

УДК 539.3

© 2005 г. М. И. Чебаков

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ ОТНОСИТЕЛЬНО БОЛЬШОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ТРЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА

Рассматривается плоская контактная задача теории упругости о взаимодействии штампа, имеющего основание в форме параболоида, со слоем при учете сил кулоновского трения в области контакта. Предполагается, что нижняя грань слоя либо закреплена, либо на ней отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения, а на штамп действуют нормальные и касательные усилия, при этом система штамп – слой находится в условиях предельного равновесия и штамп в процессе деформации слоя не поворачивается. Случай квазистатики, когда штамп перемещается по поверхности слоя равномерно, может быть рассмотрен аналогично в подвижной системе координат. Задача исследуется методом больших  $\lambda$  (см. [1–3] и др.), который здесь получает дальнейшее развитие, а именно: выведены простые рекуррентные соотношения для построения любого количества членов разложения решения соответствующего интегрального уравнения в ряд по отрицательным степеням безразмерного параметра  $\lambda$ , связанного с толщиной слоя.

Цель исследования поставленных задач – получение и анализ чисто аналитическими методами результатов, связанных с изучением влияния геометрических и механических параметров (особенно коэффициента Пуассона и толщины слоя) на положение области контакта, форму деформированной поверхности слоя вне области контакта и эпюру контактных напряжений при учете сил трения в области контакта. Ранее эти зависимости были исследованы путем численного решения интегрального уравнения для задачи о взаимодействии штампа в форме эллиптического параболоида с упругим слоем [4].

Плоские контактные задачи для слоя при учете сил трения в зоне контакта ставились и исследовались во многих работах (см. например [2, 5, 6] и др.).

**1. Постановка задачи.** В декартовых координатах  $(x, y)$  рассмотрим упругий слой  $0 \leq y \leq h$  (фигура). Пусть штамп с формой подошвы в виде параболы с радиусом кривизны  $R$  в вершине взаимодействует с границей слоя  $y = h$ . На штамп действуют нормальная сила  $P$  и касательная сила  $T = \mu P$ , в зоне контакта действуют силы кулоновского трения с коэффициентом трения  $\mu$ , при этом нижняя граница слоя  $y = 0$  либо закреплена (задача 1), либо на ней отсутствуют нормальные перемещения и касательные напряжения (задача 2). Рассматривается случай предельного равновесия, штамп не поворачивается в процессе деформации слоя.

Поставленные контактные задачи с помощью преобразования Фурье сводятся относительно неизвестных нормальных контактных напряжений под штампом  $q(x)$  [6] к следующему интегральному уравнению (ИУ):

$$\int_{-a}^b q(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi = \pi \theta \delta(x), \quad -a \leq x \leq b \quad (1.1)$$

ядро которого представимо в виде двух слагаемых

$$k(t) = k_1(t) - \varepsilon k_2(t), \quad \varepsilon = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\mu$$

$$k_1(t) = \int_0^\infty \frac{L_1(u)}{u} \cos ut du, \quad k_2(t) = \int_0^\infty \frac{L_2(u)}{u} \sin ut du \quad (1.2)$$

Здесь для задачи 1

$$L_1(u) = [2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u] / \Delta^{(1)}(u)$$

$$L_2(u) = [2\kappa (\operatorname{ch} 2u - 1) - 4u^2(1-2\nu)^{-1}] / \Delta^{(1)}(u) \quad (1.3)$$

$$\Delta^{(1)}(u) = 2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2$$

а для задачи 2

$$L_1(u) = [\operatorname{ch} 2u - 1] / \Delta^{(2)}(u), \quad L_2(u) = [\operatorname{sh} 2u - 2(1-2\nu)^{-1}] / \Delta^{(2)}(u) \quad (1.4)$$

$$\Delta^{(2)}(u) = \operatorname{sh} 2u + 2u$$

Введены следующие обозначения:

$$\theta = \frac{G}{1-\nu}, \quad \delta(x) = \delta_0 - \beta x^2, \quad \beta = \frac{1}{2R}, \quad \kappa = 3 - 4\nu \quad (1.5)$$

$G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mu$  – коэффициент трения,  $\delta_0$  – перемещение штампа в вертикальном направлении.

Предположим, что область контакта  $-a \leq x \leq b$  заранее не известна и зависит от величины силы  $P$ .

Сделав в ИУ (1.1) замену переменных

$$x = \eta(t), \quad \xi = \eta(\tau), \quad \eta(t) = \frac{a+b}{2}t - \frac{a-b}{2} \quad (1.6)$$

преобразуем его к виду

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau) k\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right) d\tau = \pi f(t), \quad |x| \leq 1 \quad (1.7)$$

где

$$\varphi(t) = q(\eta(t)), \quad f(t) = \frac{2\theta}{a+b} \delta(\eta(t)), \quad \lambda = \frac{2h}{a+b} \quad (1.8)$$

**2. Решение интегрального уравнения.** Для решения ИУ (1.7), (1.8) с ядрами (1.2)–(1.4) используем метод больших  $\lambda$ . Предварительно преобразуем ядра (1.2)–(1.4) к виду [2]

$$k_1(t) = -\ln|t| + F_1(t), \quad k_2(t) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(t) + F_2(t) \quad (2.1)$$

где функции  $F_i(t)$  представимы в виде рядов

$$F_1(t) = -\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^{2i}, \quad F_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^{2i-1} \quad (2.2)$$

с коэффициентами

$$d_0 = \int_0^{\infty} \frac{1 - L_1(u) - e^{-u}}{u} du, \quad d_i = \frac{(-1)^i}{(2i)!} \int_0^{\infty} [1 - L_1(u)] u^{2i-1} du, \quad i \geq 1 \quad (2.3)$$

$$b_i = \frac{(-1)^i}{(2i-1)!} \int_0^{\infty} [1 - L_2(u)] u^{2i-2} du, \quad i \geq 1$$

Было показано [2], что ИУ (1.7), (2.1) эквивалентно ИУ

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{\varepsilon_1}{\pi X(x)} \left\{ P^* - \varepsilon_1 \int_{-1}^1 \frac{f'(t)X(t)dt}{t-x} + \frac{\varepsilon_1}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \frac{X(t)dt}{t-x} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) F' \left( \frac{\xi-t}{\lambda} \right) d\xi \right\} + \\ & + \varepsilon_0 f'(x) - \frac{\varepsilon_0}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) F' \left( \frac{\xi-x}{\lambda} \right) d\xi \end{aligned} \quad (2.4)$$

при условии

$$P^* = \int_{-1}^1 \varphi(t) dt = \frac{\varepsilon_0}{\ln\lambda + D} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{f(t)dt}{X(-t)} + \Phi \right\} \quad (2.5)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{X(-t)} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) F' \left( \frac{\xi-t}{\lambda} \right) d\xi \quad (2.6)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$F(t) = -F_1(t) + \varepsilon F_2(t), \quad X(x) = (1+x)^{1/2+\gamma} (1-x)^{1/2-\gamma}$$

$$D = -(\ln 2 + C + \psi(1/2 + \gamma)/2 + \psi(1/2 - \gamma)/2)$$

$$\gamma = \pi^{-1} \arctg \varepsilon, \quad \varepsilon_1 = 1/\sqrt{1+\varepsilon^2}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon/(1+\varepsilon^2)$$

$C$  – постоянная Эйлера,  $\psi(x)$  – пси-функция Эйлера.

Представим решение уравнения (2.4) в виде разложения

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \varphi_n(x) \quad (2.7)$$

и подставим его в левую и правую части равенства (2.4). После ряда преобразований в правой части приравняем слева и справа выражения при одинаковых степенях  $\lambda$ . В результате получим следующие рекуррентные соотношения для нахождения функций  $\varphi_n(x)$ :

$$\varphi_0(x) = \frac{\varepsilon_1}{\pi X(x)} [P^* - \varepsilon_1 f_0(x)] + \varepsilon_0 f'(x) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{\varepsilon_1^2}{\pi^2 X(x)} \sum_{i=1}^n i c_i \int_{-1}^1 \frac{X(\tau) d\tau}{\tau-x} \int_{-1}^1 \varphi_{n-i}(t)(t-\tau)^{i-1} dt - \\ &- \frac{\varepsilon_0}{\pi} \sum_{i=1}^n i c_i \int_{-1}^1 \varphi_{n-i}(t)(t-x)^{i-1} dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $c_i$  – коэффициенты представления функции  $F(t)$  в виде ряда

$$F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \quad c_{2i} = d_i, \quad c_{2i-1} = \varepsilon b_i \quad (2.10)$$

$$f_0(x) = \int_{-1}^1 \frac{f'(\tau)X(\tau)}{\tau-x} d\tau \quad (2.11)$$

В дальнейшем потребуются значения следующих интегралов [7, 8]:

$$\begin{aligned} Q^* &= \int_{-1}^1 \tau^k X(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} (-1)^k (1-4\gamma) \sqrt{1+\varepsilon^2} F(3/2+\gamma, -k; 3; 2) \\ Q &= \int_{-1}^1 \frac{\tau^k d\tau}{X(\tau)} = \pi (-1)^k \sqrt{1+\varepsilon^2} F(1/2-\gamma, -k; 1; 2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$R_m^*(t) = \int_{-1}^1 \frac{\tau^k X(\tau) d\tau}{\tau-t} = \pi \varepsilon t^m X(t) - \pi \sqrt{1+\varepsilon^2} t^m (2\gamma+t) + r_m(t)$$

$$r_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Q_{m-k-1}^* t^k, \quad m \geq 1, \quad r_0(t) = 0$$

Здесь  $F(\alpha, -k; n; 2)$  – гипергеометрическая функция [7], в более общем случае она представима гипергеометрическим рядом, но так как здесь второй аргумент – отрицательное целое число, то ряд обрывается и превращается в конечную сумму [7]

$$F(\alpha, -k; n; 2) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha)_i (-k)_i}{i!(n)_i} 2^i, \quad (a)_i = a(a+1)\dots(a+i-1), \quad (a)_0 = 1$$

Следовательно,  $Q_k$  и  $Q_k^*$  – также конечные элементарные суммы.

Учитывая, что

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad f_0(t) = a_1 R_0^*(t) + 2a_2 R_1^*$$

где

$$a_0 = \frac{2\theta}{a+b} \left( \delta_0 - \beta \frac{(a-b)^2}{4} \right), \quad a_1 = \theta \beta (a-b), \quad a_2 = -\theta \beta \frac{a+b}{2} \quad (2.13)$$

найдем

$$\varphi_0 = (\beta_{00} + \beta_{01}x + \beta_{02}x^2)/X(x)$$

$$\beta_{00} = \frac{\varepsilon_1 P^*}{\pi} + \theta\beta\varepsilon_1 \left[ 2\gamma(a-b) + (1-4\gamma^2)\frac{a+b}{2} \right] \quad (2.14)$$

$$\beta_{01} = \theta\beta\varepsilon_1(a-b-2\gamma(a+b)), \quad \beta_{02} = -\theta\beta\varepsilon_1(a+b)$$

Покажем, что функция  $X(x)\varphi_n(x)$  представима в виде многочлена степени  $n$

$$X(x)\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_{nk}x^k, \quad n \geq 1 \quad (2.15)$$

Для этого в соотношениях (2.9) разложим бином  $(t-\tau)^{i-1}$ , изменим порядок суммирования и интегрирования и после ряда громоздких преобразований получим

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{X(x)} \left\{ \frac{\varepsilon_1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n-2} x^k \sum_{m=k+1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} \kappa_{nm} Q_{m-k-1}^* - \frac{\varepsilon_1}{\pi} (2\gamma+x) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^m}{m!} \kappa_{nm} \right\} \quad (2.16)$$

где

$$\kappa_{nm} = \sum_{i=m+1}^n \frac{i!c_i}{(i-m-1)!} P_{n-i, i-m-1}^*, \quad P_{km}^* = \sum_{p=0}^k \beta_{kp} Q_{p+m} \quad (2.17)$$

Видно, что, действительно, функция  $X(x)\varphi_n(x)$  – многочлен степени  $n$ . Также видно, что в правой части равенства (2.16) фигурируют коэффициенты  $\beta_{kp}$  только при  $k \leq n-1$ .

Если теперь в левую часть равенства (2.16) подставить вместо  $\varphi_n(x)$  выражение (2.14), то для определения коэффициентов  $\beta_{nk}$  после громоздких преобразований получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\beta_{nn} = \frac{\varepsilon_1}{\pi} (-1)^n c_n P_{00}^*, \quad n \geq 1$$

$$\beta_{n, n-1} = -\frac{2\gamma\varepsilon_1 (-1)^{n-1}}{\pi (n-1)!} r_{n, n-1} + \frac{\varepsilon_1 (-1)^{n-1}}{\pi (n-2)!} r_{n, n-2}, \quad n \geq 1 \quad (2.18)$$

$$\beta_{nk} = \frac{\varepsilon_1^2}{\pi^2} \sum_{m=k+1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} Q_{m-k-1}^* r_{nm} -$$

$$-\frac{2\gamma\varepsilon_1 (-1)^k}{\pi k!} r_{nk} + \frac{\varepsilon_1 (-1)^k}{\pi (k-1)!} r_{n, k-1}, \quad 0 \leq k \leq n-2, \quad n \geq 2$$

Здесь

$$r_{nm} = \sum_{i=m+1}^{n-1} \frac{i!c_i}{(i-m-1)!} \sum_{p=0}^{n-i} \beta_{n-i, p} Q_{p+i-m-1} + \frac{n!c_n}{(n-m-1)!} \sum_{p=0}^2 \beta_{0p} Q_{p+n-m-1} \quad (2.19)$$

Таким образом, окончательно решение ИУ (1.7) представляется в виде (2.7), (2.14), (2.15) с учетом рекуррентных соотношений (2.18).

Отметим, что рекуррентные соотношения (2.18) содержат только арифметические операции, что позволяет их легко программировать и с помощью программ, выполняющих аналитические преобразования (типа MAPLE), получать в аналитическом виде любое конечное число членов в разложениях (2.7), (2.15). Это позволяет находить решение ИУ с любой степенью точности в области сходимости ряда (2.7).

Ниже выпишем коэффициенты  $\beta_{nk}$  только для случая  $n = 1$  и  $n = 2$ , хотя в ниже приведенных результатах числовых расчетов будем использовать коэффициенты  $\beta_{nk}$  при различных  $n > 2$  в зависимости от величины параметра  $\lambda$  и заданной точности,

$$\begin{aligned} \beta_{10} &= -\frac{2P^*}{\pi} \gamma \epsilon \epsilon_1 b_1, & \beta_{11} &= -\frac{P^*}{\pi} \epsilon \epsilon_1 b_1 \\ \beta_{20} &= -\frac{P^*}{\pi} \epsilon_1 d_1 (1 - 12\gamma^2) + \theta \beta \gamma (1 - 4\gamma^2) \epsilon_1 d_1 \left[ \frac{4}{3} \gamma (a + b) - 2(a - b) \right] \\ \beta_{21} &= \frac{8P^*}{\pi} \epsilon_1 d_1 \gamma + \theta \beta (1 - 4\gamma^2) \epsilon_1 \left[ \frac{2}{3} (a + b) - 2(a - b) \right], & \beta_{22} &= \frac{2P^*}{\pi} d_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

**3. Вывод основных соотношений.** Зная решение ИУ (1.7), контактные напряжения под подошвой штампа при  $-a \leq x \leq b$  найдем по формуле

$$q(x) = \varphi\left(\frac{2x + a - b}{a + b}\right) \quad (3.1)$$

предварительно определив границы области контакта из условия равенства нулю контактных напряжений при  $x = -a$  и  $x = b$ . В результате получим следующую систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными  $a$  и  $b$ :

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 0 \quad (3.2)$$

Система (3.2) громоздка даже в случае, если находить решение ИУ с точностью до членов  $O(\lambda^{-3})$ . Поэтому в каждом конкретном случае решение системы (3.2) будем находить численно с высокой точностью, что не вызывает больших затруднений в силу представления уравнений системы в виде равенства нулю многочленов относительно искомого величин.

Отметим, что при учете равенств (3.2) функция  $\varphi(t)$  представима в виде

$$\varphi(t) = X(-t)\varphi_*(t) \quad (3.3)$$

где  $\varphi_*(t)$  – непрерывная и ограниченная при  $|t| \leq 1$  функция.

Если же решение ИУ (1.7) находить с точностью до членов  $O(\lambda^{-2})$ , то формулы для определения зоны контакта асимптотически при больших значениях  $h$  ( $h \gg \max(a, b)$ ) примут вид

$$\begin{aligned} a &= a^- - \frac{d}{h} + O\left(\frac{1}{h^2}\right), & b &= a^+ + \frac{d}{h} + O\left(\frac{1}{h^2}\right) \\ d &= -\frac{P\mu b_1(1 - 2\nu)}{4\pi\beta G}, & a^\pm &= \left[ \frac{P(1 - \nu)(1 \mp 2\gamma)}{\pi\beta G(1 \pm 2\gamma)} \right]^{1/2}, \quad 0 \leq \gamma < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

В случае задачи 2 выражение для величины  $d$  после вычисления интеграла для  $b_1$  по последней формуле (2.3) упростится и при любых значениях  $\nu$  примет вид

$$d = \frac{P\mu b_1^*(1 - \nu)}{2\pi\beta G}, \quad b_1^* = -\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} b_1 \approx 0.76857 \quad (3.5)$$

Отметим, что в задаче 2 величина  $b_1^*$  не зависит от коэффициента Пуассона  $\nu$ , а в задаче 1 зависит.

В формулах (3.4), (3.5) величина  $d > 0$ , интервал  $(-a^-, a^+)$  – зона контакта при взаимодействии штампа с полупространством, при этом всегда  $a^- > a^+$ , за исключением случая  $\nu = 1/2$  ( $\gamma = 0$ ), когда  $a^- = a^+$ . На основании формул (3.4), (3.5) можно сделать некоторые предварительные выводы о характере зависимости области контакта от некоторых параметров: например, при уменьшении толщины слоя величина  $a$  уменьшается, а величина  $b$  увеличивается. Кроме того, при увеличении силы  $P$  величина  $d$  растет быстрее величин  $a^-$  и  $a^+$ . Таким образом, при уменьшении толщины слоя и увеличении силы  $P$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  происходит смещение зоны контакта в положительном направлении оси  $x$ , что оказывает существенное влияние на характер распределения контактных напряжений, величину их момента и деформацию свободной поверхности. Об этом более подробно речь пойдет ниже.

Для числовых расчетов необходимо также найти зависимость вертикального перемещения штампа  $\delta_0$  от приложенной нормальной силы  $P$  и форму деформированной свободной поверхности вне области контакта.

Для нахождения  $\delta_0$  воспользуемся соотношением (2.5), которое с использованием выражений (2.13) преобразуем к виду

$$\delta_0 = \frac{a+b}{2\theta Q_0} \left\{ (\ln \lambda + D) \frac{2P}{(a+b)\epsilon_1} + \theta \beta \left[ \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} Q_0 + (a-b) Q_1 + \frac{a+b}{2} Q_2 \right] - \Phi \right\}$$

В выражение для  $\Phi$  (формула (2.6)) подставим значения функции  $\varphi(t)$  в виде (2.7), (2.15). Получим

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \sum_{m=0}^n \frac{Q_m}{m!} S_{nm} \quad (3.6)$$

$$S_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m} \frac{(n-i)! c_{n-i}}{(n-i-m)!} \sum_{p=0}^i \beta_{ip} Q_{n-i-m+p} + \frac{n! c_p}{(n-m)!} \sum_{p=1}^2 \beta_{0p} Q_{n-m+p}$$

Найдем момент контактных напряжений. В соответствии с формулой

$$M = \int_{-a}^b x q(x) dx$$

после замены переменных (1.6) получим

$$M = \frac{(a+b)^2}{4} \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt - \frac{a^2 - b^2}{4} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt$$

Окончательно в соответствии с представлением  $\varphi(t)$  в виде рядов (2.14), (2.15) найдем

$$M = \frac{(a+b)^2}{4} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \sum_{k=0}^n \beta_{nk} Q_{k+1} + \sum_{k=0}^2 \beta_{0k} Q_{k+1} \right] - \frac{a-b}{2} P \quad (3.7)$$

Перемещение свободной поверхности вне штампа представляется соотношением

$$w(x) = W\left(\frac{2x+a-b}{a+b}\right), \quad x < -a, \quad x > b$$

$$W(t) = \frac{a+b}{2\pi\theta} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) k\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right) d\tau, \quad |t| > 1 \tag{3.8}$$

С учетом соотношений (2.1) имеем

$$W(t) = -\frac{a+b}{2\pi\theta} \left\{ W_1(t) + \frac{\pi\varepsilon}{2} W_2(t) + W_3(t) \right\}$$

$$W_1(t) = \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \ln|\tau-t| d\tau - P^* \ln \lambda \tag{3.9}$$

$$W_2(t) = \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \operatorname{sgn}(\tau-t) d\tau, \quad W_3(t) = \int_{-1}^1 \varphi(\tau) F\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right) d\tau$$

Используя равенства (2.7), (2.15), найдем

$$W_1(t) = \sum_{k=0}^N \lambda^{-k} \sum_{m=0}^k \beta_{km} t_m(t) + \sum_{m=1}^2 \beta_{0m} t_m(t) - \frac{2P \ln \lambda}{a+b} + O(\lambda^{-(N+1)})$$

$$t_m(t) = \int_{-1}^1 \frac{\tau^m}{X(\tau)} \ln|\tau-t| d\tau \tag{3.10}$$

$$W_2(t) = \begin{cases} P^*, & \text{если } t < -1 \\ -P^*, & \text{если } t > 1 \end{cases}, \quad W_3(t) = \sum_{k=0}^N \lambda^{-k} \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{t^m}{m!} S_{mk} + O(\lambda^{-(N+1)})$$

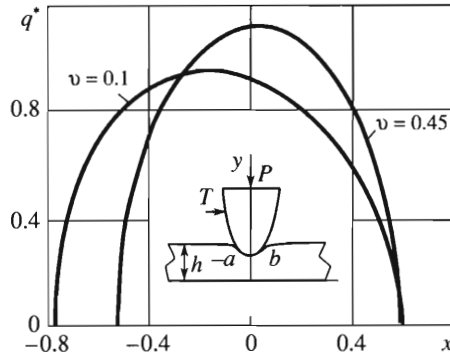
**4. Числовые расчеты.** Были проведены расчеты границ зоны контакта  $a$  и  $b$ , контактных напряжений  $q(x)$  ( $-a \leq x \leq b$ ), момента контактных напряжений  $M$ , вертикальных перемещений штампа  $\delta_0$  и вертикальных перемещений поверхности вне зоны контакта  $w(x)$ .

Введем обозначения

$$q^*(x) = q(x)/G, \quad M^* = M/G, \quad \delta^* = \delta_0 G \tag{4.1}$$

В таблице для задач 1 и 2 приведены значения величин  $a, b, x_*, q^*(x_*), M^*$  и  $\delta^*$ , где  $x = x_*$  – точка зоны контакта с максимальными контактными напряжениями, при некоторых значениях параметров  $P_0 = P/G, h, \nu, \mu$  и  $R = 1$ . Исходные параметры задавались в системе СИ. Все результаты приведены с точностью до членов  $O(\lambda^{-7})$ , кроме результатов первой строки таблицы (они помечены звездочкой), которые вычислялись с точностью до членов  $O(\lambda^{-11})$  и приведены с целью демонстрации точности расчетов.

Отметим, что если вычислять зону контакта исходя из простейших асимптотических формул (3.4), то при  $P_0 = 1, h = 3$  для задачи 2 получим, что  $a = 0.834, b = 0.695$ , если  $\nu = 0.1$ , и  $a = 0.587, b = 0.597$ , если  $\nu = 0.45$ . Эти результаты близки к соответствующим результатам, приведенным в таблице.



На фигуре приведен график распределения безразмерных контактных напряжений  $q^*(x)$  в зоне контакта  $-a \leq x \leq b$  для задачи 2 при  $h = 1.0$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\nu = 0.1$  и  $\nu = 0.45$ .

Результаты расчетов, приведенные в таблице и на фигуре, а также простейшие асимптотические формулы (3.4), позволяют сделать ряд принципиально важных выводов: при уменьшении толщины слоя  $h$ , либо при увеличении силы  $P$ , либо при увеличении коэффициента Пуассона зона контакта смещается в положительном направлении оси  $x$ ; при изменении коэффициента Пуассона в пределах от 0 до 0.5 момент контактных напряжений может менять свой знак, при этом знак величины  $x_*$ , определяющей точку зоны контакта  $x = x_*$ , где контактные напряжения максимальны, также может меняться. В соответствии с величинами  $a$  и  $b$  меняется и характер де-

$P_0$	$h$	$\nu$	$a \cdot 10^3$	$b \cdot 10^3$	$x_* \cdot 10^3$	$q^* \cdot 10^3$	$M^* \cdot 10^3$	$\delta^* \cdot 10^3$
Задача 1, $\mu = 0.5$								
1	1	0.1	775*	578*	-186*	956*	-130*	362*
1	1	0.1	768	574	-188	962	-129	364
		0.3	638	552	-89.7	1077	-60.3	278
		0.45	513	540	9.16	1214	10.5	191
1	2	0.1	820	653	-182	873	-117	527
		0.3	687	607	-9.55	988	-59.2	406
		0.45	567	575	-9.34	1116	-57.9	290
Задача 2, $\mu = 0.5$								
1	1	0.1	764	599	-169	947	-114	369
		0.3	632	591	-64.8	1046	-36.4	307
		0.45	517	584	27.3	1159	30.2	259
1	2	0.1	816	663	-176	869	-110	537
		0.3	683	623	-86.0	976	-48.9	441
		0.45	567	592	-2.03	1099	7.66	366
1	3	0.1	834	672	-184	852	-116	647
		0.3	699	625	-96.1	964	-57.0	528
		0.45	582	590	-1.25	1086	-16.9	434
1/2	1	0.1	597	475	-135	597	-42.9	372
		0.3	501	441	-72.7	677	-22.2	302
		0.45	418	415	-13.3	764	-2.68	247
Задача 2, $\mu = 0.9$								
1	1	0.1	826	544	-291	955	-196	366
		0.3	646	577	-113	1050	-63.1	304
		0.45	489	609	-49.2	1160	54.4	260
1	3	0.1	912	625	-327	846	-206	657
		0.3	734	602	-172	961	-102	530
		0.45	580	594	-22.5	1086	-3.01	434

формации свободной поверхности в окрестности штампа: если  $a > b$  (величина  $\nu$  мала), то в окрестности точки  $x = b$  деформация больше, чем в окрестности точки  $x = -a$ ; если  $a < b$  (величина  $\nu$  близка к 0.5), то наоборот. Всегда найдется такое значение коэффициента Пуассона  $\nu$ , когда картина распределения контактных напряжений и деформация свободной поверхности будут почти симметричными, а момент контактных напряжений будет равен нулю. Кроме того, перемещение штампа  $\delta_0$  практически не зависит от коэффициента трения  $\mu$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. *Александров В.М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления и трения // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.
3. *Чебаков М.И.* О дальнейшем развитии “метода больших  $\lambda$ ” в теории смешанных задач // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 561–565.
4. *Чебаков М.И.* Пространственная контактная задача для слоя с учетом сил трения в неизвестной области контакта // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 1. С. 67–70.
5. *Попов Г.Я.* К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. н. 1963. Т. 16. № 2. С. 15–32.
6. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.

Ростов-на-Дону  
e-mail: chebakov@math.rsu.ru

Поступила в редакцию  
22.IV.2004