_{2001} + f_{0021})) \tag{3.3}$$

$$a_{2001} = f_{2100} + f_{1011} - f_{0120}, \quad b_{2001} = f_{0021} + f_{1110} - f_{2001}$$

$$a_{1002} = f_{1200} - f_{1002} + f_{0111}, \quad b_{1002} = f_{0210} - f_{1101} - f_{0012}$$

Здесь и далее равенство, заключенное в скобки, означает, что помимо этого выписанного равенства имеется соответствующее ему, которое получается одновременной перестановкой первых двух и последних двух индексов. Например, помимо первого из равенств (3.3) имеется равенство $a_{0300} = f_{0300} - f_{0102}$.

Коэффициенты f^*_{2020}, f^*_{1111}, f^*_{0202} формы F_4^* вещественны:

$$(f^*_{2020} = -(3f_{4000} + f_{2020} + 3f_{0040})/2), \quad f^*_{1111} = -(f_{2200} + f_{2002} + f_{0220} + f_{0022}) \tag{3.4}$$

Остальные, нужные для нормализации коэффициенты формы F_4^* являются попарно комплексно – сопряженными:

$$f^*_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = \frac{1}{4}(a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} + ib_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}), \quad f^*_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = \frac{1}{4}(a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} - ib_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2})$$

причем

$$(a_{4000} = f_{2020} - f_{4000} - f_{0040}), \quad (b_{4000} = f_{1030} - f_{3010})$$

$$(a_{1300} = f_{0211} + f_{1102} - f_{1300} - f_{0013}), \quad (b_{1300} = f_{0112} + f_{1003} - f_{1201} - f_{0310}) \tag{3.5}$$

$$a_{2200} = f_{1111} - f_{2200} + f_{2002} - f_{0022} + f_{0220}, \quad b_{2200} = f_{1012} - f_{1210} + f_{0121} - f_{2101}$$

Функцию W_4, определяемую равенством (1.35), запишем в виде суммы

$$W_4 = \sum w_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}\xi_1^{(0)^{\nu_1}}\xi_2^{(0)^{\nu_2}}\eta_1^{(0)^{\mu_1}}\eta_2^{(0)^{\mu_2}} \tag{3.6}$$

и введем следующие обозначения:

$$c_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = a_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}b_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2},\quad \tilde{c}^{\pm}_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} = a^2_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2} \pm b^2_{\nu_1\nu_2\mu_1\mu_2}$$

$$c^{\pm}_{m_1m_2n_1n_2r_1r_2s_1s_2} = a_{m_1m_2n_1n_2}b_{r_1r_2s_1s_2} \pm a_{r_1r_2s_1s_2}b_{m_1m_2n_1n_2}$$

$$\hat{c}^{\pm}_{m_1m_2n_1n_2r_1r_2s_1s_2} = a_{m_1m_2n_1n_2}a_{r_1r_2s_1s_2} \pm b_{m_1m_2n_1n_2}b_{r_1r_2s_1s_2}$$

Из соотношений (1.35), (1.23), (1.24), (1.31) и (3.1)–(3.5) можно получить следующие выражения для коэффициентов функции (1.36):

$$\begin{gathered} w_{2020} = f^*_{2020} + \frac{1}{8}(4c_{2010} + 3c^-_{20103000} + c^-_{20012100} + c_{1110}) - \frac{1}{16}\{3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)\tilde{c}^+_{2010} + \\ + \operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)\tilde{c}^+_{1110} + 9\operatorname{ctg}(3\pi\sigma_1)\tilde{c}^+_{3000} + \operatorname{ctg}[\pi(2\sigma_1+\sigma_2)]\tilde{c}^+_{2100} - \operatorname{ctg}[\pi(2\sigma_1-\sigma_2)]\tilde{c}^+_{2001}] \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} w_{1111} = f^*_{1111} + \frac{1}{4}(c^-_{10021101} + c^+_{11102001} + c^+_{02011110} + c^+_{11012010} + c^-_{11102100} + c^-_{11011200}) - \\ -\frac{1}{4}\{\operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)\hat{c}^+_{20101101} + \operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)\hat{c}^+_{11100201} + \operatorname{ctg}[\pi(2\sigma_1+\sigma_2)]\tilde{c}^+_{2100} + \\ + \operatorname{ctg}[\pi(\sigma_1+2\sigma_2)]\tilde{c}^+_{1200} + \operatorname{ctg}[\pi(2\sigma_1-\sigma_2)]\tilde{c}^+_{2001} - \operatorname{ctg}[\pi(\sigma_1-2\sigma_2)]\tilde{c}^+_{1002}\} \end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} w_{0202} = f^*_{0202} + \frac{1}{8}(4c_{0201} + 3c^-_{02010300} + c^+_{12001002} + c_{1101}) - \frac{1}{16}\{3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)\tilde{c}^+_{0201} + \\ + \operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)\tilde{c}^+_{1101} + 9\operatorname{ctg}(3\pi\sigma_2)\tilde{c}^+_{0300} + \operatorname{ctg}[\pi(\sigma_1+2\sigma_2)]\tilde{c}^+_{1200} + \operatorname{ctg}[\pi(\sigma_1-2\sigma_2)]\tilde{c}^+_{1002}\} \end{gathered} \tag{3.9}$$

Для действительной и мнимой частей резонансных коэффициентов (1.39) имеем такие выражения:

$$\begin{gathered} \mu_{4000} = \frac{1}{4}a_{4000} + \frac{1}{16}(9c_{3000} + c_{2100} - c_{2010} - c_{2001}) + \\ + \frac{1}{16}\{3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)\hat{c}^-_{30002010} + \operatorname{ctg}[\pi(2\sigma_1-\sigma_2)]\hat{c}^-_{21002001}\} \end{gathered} \tag{3.10}$$

$$\begin{gathered} \nu_{4000} = -\frac{1}{4}b_{4000} + \frac{1}{32}(9\tilde{c}^-_{3000} + \tilde{c}^-_{2100} - \tilde{c}^-_{2010} - \tilde{c}^-_{2001}) - \\ -\frac{1}{16}\{3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)c^+_{20103000} + \operatorname{ctg}[\pi(2\sigma_1-\sigma_2)]c^+_{20012100}\} \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} \mu_{0400} = \frac{1}{4}a_{0400} + \frac{1}{16}(9c_{0300} + c_{1200} + c_{1002} - c_{0201}) + \\ + \frac{1}{16}\{3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)\hat{c}^-_{03000201} - \operatorname{ctg}[\pi(\sigma_1-2\sigma_2)]\hat{c}^+_{10021200}\} \end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\nu_{0400} = -\frac{1}{4}b_{0400} + \frac{1}{32}(9\tilde{c}^{-}_{0300} + \tilde{c}^{-}_{1200} - \tilde{c}^{-}_{1002} - \tilde{c}^{-}_{0201}) -$$

$$-\frac{1}{16}\{3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)c^{+}_{02010300} - \operatorname{ctg}[\pi(\sigma_1 - 2\sigma_2)]c^{-}_{10021200}\} \quad (3.13)$$

$$\mu_{2200} = \frac{1}{4}a_{2200} + \frac{1}{16}[4(c_{2100} + c_{1200}) + 3(c^{+}_{12003000} + c^{+}_{03002100}) - c_{1110} - c_{1101} +$$

$$+ c^{-}_{20101002} - c^{+}_{20010201}] + \frac{1}{16}[\operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)(2\hat{c}^{-}_{11011200} + \hat{c}^{-}_{12002010}) +$$

$$+ \operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)(2\hat{c}^{-}_{11102100} + \hat{c}^{-}_{21000201}) - 3\operatorname{ctg}(3\pi\sigma_1)\hat{c}^{+}_{30001002} - 3\operatorname{ctg}(3\pi\sigma_2)\hat{c}^{-}_{03002001}] \quad (3.14)$$

$$\nu_{2200} = -\frac{1}{4}b_{2200} + \frac{1}{32}[6(\hat{c}^{-}_{12003000} + \hat{c}^{-}_{03002100}) + 4(\tilde{c}^{-}_{2100} + \tilde{c}^{-}_{1200}) -$$

$$-2(\hat{c}^{+}_{20101002} + \hat{c}^{-}_{02012001}) - \tilde{c}^{-}_{1101} - \tilde{c}^{-}_{1110}] - \frac{1}{16}[\operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)(2c^{+}_{11011200} + c^{+}_{12002010}) +$$

$$+ \operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)(2c^{+}_{11102100} + c^{+}_{21000201}) - 3\operatorname{ctg}(3\pi\sigma_1)c^{-}_{10023000} - 3\operatorname{ctg}(3\pi\sigma_2)c^{+}_{03002001}] \quad (3.15)$$

$$\mu_{1300} = \frac{1}{4}a_{1300} + \frac{1}{16}(6c^{+}_{12000300} + 2c^{+}_{21001200} - c^{+}_{02011101} + c^{-}_{11101002}) +$$

$$+\frac{1}{16}[3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)\hat{c}^{+}_{03001101} + \operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)(2\hat{c}^{-}_{12000201} + \hat{c}^{-}_{12001110}) + 2\operatorname{ctg}(5\pi\sigma_2)\hat{c}^{+}_{10022100}] \quad (3.16)$$

$$\nu_{1300} = -\frac{1}{4}b_{1300} + \frac{1}{16}(6\hat{c}^{-}_{03001200} + 2\hat{c}^{-}_{12002100} - \hat{c}^{+}_{10021110} - \hat{c}^{-}_{02011101}) -$$

$$-\frac{1}{16}[3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)c^{+}_{03001101} + \operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)(2c^{+}_{12000201} + c^{+}_{12001110}) - 2\operatorname{ctg}(5\pi\sigma_2)c^{-}_{21001002}] \quad (3.17)$$

$$\mu_{3100} = \frac{1}{4}a_{3100} + \frac{1}{16}(6c^{+}_{21003000} + 2c^{+}_{12002100} - c^{+}_{20101110} - c^{+}_{11012001}) +$$

$$+\frac{1}{16}[3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)\hat{c}^{-}_{30001110} + \operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)(2\hat{c}^{-}_{21002010} + \hat{c}^{-}_{21001101}) + 2\operatorname{ctg}(5\pi\sigma_1)\hat{c}^{-}_{12002001}] \quad (3.18)$$

$$\nu_{3100} = -\frac{1}{4}b_{3100} + \frac{1}{16}(6\hat{c}^{-}_{30002100} + 2\hat{c}^{-}_{12002100} - \hat{c}^{-}_{20101110} - \hat{c}^{-}_{11012001}) -$$

$$-\frac{1}{16}[3\operatorname{ctg}(\pi\sigma_2)c^{+}_{30001110} + \operatorname{ctg}(\pi\sigma_1)(2c^{+}_{21002010} + c^{+}_{21001101}) + 2\operatorname{ctg}(5\pi\sigma_1)c^{+}_{20011200}] \quad (3.19)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00386) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1477.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа. М.: Наука, 1979. 253 с.
2. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
3. *Маркеев А.П.* Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 114–130.

4. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
5. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927 = *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
6. *Giacaglia G.E.O.* Perturbation Methods in Non-Linear Systems. Berlin, etc.: Springer, 1972 = *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 592 с.
8. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 327–401.
9. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // Communs. Pure Appl. Math. 1958. V. 11. № 1. P. 81–114.
10. *McLachlan N.W.* Theory and Application of Mathieu Functions. Oxford: Clarendon Press, 1947 = *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 475 с.
11. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.
12. *Glimm J.* Formal stability of Hamiltonian systems // Communs. Pure Appl. Math.. 1964. V. 17. № 4. P. 509–526.

Москва
e-mail: markeev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
11.VI.2004