

УДК 539.375:534.1

© 2005 г. О.Д. Пряхина, А.В. Смирнова

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД, СОДЕРЖАЩИХ СИСТЕМУ ТРЕЩИН**

Новый метод определения динамических характеристик многослойных полуограниченных сред с дефектами типа включений или трещин на линиях раздела слоев [1] применяется при решении антиплоских задач. Построены системы интегральных уравнений соответствующих краевых задач, исследованы свойства их ядер. Проведен анализ дисперсионных кривых определителей и элементов матриц указанных систем в зависимости от количества слоев и их упругих и геометрических характеристик.

1. Общие функционально-матричные соотношения. Для задачи о гармонических колебаниях пакета из N плоскопараллельных линейнодеформируемых слоев, имеющего на границах раздела физико-механических свойств дефекты типа трещин-полостей, получены соотношения, связывающие в преобразованиях Фурье амплитуды векторов перемещений точек среды \mathbf{W}_k и напряжений на границах раздела слоев \mathbf{T}_k с амплитудами векторов поверхностной нагрузки \mathbf{T}_0 и скачков перемещений $\mathbf{f}_m(\alpha, \beta)$ на берегах трещин [1, 2]

$$\mathbf{W}_k(\alpha, \beta, z_k) = \mathbf{K}_{N-k+1}(\alpha, \beta, z_k)\mathbf{T}_0(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{R}_{km}(\alpha, \beta)\mathbf{f}_m(\alpha, \beta) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{T}_k(\alpha, \beta) = \mathbf{L}_k(\alpha, \beta)\mathbf{T}_0(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{N-1} \mathbf{L}_{km}(\alpha, \beta)\mathbf{f}_m(\alpha, \beta), \quad k = 1, 2, \dots, N \tag{1.2}$$

Индекс k соответствует линии раздела k -го и $(k + 1)$ -го слоев, а индекс m отвечает дефектам, расположенным на границе m -го и $(m + 1)$ -го слоев, z_k – локальная координата, изменяющаяся в пределах толщины k -го слоя ($|z_k| \leq h_k$), $\mathbf{T}_0 = F\mathbf{t}_0$, $\mathbf{T}_k = F\mathbf{t}_k$, $\mathbf{W}_k = F\mathbf{w}_k$, F – оператор двумерного преобразования Фурье по переменным x, y с параметрами α, β , $\mathbf{t}_k = \{t_{1k}, t_{2k}, t_{3k}\}$ – векторы напряжений, характеризующие взаимодействие между слоями, $\mathbf{w}_k = \{w_{1k}, w_{2k}, w_{3k}\}$ – векторы перемещений точек k -го слоя.

Матрицы $\mathbf{K}_n, \mathbf{L}_n, \mathbf{R}_{km}, \mathbf{L}_{km}$ имеют единую структуру, характерную для матриц-символов Грина соответствующих краевых задач для сред без дефектов [3]. Их элементы зависят от частоты колебаний ω , а также от геометрических и механических параметров слоев: толщины $2h_k$, плотности ρ_k , модуля сдвига μ_k и коэффициента Пуассона ν_k .

Если на поверхности среды и на границах раздела слоев заданы смешанные условия

$$z = 0: \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_0; \quad \mathbf{t}_0 = 0, \quad (x, y) \notin \Omega_0$$

$$z_k = -h_k: \mathbf{t}_k = \mathbf{t}_{kp}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{kp}; \quad \Delta \mathbf{w}_k = 0, \quad (x, y) \notin \Omega_{kp}; \quad p = 1, 2, \dots, M_k$$

то функционально-матричные соотношения (1.1) при $k = 1$ и $z_1 = h_1$ совместно с соотношениями (1.2) для $k = 1, 2, \dots, N - 1$ приводят к системам интегральных уравнений относительно контактных напряжений $\mathbf{t}_0(x, y)$ и скачков векторов перемещений

$\Delta \mathbf{w}_{kp}(x, y)$ на берегах трещин. Здесь Ω_0 – область контакта штампа с поверхностью среды $z = 0$, \mathbf{w}_0 – перемещения, заданные в области Ω_0 , M_k – количество трещин в плоскости $z_k = -h_k$, Ω_{kp} – области, занимаемые трещинами, \mathbf{t}_{kp} – заданные напряжения на берегах трещин.

Получим указанные системы для случая антиплоских колебаний.

2. Функциональные соотношения, описывающие антиплоские колебания. Рассмотрим задачу о гармонических колебаниях пакета из N плоскопараллельных идеально упругих слоев толщины $H = 2(h_1 + h_2 + \dots + h_N)$ с жестко заземленной нижней гранью и занимающего объем $-H \leq z \leq 0$, $-\infty \leq x, y \leq +\infty$ (h_k – полутолщина k -го слоя). На границах раздела физико-механических параметров имеются дефекты типа трещин, расположенные в областях

$$\Omega_{km} : \{z_k = -h_k, a_{km} \leq x \leq b_{km}, -\infty < y < +\infty\}, m = 1, 2, \dots, M_k, k = 1, 2, \dots, N - 1$$

Поверхность среды подвергается некоторому динамическому воздействию, характеризуемому вектором распределенных усилий $\mathbf{t}_0(x, y)e^{-i\omega t}$, которое либо может быть заданным, либо может определяться из решения контактной задачи.

Будем полагать, что заданные и искомые векторные величины имеют отличной от нуля только одну составляющую, не зависящую от координаты y , а в преобразованиях Фурье – от параметра β :

$$\mathbf{T}_0 = \{0, T_0(\alpha), 0\}, \mathbf{W}_k = \{0, W_k(\alpha, z_k), 0\}, \mathbf{T}_k = \{0, T_k(\alpha), 0\}, \mathbf{f}_k = \{0, f_k(\alpha), 0\}$$

В этом случае матричные соотношения (1.1), (1.2) становятся функциональными и построение решения существенно упрощается.

Представим (в преобразованиях Фурье) функции Грина пакетов m слоев ($m = 1, 2, \dots, N$), жестко сцепленных с недеформируемым основанием, в виде отношения целых функций

$$G_m(z) = \frac{k_m(z)}{\Delta_m}, \quad -H_m \leq z \leq 0, \quad H_m = 2 \sum_{n=1}^m h_{N-n+1}$$

Заметим, что $k_m(z)$ и Δ_m зависят от параметра преобразования Фурье α , частоты гармонических колебаний ω , геометрических и механических параметров слоев с номерами $N, N-1$ и т.д. до $N-m+1$ включительно. Здесь и далее с целью сокращения записи в функциональных зависимостях указывается только аргумент, обеспечивающий однозначное их толкование.

В случае антиплоских колебаний матрицы, входящие в соотношения (1.1), (1.2), заменяются на соответствующие функции

$$K_{N-k+1}(h_k) = (-1)^{k+1} \frac{k_{N-k+1}(h_k)}{\mu_k \Delta_N}$$

$$L_k = (-1)^{k+1} \frac{\Delta_{N-k}}{\Delta_N}, \quad L_{km} = (-1)^{k+m-1} \frac{1}{\Delta_N} \begin{cases} \mu_m \Delta_{N-k} R_m(h_m), & k > m \\ \mu_k \Delta_{N-m} R_k(h_k), & k \leq m \end{cases}; \quad \Delta_0 \equiv 1 \quad (2.1)$$

$$R_{km} = \begin{cases} L_m, & k = 1 \\ (-1)^{k+m} (\mu_m / \mu_k) R_m(h_m) k_{N-k+1}(h_k) / \Delta_N, & k \neq 1, \quad k > m \\ (-1)^{k+m-1} D_{k-1}(h_{k-1}) \Delta_{N-m} / \Delta_N, & k \neq 1, \quad k \leq m \end{cases}$$

$R_k(h_k)$ и $D_k(h_k)$ определяются рекуррентными формулами

$$R_1(h_k) = \sigma_{2k} \text{sh}(2\sigma_{2k} h_k), \quad D_1(h_k) = \text{ch}(2\sigma_{2k} h_k)$$

$$R_k(h_k) = R_1(h_k)D_{k-1}(h_{k-1}) + g_{k-1}D_1(h_k)R_{k-1}(h_{k-1})$$

$$D_k(h_k) = D_1(h_k)D_{k-1}(h_{k-1}) + g_{k-1}\sigma_{2k}^{-2}R_1(h_k)R_{k-1}(h_{k-1})$$

$$\sigma_{2k} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho_k}{\mu_k}\omega^2}, \quad g_{k-1} = \frac{\mu_{k-1}}{\mu_k}; \quad k = 2, 3, \dots, N$$

Если на поверхности среды и на границах раздела слоев заданы смешанные условия, то искомая система интегральных уравнений (ИУ) формируется из соотношений

$$W_1(h_1) = K_N(h_1)T_0 + \sum_{m=1}^{N-1} L_m f_m, \quad T_k = L_k T_0 + \sum_{m=1}^{N-1} L_{km} f_m, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$f_m(\alpha) = \sum_{p=1}^{M_m} F(\Delta w_{mp})$$

Введем матрицу $\mathbf{K}(\alpha) = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^N$ с элементами

$$K_{11} = K_N(h_1), \quad K_{1j} = K_{j1} = L_{j-1}, \quad K_{ij} = L_{(i-1)(j-1)}; \quad i, j = 2, 3, \dots, N$$

и интегральные операторы

$$\mathcal{H}(\Omega)q = \int_{\Omega} k(x - \xi)q(\xi)d\xi, \quad k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} K(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$\mathcal{L}_q(t_0, \Delta w_{km}) = \mathcal{H}_{q1}(\Omega_0)t_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_k} \mathcal{H}_{q(k+1)}(\Omega_{km})\Delta w_{km}, \quad q = 1, 2, \dots, N$$

Выбор контура δ диктуется принципом излучения [4]. Матрицу $\mathbf{K}(\alpha)$ будем называть матрицей-символом построенной системы ИУ.

В принятых обозначениях система ИУ, имеющая размерность $M + 1$ ($M = M_1 + M_2 + \dots + M_{N-1}$ – общее количество трещин в среде), запишется в виде

$$\mathcal{L}_1(t_0, \Delta w_{km}) = w_0(x), \quad x \in \Omega_0; \quad \mathcal{L}_{p+1}(t_0, \Delta w_{km}) = t_{pn}(x), \quad x \in \Omega_{pn}$$

$$n = 1, 2, \dots, M_p; \quad p = 1, 2, \dots, N-1$$

Полученные уравнения позволяют исследовать разные аспекты динамики многослойного основания.

Полагая $f_m(\alpha) = 0$ для всех $m = 1, 2, \dots, N-1$, приходим к контактной задаче для многослойного основания без дефектов и известному одномерному ИУ

$$\mathcal{H}_{11}(\Omega_0)t_0 = w_0(x), \quad x \in \Omega_0$$

Если принять $T_0(\alpha) = 0$, то получим динамическую задачу о колебаниях многослойной среды, вызванных вибрацией только берегов трещин, и соответствующую ей систему ИУ свертки

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M_k} \mathcal{H}_{(p+1)(k+1)}(\Omega_{km})\Delta w_{km} = t_{pn}(x), \quad x \in \Omega_{pn} \tag{2.2}$$

$$n = 1, 2, \dots, M_p; \quad p = 1, 2, \dots, N-1$$

Поскольку эта задача представляет самостоятельный интерес, переобозначим матрицу-символ последней системы через $\mathbf{L}(\alpha) = \|L_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}$. Очевидно, что $\mathbf{L}(\alpha)$ получается из $\mathbf{K}(\alpha)$ путем исключения первой строки и первого столбца.

Заметим, что ИУ (2.2) при равных механических параметрах слоев дают решение динамической задачи для однородного слоя с системой трещин, расположенных в плоскостях $z_p = -h_p$.

Имея функциональные соотношения и интегральные уравнения рассматриваемых задач для пакета слоев, легко перейти к слоистому полупространству. При этом общий вид их записи сохраняется, но при определении элементов матриц-символов $\mathbf{K}^\infty(\alpha)$ и $\mathbf{L}^\infty(\alpha)$ в формулах (2.1) следует полагать

$$k_1(h_N) = 1, \quad \Delta_1(h_N) = \sigma_{2N}$$

Если в этих соотношениях положить

$$k_1(h_N) = 1, \quad \Delta_1(h_N) = \sigma_{2N}, \quad D_1(h_1) = 1, \quad R_1(h_1) = \sigma_{21}$$

то получим функциональные соотношения и матрицу $\mathbf{L}^\infty(\alpha)$ для слоистого пространства.

3. Пример: случай $N = 3$. Сформируем систему функциональных уравнений для случая $N = 3$. Имеем:

перемещения точек поверхности среды

$$W_1(h_1) = (k_3(h_1)T_0/\mu_1 - \Delta_2 f_1 + \Delta_1 f_2)/\Delta_3 \quad (3.1)$$

напряжения на границах раздела слоев

$$\begin{aligned} T_1 &= (-\Delta_2 T_0 - \mu_1 R_1(h_1)\Delta_2 f_1 + \mu_1 R_1(h_1)D_1(h_3)f_2)/\Delta_3 \\ T_2 &= (\Delta_1 T_0 + \mu_1 R_1(h_1)D_1(h_3)f_1 - \mu_2 R_2(h_2)D_1(h_3)f_2)/\Delta_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для построения системы ИУ перепишем соотношения (3.1), (3.2) в виде

$$\mathbf{W}(\alpha) = \mathbf{K}(\alpha)\mathbf{Q}(\alpha) \quad (3.3)$$

Здесь

$$\mathbf{Q} = \{T_0, f_1, f_2\}, \quad \mathbf{W} = \{W_1(h_1), T_1, T_2\}, \quad \mathbf{K}(\alpha) = \|K_{ij}\|_{i,j=1}^3$$

При этом

$$\det \mathbf{K} = \text{ch}(2\sigma_{21}h_1)\varphi(h_2, h_3)/\Delta_3, \quad \varphi(h_2, h_3) = \mu_2\sigma_{22}\text{sh}(2\sigma_{22}h_2)\text{ch}(2\sigma_{23}h_3)$$

На основании равенства (3.3) можно выписать ИУ и системы ИУ, отвечающие разным задачам. Приведем систему ИУ в общем случае, когда

$$T_0(\alpha) \neq 0, \quad f_1(\alpha) \neq 0, \quad f_2(\alpha) \neq 0$$

Имеем

$$\mathcal{L}_1(t_0, \Delta w_{km}) = w_0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad \Omega_0 : \{z = 0, |x| \leq a, -\infty < y < +\infty\}$$

$$\mathcal{L}_2(t_0, \Delta w_{km}) = t_{1n}(x), \quad a_{1n} \leq x \leq b_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots, M_1$$

$$\mathcal{L}_3(t_0, \Delta w_{km}) = t_{2n}(x), \quad a_{2p} \leq x \leq b_{2p}, \quad p = 1, 2, \dots, M_2$$

Если положить $f_1(\alpha) = 0$ (или $f_2(\alpha) = 0$), то будем иметь ИУ, отвечающие случаю одной трещины или системы трещин, расположенных в трехслойной среде только в плоскости $z = -2h_1$ (или только в плоскости $z = -2h_1 - 2h_2$).

При $T_0(\alpha) = 0$ в формировании системы ИУ участвуют только соотношения (3.2), представимые в матричной форме

$$\mathbf{T}(\alpha) = \mathbf{L}(\alpha)\mathbf{f}(\alpha), \quad \mathbf{T} = \{T_1, T_2\}, \quad \mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$$

причем

$$\det \mathbf{L} = \mu_1 \sigma_{21} \operatorname{sh}(2\sigma_{21} h_1) \varphi(h_2, h_3) / \Delta_3, \quad \Delta_3 = \Delta_3(\alpha, \omega, \mu_k, \rho_k, h_k), \quad k = 1, 2, 3$$

4. Свойства матриц-символов систем ИУ. При определении классов корректной разрешимости и построении решения систем ИУ необходимо изучение свойств элементов их матриц-символов. Наиболее важны описание асимптотического поведения указанных элементов при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и исследование поведения вещественных нулей и полюсов (дисперсионных кривых) элементов и определителей этих матриц в плоскости $(\operatorname{Re} \alpha, \omega)$.

Установлено, что матрицы $\mathbf{K}(\alpha)$, $\mathbf{L}(\alpha)$ симметричны и представимы в виде

$$\mathbf{K}(\alpha) = \frac{1}{\Delta_N} \|k_{ij}(\alpha)\|_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{L}(\alpha) = \frac{1}{\Delta_N} \|l_{ij}(\alpha)\|_{i,j=1}^{N-1}$$

Элементы $k_{ij}(\alpha)$, $l_{ij}(\alpha)$ – целые, четные по параметру α функции; Δ_N – знаменатель функции Грина G_N в случае многослойного пакета без дефектов.

Для элементов матрицы $\mathbf{K}(\alpha)$ на контуре δ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические оценки

$$K_{11}(\alpha) = \frac{|\alpha|^{-1}}{\mu_1} [1 + O(|\alpha|^{-2})], \quad K_{ii}(\alpha) = -\frac{\mu_{i-1}}{1 + g_{i-1}} |\alpha| [1 + O(|\alpha|^{-2})], \quad i = 2, 3, \dots, N$$

$$K_{1j}(\alpha) = (-1)^{j+1} P_{1j}(\alpha) [1 + O(|\alpha|^{-2})], \quad j = 2, 3, \dots, N$$

$$K_{ij}(\alpha) = (-1)^{i+j+1} \frac{\mu_i}{1 + g_{i-1}} P_{ij}(\alpha) |\alpha| [1 + O(|\alpha|^{-2})], \quad i \neq j \neq 1$$

где

$$P_{ij}(\alpha) = \frac{2^{j-i}}{\prod_{k=i}^{j-1} (1 + g_k)} \exp\left(-|\alpha| \sum_{k=i}^{j-1} 2h_k\right)$$

Асимптотическое поведение элемента K_{11} для многослойной среды совпадает с асимптотическим поведением функции $G_1(\alpha, \mu_1)$, а асимптотика остальных диагональных элементов K_{ii} определяется асимптотикой функции $-G_1^{-1}(\alpha, \mu_{i-1} \mu_i / (\mu_{i-1} + \mu_i))$.

Используемый метод позволяет получить соотношения, удобные для проведения численного анализа не только элементов, но и определителей матриц

$$\det \mathbf{K}(\alpha) = \frac{D_1(h_1) \det \mathbf{L}(\alpha)}{\mu_1 R_1(h_1)}, \quad \det \mathbf{L}(\alpha) = (-1)^{N-1} \frac{D_1(h_N)^{N-1}}{\Delta_N} \prod_{k=1}^{N-1} \mu_k R_1(h_k)$$

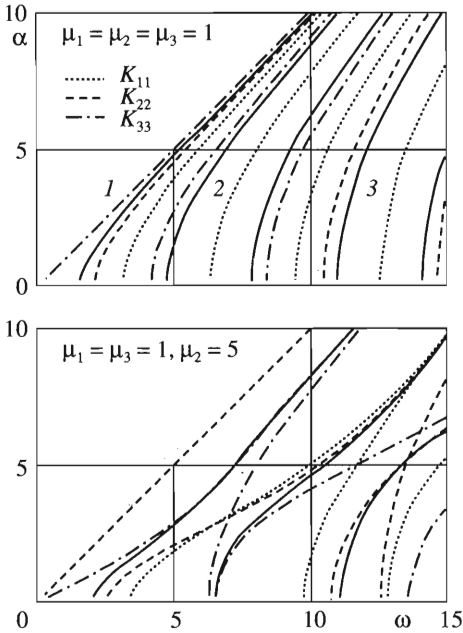
Отметим, что в случае одной трещины, расположенной в плоскости $z_m = -h_m$ N -слойной среды, имеем

$$\det \mathbf{K}(\alpha) = (-1)^{N-1} \Delta_m(h_1, h_2, \dots, h_m) \Delta_{N-m}(h_N, h_{N-1}, \dots, h_{m+1}) / \Delta_N$$

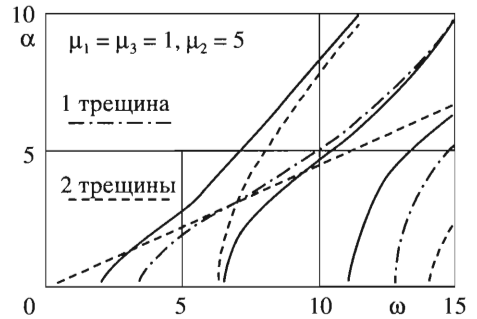
Отсюда следует, что при выполнении условий

$$\Delta_{N-m}(h_N, h_{N-1}, \dots, h_{m+1}) = \Delta_n(h_1, h_2, \dots, h_n)$$

$$\Delta_{N-n}(h_N, h_{N-1}, \dots, h_{n+1}) = \Delta_m(h_1, h_2, \dots, h_m) \quad (n + m = N)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

определители матриц, соответствующих одной трещине, расположенной в плоскости $z_n = -h_m$ или в плоскости $z_n = -h_n$, имеют одинаковые нули. В однородной среде определители матрицы \mathbf{K} при расположении трещины на уровне $z = -h$ или на уровне $z = -H + h$ будут равными.

Заметим также, что если одна трещина расположена в плоскости $z = -H/2$ однородного слоя, то все нули элемента K_{22} , за исключением $\alpha^2 = \rho_1 \omega^2 / \mu_1$, совпадают с нулями K_{11} , т.е. с нулями функции Грина слоя без дефектов.

5. Численные результаты. Для рассмотренного в разд. 3 случая трехслойной среды приведены результаты численного анализа дисперсионных кривых элементов (фиг. 1) и определителей (фиг. 2) матрицы \mathbf{K} в зависимости от геометрических и механических параметров задачи при $\nu_i = 0.3$, $\rho_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$), $H = 1$, $2h_1 = h_2 = 2h_3 = 1/4$; безразмерные значения модулей сдвига указаны на соответствующих частях фигуры; кривые полюсов изображены сплошной линией.

Для диагональных элементов матриц, как и в случае среды без дефектов, соблюдается чередование нулей и полюсов (фиг. 1). При наличии системы трещин в однородном слое диагональные элементы могут иметь совпадающие нули. Так, кривые 2, 3 на фиг. 1 являются общими для элементов K_{11} , K_{22} , K_{33} , а кривая 1 – для элементов K_{22} , K_{33} .

На фиг. 2 представлены дисперсионные кривые определителей $\mathbf{K}(\alpha, \omega)$, соответствующие наличию одной трещины в плоскости $z = -H/2$ и двум трещинам, лежащим в плоскостях $z = -H/4$, $z = -3H/4$. В случае одной трещины в слоистой среде $\det \mathbf{K}(\alpha, \omega)$ имеет нули и полюса, начиная с некоторого значения ω^* . Если трещин в среде две и более, то появляется кривая нулей, выходящая из начала координат. Характерно, что для трещины в середине однородного слоя все нули определителя совпадают с нечетными (если нумеровать кривые по мере их появления на оси $\alpha = 0$) нулями элемента K_{11} , т.е. с нечетными нулями функции Грина в случае среды без дефектов. Для слоистой среды это справедливо только при определенной симметрии механических и геометрических параметров задачи, как, например, в случае, показанном на фиг. 2.

Авторы благодарят В.А. Бабешко, предложившего тему данной работы, за советы и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00694, 03-01-96537, 03-01-96645), Минобразования России (Е-02-4.0-191), Федеральной целевой программы “Интеграция” (Б0121) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-2107-2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пряхина О.Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499–506.
2. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Решение динамических задач для многослойных сред с разрывными граничными условиями // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Юбилейный выпуск. 2002. С. 80–82.
3. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Науч. мир, 1999. 246 с.
4. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.

Краснодар
e-mail: donna@kubsu.ru

Поступила в редакцию
15.VI.2004