

УДК 539.3

© 2005 г. Ю. Ю. Маховская

СКОЛЬЖЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ АДГЕЗИИ

Решается плоская контактная задача о скольжении без трения жесткого цилиндра по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии в пренебрежении инерционными свойствами полупространства. Исследуются распределение контактного давления, размер и положение области контакта и деформационная сила сопротивления движению цилиндра в зависимости от адгезионных свойств поверхностей, механических характеристик полупространства и скорости скольжения цилиндра.

С целью изучения контактного взаимодействия вязкоупругих тел при скольжении задача в плоской постановке о скольжении жесткого цилиндра по вязкоупругому полупространству решалась [1, 2] методом, основанным на сведении ее к задаче Римана–Гильберта. Ниже аналогичный метод используется для исследования роли адгезии при скольжении цилиндра по вязкоупругому полупространству. Ранее эффекты адгезии при контактировании вязкоупругих тел изучались [3] в случае нормального сближения и отдаления тел.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская контактная задача для вязкоупругого полупространства, свойства которого описываются уравнениями

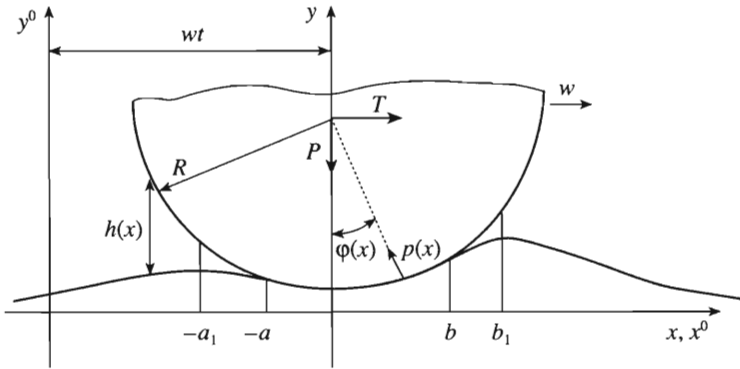
$$\begin{aligned} \epsilon_{x^0} + T_\epsilon \frac{\partial \epsilon_{x^0}}{\partial t} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right) \\ \epsilon_{y^0} + T_\epsilon \frac{\partial \epsilon_{y^0}}{\partial t} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right) \\ \gamma_{x^0 y^0} + T_\epsilon \frac{\partial \gamma_{x^0 y^0}}{\partial t} &= \frac{1 + \nu}{E} \left(\tau_{x^0 y^0} + T_\sigma \frac{\partial \tau_{x^0 y^0}}{\partial t} \right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\sigma_{x^0}, \sigma_{y^0}, \tau_{x^0 y^0}$ – компоненты тензора напряжений, $\epsilon_{x^0}, \epsilon_{y^0}, \gamma_{x^0 y^0}$ – компоненты тензора деформаций, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, T_ϵ и T_σ характеризуют вязкие свойства полупространства, (x^0, y^0) – система координат, связанная с полупространством, t – время. Уравнения (1.1) являются двумерным аналогом модели Максвелла–Томсона и соответствуют случаю плоской деформации.

По границе вязкоупругого полупространства скользит со скоростью w жесткий цилиндр радиуса R (фиг. 1). Предполагается, что трение между цилиндром и полупространством отсутствует. Инерционными свойствами полупространства пренебрегаем.

Для описания адгезионного взаимодействия поверхностей воспользуемся моделью [4], согласно которой сила притяжения поверхностей на единицу площади аппроксимируется кусочно-постоянной функцией

$$p_a(h) = \begin{cases} p_0, & 0 < h \leq h_0 \\ 0, & h > h_0 \end{cases} \tag{1.2}$$



Фиг. 1

где h – величина зазора между взаимодействующими поверхностями. Поверхностная энергия взаимодействия γ определяется соотношением

$$\gamma = \int_0^{\infty} p_a(h) dh = p_0 h_0$$

Отсюда следует условие для максимальной величины зазора h_0 , при которой поверхности еще испытывают адгезионное притяжение,

$$h_0 = \gamma/p_0 \tag{1.3}$$

Поверхностная энергия γ и адгезионное давление p_0 считаются заданными величинами.

Введем подвижную систему координат (x, y) , связанную с цилиндром: $x = x^0 - wt$, $y = y^0$. Считая, что форму цилиндра в окрестности области взаимодействия с полупространством можно описать функцией $f(x) = x^2/(2R)$, получим следующие граничные условия для вязкоупругого полупространства в подвижной системе координат (x, y) :

условия в области контакта

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{R}, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad -a < x < b \tag{1.4}$$

где $v(x)$ – нормальное перемещение границы вязкоупругого полупространства, условия в области адгезионного взаимодействия

$$\sigma_y|_{y=0} = p_0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad -a_1 \leq x \leq a, \quad b \leq x \leq b_1 \tag{1.5}$$

и условие отсутствия нагрузки вне области взаимодействия

$$\sigma_y|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad x < -a_1, \quad x > b_1 \tag{1.6}$$

В подвижной системе координат (x, y) напряжения, деформации и перемещения не зависят явно от времени. В частности, для нормального перемещения границы полупространства имеем $v(x) \equiv v^0(x + wt, t)$, где $v^0(x^0, t)$ – нормальное перемещение в неподвижной системе координат (x^0, y^0) . Дифференцируя это тождество по времени, получим $\partial v(x^0, t)/\partial t = -w \partial v(x)/\partial x$. Аналогичные соотношения имеют место для производных всех компонент напряжений, перемещений и деформаций.

Введем обозначения

$$\epsilon_x^* = \epsilon_{x^0} - T_\epsilon w \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y^* = \epsilon_{y^0} - T_\epsilon w \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xy}^* = \gamma_{x^0 y^0} - T_\epsilon w \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \sigma_{x^0} - T_{\sigma} w \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, & \sigma_y^* &= \sigma_{y^0} - T_{\sigma} w \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}, & \tau_{xy}^* &= \tau_{x^0 y^0} - T_{\sigma} w \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \\ v^* &= v - T_{\epsilon} w \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (1.7)$$

Тогда уравнения (1.1) принимают вид, совпадающий по форме с законом Гука для упругого полупространства. Введенные функции со звездочкой удовлетворяют также уравнениям равновесия и совместности деформаций для упругого тела.

Для того чтобы получить граничные условия для функций со звездочкой (1.7), используем условия (1.4)–(1.6). Из (1.5) и (1.6) видно, что функцию σ_y при $y = 0$ вне области контакта можно представить с помощью θ -функции Хевисайда

$$\sigma_y|_{y=0} = \begin{cases} p_0 \theta(x + a_1), & x \leq -a \\ p_0 \theta(b_1 - x), & x \geq b \end{cases}$$

С учетом этого получаем следующие граничные условия при $y = 0$ для функций со звездочкой:

$$\begin{aligned}\partial v^* / \partial x &= (x - T_{\epsilon} w) / R, & \tau_{xy}^* &= 0, & -a < x < b \\ \sigma_y^* &= p_0 \theta(x + a_1) - T_{\sigma} w p_0 \delta(x + a_1), & \tau_{xy}^* &= 0, & x \leq -a \\ \sigma_y^* &= p_0 \theta(b_1 - x) + T_{\sigma} w p_0 \delta(b_1 - x), & \tau_{xy}^* &= 0, & x \geq b\end{aligned}\quad (1.8)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция.

Таким образом, исходная задача сводится к решению задачи для упругой полуплоскости с граничными условиями (1.8). После этого истинные напряжения, деформации и перемещения в вязкоупругом полупространстве определяются из решения дифференциальных уравнений (1.7).

2. Метод решения.

Решение задачи для упругой полуплоскости. Для решения задачи для упругой полуплоскости с граничными условиями (1.8) воспользуемся методом Л.А. Галина [5] и введем при $y \leq 0$ функцию комплексного переменного $z = x - iy$

$$W(z) = U - iV = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y^* \frac{dt}{t - z} \quad (2.1)$$

Поскольку на границе $y = 0$ упругой полуплоскости выполняется соотношение [5]

$$\frac{\pi E}{2(1 - \nu^2)} \frac{\partial v^*}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y^* \frac{dt}{t - x} - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} \pi \tau_{xy}^* \quad (2.2)$$

с учетом предельного значения интеграла типа Коши (2.1) при $z \rightarrow x - i0$, из условий (1.8) получим граничные условия для функции $W(z)$

$$\begin{aligned}U(x, 0) &= \frac{\pi E}{2(1 - \nu^2)R} (x - T_{\epsilon} w), & -a < x < b \\ V(x, 0) &= \begin{cases} \pi p_0 \theta(x + a_1) - \pi T_{\sigma} w p_0 \delta(x + a_1), & x \leq -a \\ \pi p_0 \theta(b_1 - x) + \pi T_{\sigma} w p_0 \delta(b_1 - x), & x \geq b \end{cases}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Задача определения функции $W(z)$, аналитической при $y \leq 0$, по заданным граничным условиям (2.3) при $y = 0$ является частным случаем задачи Римана–Гильберта. Решение этой задачи, ведущее себя как P/z при $z \rightarrow \infty$, имеет вид [5]

$$W(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{Z(z)}} \left[P + \int_{-a}^b U(x, 0) \sqrt{-Z(x)} \frac{dx}{x-z} - \int_{-\infty}^{-a} V(x, 0) \sqrt{-Z(x)} \frac{dx}{x-z} + \int_b^{\infty} V(x, 0) \sqrt{Z(x)} \frac{dx}{x-z} \right] \quad (2.4)$$

Здесь

$$Z(z) = (z + a)(z - b)$$

P – нормальная внешняя сила, действующая на цилиндр (фиг. 1).

Зная функцию W , можно определить напряжение σ_y^* и перемещение v^* на границе $y = 0$ из соотношений [5]

$$U(x, 0) = E^* \frac{\partial v^*}{\partial x}, \quad V(x, 0) = \pi \sigma_y^* |_{y=0}, \quad E^* = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \quad (2.5)$$

С учетом этих соотношений, после взятия интегралов в (2.4) получим следующие выражения для напряжения σ_y^* и перемещений v^* :

$$\sigma_y^* |_{y=0} = -p^*(x) = [-F(x) + G(x)]/\pi, \quad -a < x < b$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial x} = \frac{x - T_\epsilon w}{R} + \begin{cases} [H(x) - F(x)]/E^*, & -a_1 < x < -a \\ [F(x) - H(x)]/E^*, & b < x < b_1 \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{|Z(x)|}} \left\{ \frac{E^*}{R} \left[\frac{1}{8}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(x - T_\epsilon w)(b-a-2x) \right] + P + \frac{1}{2} p_0 \ln \frac{2a_1 + b - a + 2\sqrt{Z(-a_1)}}{2b_1 - b + a + 2\sqrt{Z(b_1)}} + p_0 [\sqrt{Z(-a_1)} + \sqrt{Z(b_1)}] + T_\sigma w p_0 \left[\frac{\sqrt{Z(b_1)}}{b_1 - x} - \frac{\sqrt{Z(-a_1)}}{a_1 + x} \right] \right\}$$

$$G(x) = p_0 \left\{ \pi + \operatorname{arctg} \frac{(a_1 - a)(b - x) - (a_1 + b)(a + x)}{2\sqrt{Z(-x)Z(-a_1)}} - \operatorname{arctg} \frac{(b_1 + a)(b - x) - (b_1 - b)(a + x)}{2\sqrt{Z(-x)Z(b_1)}} \right\} \quad (2.7)$$

$$H(x) = p_0 \left\{ -\operatorname{arcth} \frac{(a_1 - a)(x - b) + (a_1 + b)(x + a)}{2\sqrt{Z(x)Z(-a_1)}} + \right.$$

$$+ \operatorname{arctg} \left. \frac{(b_1 + a)(x - b) + (b_1 - b)(x + a)}{2\sqrt{Z(x)Z(b_1)}} \right\}$$

Определение истинных напряжений и перемещений на границе вязкоупругого полупространства. Напряжения и перемещения на границе вязкоупругого полупространства определяются путем решения дифференциальных уравнений (1.7). В качестве граничных условий используются условия непрерывности для этих напряжений и перемещений. С учетом условия $p(-a) = -p_0$, где $p(x) = -\sigma_{y|y=0}$ – контактное давление, получим в области контакта $-a < x < b$ выражение

$$p(x) = -\frac{1}{T_{\sigma} w} \int_{-a}^x p^*(t) e^{(x-t)/(T_{\sigma} w)} dt - p_0 e^{(x+a)/(T_{\sigma} w)} \quad (2.8)$$

Учитывая условие $\partial v/\partial x = -a/R$ при $x = -a$, получим следующее выражение для перемещений при $-a_1 < x < -a$:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{1}{T_{\epsilon} w} \int_x^{-a} \frac{\partial v^*(t)}{\partial t} e^{(x-t)/(T_{\epsilon} w)} dt - \frac{a}{R} e^{(x+a)/(T_{\epsilon} w)} \quad (2.9)$$

Чтобы получить выражение для перемещений в области $b < x < b_1$, используем условие $\partial v/\partial x = b/R$ при $x = b$

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = -\frac{1}{T_{\epsilon} w} \int_b^x \frac{\partial v^*(t)}{\partial t} e^{(x-t)/(T_{\epsilon} w)} dt + \frac{b}{R} e^{(x-b)/(T_{\epsilon} w)} \quad (2.10)$$

Полученные соотношения (2.8)–(2.10), в которых функции $p^*(x)$ и $\partial v^*(x)/\partial x$ заданы выражениями (2.6), определяют нормальное давление и перемещение на границе вязкоупругого полупространства.

Определение границ областей контакта и адгезионного взаимодействия. Соотношения (2.8)–(2.10), определяющие напряжения и перемещения на границе вязкоупругого полупространства, содержат неизвестные величины a , b , a_1 , и b_1 – координаты границ области контакта цилиндра с полупространством ($-a$ и b) и внешних границ области адгезионного притяжения поверхностей ($-a_1$ и b_1). Для определения этих четырех неизвестных величин необходимо четыре условия.

Первое условие вытекает из оставшегося неиспользованным условия непрерывности контактного напряжения при $x = b$. Из выражения (2.8) с учетом условия $p(b) = -p_0$ получим

$$-\frac{1}{T_{\sigma} w} \int_{-a}^b p^*(x, 0) e^{-x/(T_{\sigma} w)} dx + p_0 (1 - e^{(a+b)/(T_{\sigma} w)}) = 0 \quad (2.11)$$

Второе условие получается из условия затухания деформаций на границе полупространства при $x \rightarrow \infty$. Применение этого условия к соотношению (2.10) дает

$$\frac{1}{T_{\epsilon} w} \int_b^{+\infty} \frac{\partial v^*(x)}{\partial x} e^{-x/(T_{\epsilon} w)} dx - \frac{b}{R} e^{-b/(T_{\epsilon} w)} = 0 \quad (2.12)$$

Третье и четвертое условия следуют из того, что величина зазора между поверхностями цилиндра и полупространства в точках $x = -a_1$ и $x = b_1$ должна быть равна максимальному расстоянию h_0 , при котором поверхности еще испытывают адгезионное притяжение (см. (1.2)). Приравняв величину зазора в точке $x = -a_1$ величине h_0 , определяемой соотношением (1.3), получим

$$f(-a_1) - f(-a) - v(-a_1) + v(-a) = \gamma/p_0$$

откуда следует

$$\int_{-a_1}^{-a} \frac{\partial v(x)}{\partial x} dx = \frac{\gamma}{p_0} - \frac{a_1^2 - a^2}{2R}$$

Подставляя в это соотношение выражение для производной нормального перемещения границы полупространства (2.9) при $-a_1 < x < -a$ и выполняя замену пределов интегрирования, получим условие

$$\int_{-a_1}^{-a} \frac{\partial v^*(x)}{\partial x} \left(1 - e^{-\frac{a_1+x}{T_\epsilon w}} \right) dx - \frac{aT_\epsilon w}{R} \left(1 - e^{-\frac{a_1-a}{T_\epsilon w}} \right) = \frac{\gamma}{p_0} - \frac{a_1^2 - a^2}{2R} \quad (2.13)$$

Аналогичным образом, приравнявая величину зазора в точке $x = b_1$ величине h_0 , находим четвертое условие:

$$\int_b^{b_1} \frac{\partial v^*(x)}{\partial x} \left(e^{\frac{b_1-x}{T_\epsilon w}} - 1 \right) dx - \frac{bT_\epsilon w}{R} \left(e^{\frac{b_1-b}{T_\epsilon w}} - 1 \right) = \frac{\gamma}{p_0} - \frac{b_1^2 - b^2}{2R} \quad (2.14)$$

Полученная система из четырех уравнений (2.11)–(2.14) для определения четырех неизвестных a, b, a_1 и b_1 решалась численно методом Ньютона.

3. Случай упругого полупространства. Рассмотрим случай упругого полупространства, взаимодействующего с жестким цилиндром при наличии адгезии. В этом случае получим контактную задачу для упругой полуплоскости с граничными условиями (1.5)–(1.6). Решая эту задачу методом, аналогичным изложенному в разд. 2, находим следующие выражения для контактного давления при $-a \leq x \leq a$ (решение симметрично относительно оси Oy , т.е., $b = a, b_1 = a_1$):

$$p(x) = \frac{E^*}{\pi R} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{p_0}{\pi} [\xi_+(x) - \xi_-(x) - \pi] \quad (3.1)$$

$$\xi_{\pm}(x) = \operatorname{arctg} \frac{a_1 x \pm a^2}{\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{a_1^2 - a^2}}$$

и упругого перемещения границы полупространства при $a \leq x \leq a_1$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{R} - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{R} + \frac{p_0}{E^*} [\eta_+(x) - \eta_-(x)] \quad (3.2)$$

$$\eta_{\pm}(x) = \operatorname{arcth} \frac{a_1 x \mp a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \sqrt{a_1^2 - a^2}}$$

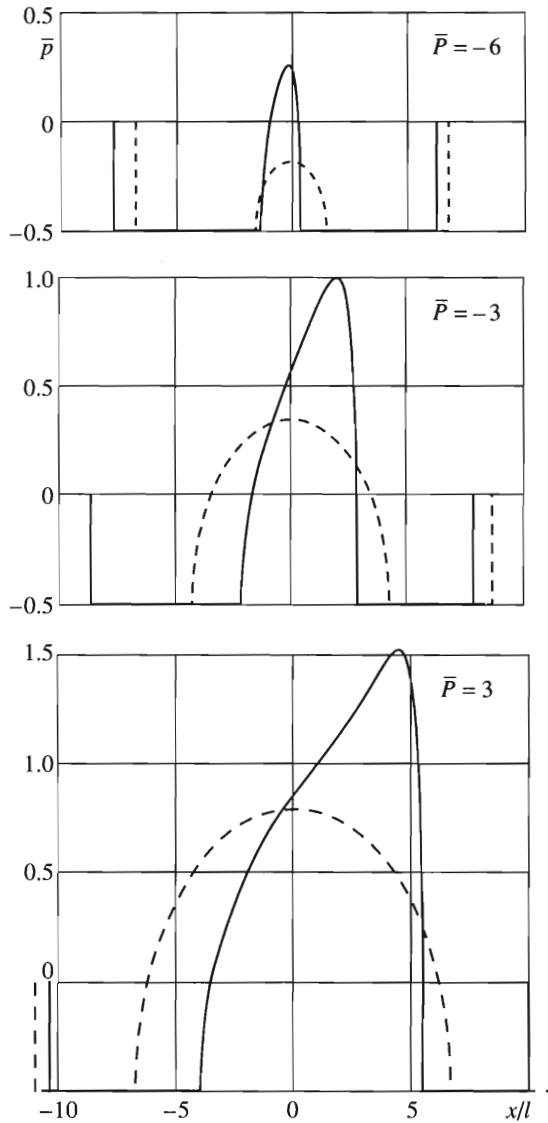
Кроме того, получаем выражение для нагрузки, приложенной к цилиндру,

$$P = E^* a^2 / (2R) - 2p_0 \sqrt{a_1^2 - a^2} \quad (3.3)$$

и условие

$$a_1 \sqrt{a_1^2 - a^2} + \left(a^2 - \frac{4p_0}{E^*} \sqrt{a_1^2 - a^2} \right) \ln \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - a^2}}{a} = \frac{2R\gamma}{p_0} \quad (3.4)$$

которое получено в результате приравнивания величины зазора в точке $x = a_1$ величине h_0 , определяемой соотношением (1.3). Соотношения (3.3) и (3.4) служат для

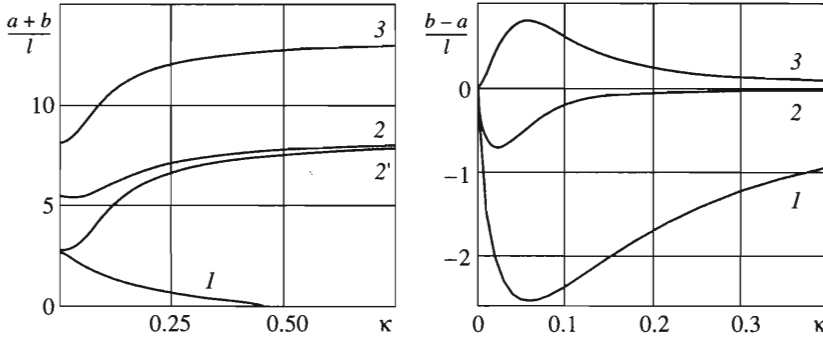


Фиг. 2

численного определения координат a и a_1 границ областей контакта и адгезионного взаимодействия.

4. Результаты расчетов. В ходе численного решения задачи исследовалась зависимость решения от безразмерных параметров, характеризующих вязкие свойства полупространства $\delta = T_e/T_\sigma$, адгезию поверхностей $\lambda = p_0[9R\pi/(8E^*\gamma)]^{1/3}$, скорость скольжения цилиндра и время последействия материала полупространства $\kappa = l/(2wT_e)$, а также величину нормальной нагрузки $\bar{P} = \lambda P/(lp_0)$, где $l = [R^2\gamma/(9\pi E^*)]^{1/3}$.

На фиг. 2 показаны распределения безразмерного контактного давления $\bar{p} = \lambda p/p_0$ по безразмерной координате x/l при $\delta = 1$, $\lambda = 0.5$ и разных значениях нагрузки. Штриховые линии показывают распределение давления при тех же параметрах для

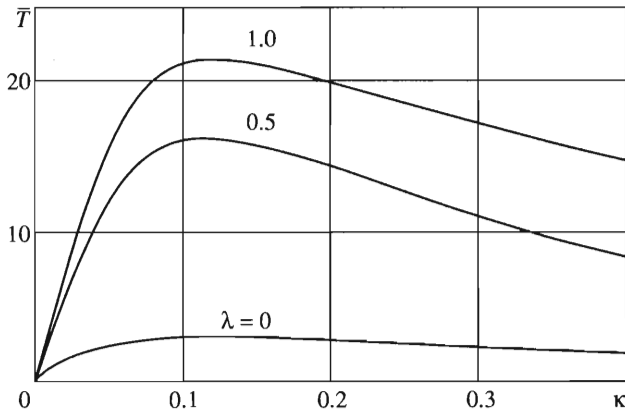


Фиг. 3

упругого полупространства (соотношения (3.1), (3.3), (3.4)); эти результаты совпадают с решением, полученным для вязкоупругого полупространства при $\delta = 1$. Видно, что учет вязких свойств полупространства приводит к уменьшению области контакта и увеличению максимального контактного давления. Кроме того, распределение контактного давления становится несимметричным. При положительных значениях нагрузки \bar{P} (внешняя сила прижимает цилиндр к полупространству) область контакта смещается в сторону движения цилиндра. При достаточно больших отрицательных нагрузках (внешняя сила разрывает цилиндр и полупространство) область контакта смещается против движения цилиндра. Аналогичным образом смещается и область адгезионного взаимодействия поверхностей, в которой безразмерное давление на границе вязкоупругого полупространства постоянно и равно $p = -\lambda$.

Зависимость безразмерной ширины области контакта $(a + b)/l$ и ее смещения относительно оси симметрии цилиндра $(b - a)/l$ от параметра κ представлена на фиг. 3 при $\lambda = 0.5$, $\delta = 3$ и различных нагрузках: $\bar{P} = -6.3$ (кривая 1), $\bar{P} = -3$ (кривая 2) и $\bar{P} = 3$ (кривая 3). Результаты расчетов дают возможность заключить, что ширина области контакта ограничена предельными значениями, которые она имеет при $\kappa \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$. Случай $\kappa \rightarrow \infty$, т.е. $w \rightarrow 0$, соответствует решению задачи о взаимодействии цилиндра с упругим полупространством, характеризующимся модулем E . В случае $\kappa \rightarrow 0$ вязкоупругое полупространство ведет себя как упругое тело с модулем δE , называемым длительным модулем упругости. В случае положительных нагрузок (кривая 3) увеличение скорости скольжения w (уменьшение κ) приводит к уменьшению размера площадки контакта. Этот эффект аналогичен эффекту всплытия при скольжении по вязкоупругому телу в отсутствие адгезии [2]. В случае отрицательных значений нагрузки зависимость размера площадки контакта от скорости немонотонна, а именно: при больших значениях скорости (малых κ) имеется область, в которой уменьшение размера площадки контакта происходит при уменьшении скорости скольжения (кривая 2). Эта область расширяется при увеличении абсолютного значения отрицательной нагрузки \bar{P} . При достаточно больших абсолютных значениях нагрузки уменьшение скорости приводит к уменьшению размера площадки контакта до нуля, за чем следует отрыв взаимодействующих поверхностей (кривая 1). Таким образом, наличие адгезии приводит при отрицательных нагрузках к эффекту, обратному эффекту всплытия: при увеличении скорости разделенные поверхности вступают в контакт, при этом область контакта с возрастанием скорости увеличивается.

Кривая 2' в левой части фиг. 3 получена при тех же значениях параметров, что и кривая 2, но при другой вязкости $\delta = 10$. Кривая 2', в отличие от кривой 2, имеет мо-



Фиг. 4

нотонный характер, т.е. увеличение параметра вязкости δ привело к уменьшению эффектов, связанных с адгезией.

Смещение площадки контакта $(b - a)/l$, графики которого приведены в правой части фиг. 3, положительно при положительных нагрузках, т.е. площадка контакта смещается по ходу движения цилиндра (кривая 3), при этом смещение достигает максимума при некотором κ и стремится к нулю при $\kappa \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$. При отрицательных нагрузках площадка контакта смещается в противоположную сторону (смещение становится отрицательным – кривые 1 и 2).

Результаты показывают, что области контакта и адгезионного взаимодействия смещаются относительно оси симметрии цилиндра, распределение контактного давления также несимметрично. Это приводит к возникновению тангенциальной силы, действующей со стороны вязкоупругого полупространства на цилиндр, несмотря на то, что постановка задачи предполагает нулевые тангенциальные напряжения на границе полупространства ($\tau_{xy} = 0$ при $y = 0$).

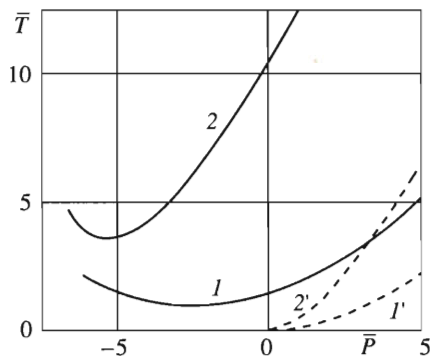
Рассчитаем тангенциальную силу T , которую надо приложить к цилиндру, чтобы обеспечить его движение с постоянной скоростью по границе вязкоупругого полупространства. Эта сила равна компоненте силы реакции полупространства вдоль оси Ox . Поскольку размер области взаимодействия $a_1 + b_1$ много меньше радиуса R цилиндра, справедливо соотношение (фиг. 1)

$$T = \int_{-a_1}^{b_1} p(x) \sin \varphi(x) dx \approx \frac{1}{R} \int_{-a_1}^{b_1} xp(x) dx \quad (4.1)$$

Приводя равенство (4.1) к безразмерному виду, получим

$$\bar{T} = \frac{9\pi T}{2\gamma} = \int_{-a}^b \xi \bar{p}(\xi) d\xi = \int_{-a/l}^{b/l} \xi \bar{p}(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{2l^2} (b_1^2 - b^2 + a^2 - a_1^2) \quad (4.2)$$

На фиг. 4 и 5 представлены графики зависимостей величины \bar{T} , рассчитанной по формуле (4.2), от параметров κ и \bar{P} . Кривые на фиг. 4 получены при $\delta = 3$, $\bar{P} = 3$ и разных значениях параметра адгезии λ . Результаты показывают, что тангенциальная сила отлична от нуля в некотором диапазоне значений κ и стремится к нулю при



Фиг. 5

$\kappa \rightarrow 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$. Эти предельные случаи, как отмечалось, соответствуют решению задачи в упругой постановке. Случай $\lambda = 0$ соответствует контакту без адгезии. Увеличение параметра адгезии λ приводит к возрастанию тангенциальной силы.

Результаты показывают также, что тангенциальная сила T , действующая на цилиндр со стороны полупространства, всегда направлена против движения цилиндра как при положительных, так и при отрицательных значениях нагрузки. Зависимости этой величины от нагрузки \bar{P} приведены на фиг. 5 при наличии адгезии (кривые 1 и 2) и при отсутствии адгезии (кривые 1' и 2'). Кривые 1 и 1' соответствуют $\kappa = 0.01$, кривые 2 и 2' – $\kappa = 0.1$. При отсутствии адгезии ($\lambda = 0$) тангенциальная сила сопротивления движению цилиндра равна нулю при $\bar{P} = 0$ и монотонно возрастает при $\bar{P} > 0$. Учет адгезии приводит к немонотонной зависимости \bar{T} от нагрузки \bar{P} с минимумом в области отрицательных нагрузок.

5. Выводы. Анализ решения задачи о скольжении жесткого цилиндра по вязкоупругому полупространству при наличии адгезии позволяет сделать следующие выводы.

1°. При положительных нагрузках на цилиндр (прижимающих его к полупространству) область контакта смещается относительно оси симметрии цилиндра по ходу движения цилиндра, при этом увеличение скорости скольжения приводит к уменьшению размера области контакта (“эффект всплывания”). Эти эффекты аналогичны тем, что получены без учета адгезии.

2°. При отрицательных нагрузках на цилиндр (отрывающих его от полупространства), достаточно больших по абсолютной величине, область контакта смещается против хода движения цилиндра. Зависимость размера области контакта от скорости становится немонотонной. При постоянной отрицательной нагрузке поверхности, не находящиеся в контакте, могут при увеличении скорости вступить в контакт.

3°. Учет адгезии приводит к увеличению тангенциальной силы сопротивления движению цилиндра (деформационной составляющей силы трения). Эта сила направлена против движения цилиндра как при положительных, так и при отрицательных нагрузках. Сила сопротивления немонотонно зависит от приложенной нагрузки, имея максимум в области отрицательных нагрузок. Увеличение параметра адгезии λ приводит к увеличению силы сопротивления.

4°. Увеличение параметра вязкости δ приводит к уменьшению размера области контакта и увеличению смещения этой области относительно оси симметрии цилиндра, а также к увеличению деформационной составляющей силы трения. При $\delta = 1$ получено решение, совпадающее с решением задачи для контакта упругой полуплоскости с цилиндром при наличии адгезии.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (МК-1345.2003.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (04-0100766).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горячева И.Г.* Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 925–933.
2. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
3. *Johnson K.L.* Contact mechanics and adhesion of viscoelastic spheres // Microstructure and Microtribology of Polymer Surfaces: Selected Papers Intern. Symp. 1998 / Ed. V.V. Tsukruk, K.J. Wahl, 741 Boston, MA, USA: Amer. Chem. Soc., 2000. P. 24–41.
4. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci. 1991. № 150. P. 243–269.
5. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.

Москва
e-mail: makhovskaya@online.ptt.ru

Поступила в редакцию
16.XII.2003