

УДК 539.3

© 2005 г. В. М. Александров, А. Г. Ханян

**АНТИПЛОСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ СЛОЯ**

Рассматриваются антиплоские периодические контактные задачи для упругого слоя, модуль сдвига которого экспоненциально меняется по толщине. Задачи сведены к интегральному уравнению первого рода с разностным периодическим нерегулярным ядром. Для приближенного решения этого уравнения использован метод, изложенный ранее [1, 2].

Подобные задачи для однородного упругого слоя рассматривались другим методом [3].

1. Постановка задач. Пусть упругий слой ($|x| < \infty$, $|x| < \infty$, $|y| \leq h$) жестко защемлен по основанию $y = 0$. Модуль сдвига слоя меняется по глубине по закону

$$G(y) = G_0 e^{2ky} \tag{1.1}$$

На верхней грани слоя $y = h$ расположена периодическая система полосовых штампов, к которым приложено погонное сдвигающее усилие T . Под действием этих штампов осуществляется антиплоская деформация слоя. Штампы расположены с периодом $2b$, а область контакта каждого штампа с поверхностью слоя имеет длину $2a$ ($a < b$). Штампы жестко соединены с поверхностью слоя в своих областях контакта.

Будем рассматривать две задачи: 1) штампы сдвигаются усилиями T поочередно в разные стороны на величину ϵ , 2) штампы сдвигаются в одну сторону на величину ϵ . Штамп, расположенный симметрично относительно системы координат, будем называть основным. На фигуре показаны направления усилий T в случае задачи 1. В случае задачи 2 все усилия направлены в ту же сторону, что и усилие, приложенное к основному штампу.

Введем обозначения и исходные формулы. Компоненты вектора перемещения обозначим через u , v , w , причем

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y) \tag{1.2}$$

деформации сдвига

$$\gamma_{xz} = \partial w / \partial x, \quad \gamma_{yz} = \partial w / \partial y \tag{1.3}$$

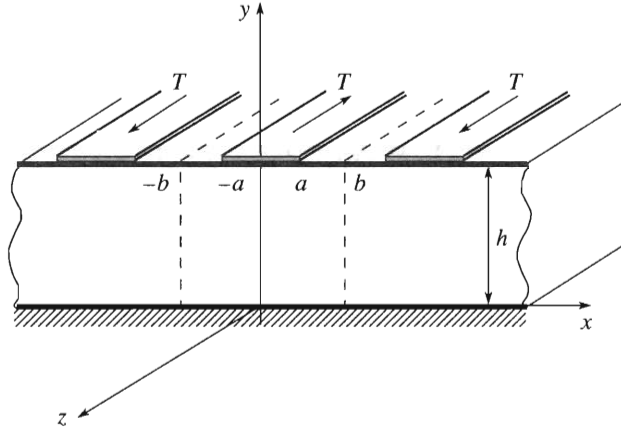
касательные напряжения

$$\tau_{xz} = G(y)\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G(y)\gamma_{yz} \tag{1.4}$$

Подставляя выражения (1.3) и (1.4) в уравнение равновесия, получим уравнение Ламе

$$\partial^2 w / \partial x^2 + 2k \partial w / \partial y + \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \tag{1.5}$$

величина k входит в показатель экспоненты формулы (1.1).



Для основного штампа граничные условия на границах слоя одинаковы для обеих задач и имеют вид

$$y = 0: w = 0 \quad (1.6)$$

$$y = h: w = \varepsilon, \quad (|x| \leq a), \quad \tau_{yz} = 0 \rightarrow \partial w / \partial y = 0 \quad (a < |x| \leq b) \quad (1.7)$$

при $x = \pm b$ граничные условия разные и имеют вид

$$w = 0 \text{ для задачи 1, } \tau_{xz} = 0 \rightarrow \partial w / \partial x = 0 \text{ для задачи 2} \quad (1.8)$$

2. Сведение задач к интегральному уравнению. Рассмотрим следующие вспомогательные задачи 1а и 2а, отличающиеся от соответствующих задач 1 и 2 тем, что граничные условия (1.6) и (1.8) для них сохраняются, а условия (1.7) меняются на следующее:

$$y = h: \tau_{yz} = G(y) \frac{\partial w}{\partial y} = \tilde{\tau}(x); \quad \tilde{\tau}(x) = \begin{cases} \tau(x), & |x| \leq a \\ 0, & a < |x| \leq b \end{cases} \quad (2.1)$$

Раскладывая для задач 1а и 2а функции $w(x, y)$ и $\tilde{\tau}(x)$ на отрезке $-b \leq x \leq b$ в ряды Фурье

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(y) \cos \beta_k x, \quad \tilde{\tau}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k \cos \beta_k x$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2b} \int_{-a}^a \tau(\xi) d\xi, \quad \tau_k = \frac{1}{b} \int_{-a}^a \tau(\xi) \cos \beta_k \xi d\xi \quad (2.2)$$

$$\beta_k = \pi u_k / b; \quad u_k = k - 1/2 \text{ для задачи 1а, } u_k = k \text{ для задачи 2а; } k = 1, 2, \dots$$

(для задачи 1а $w_0(y) \equiv 0$, $\tau_0 = 0$) и используя метод разделения переменных, решим вспомогательные задачи 1а и 2а для уравнения (1.5). В результате найдем

$$w(x, y) = \frac{1}{G(h)} \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k W_k(y) \cos(\beta_k x) \quad (2.3)$$

$$W_k(y) = \frac{\text{sh} \chi_k y}{-\kappa \text{sh} \chi_k h + \chi_k \text{ch} \chi_k h}, \quad \chi_k = \sqrt{\kappa^2 + \beta_k^2}$$

Подставляя в выражение (2.3) коэффициенты τ_k в форме (2.2) и полагая $y = h$, после преобразований получим

$$w(x, h) = \frac{1}{2bG(h)} \int_{-a}^a \tau(\xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k(h) \exp[i\beta_k(\xi - x)] d\xi \quad (2.4)$$

Заметим, что в ходе решения вспомогательных задач все граничные условия основных задач 1 и 2 были удовлетворены (кроме первого условия (1.7)). Удовлетворяя теперь с помощью формулы (2.4) оставшемуся граничному условию, приходим к следующему интегральному уравнению первого рода с разностным ядром относительно неизвестной функции распределения контактных касательных усилий $\tau(x)$:

$$\int_{-a}^a \tau(\xi) K\left[\frac{\pi}{b}(\xi - x)\right] d\xi = \pi G(h)\epsilon \quad (|x| \leq a) \quad (2.5)$$

$$K(s) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{L(\beta u_k)}{u_k} \exp(iu_k s), \quad \beta = \frac{\pi h}{b} \quad (2.6)$$

$$L(v) = \frac{v \operatorname{sh} \sqrt{m^2 + v^2}}{-m \operatorname{sh} \sqrt{m^2 + v^2} + \sqrt{m^2 + v^2} \operatorname{ch}(m^2 + v^2)}, \quad m = \kappa h \quad (2.7)$$

Ядро (2.6) – периодическая функция, кроме того, можно показать, что оно является нерегулярным: при $s \rightarrow 0$ ведет себя как $-\ln|s|$.

3. Приведение интегрального уравнения (2.5) к сингулярному интегральному уравнению. Перейдем в уравнении (2.5) к безразмерным переменным и безразмерным величинам по формулам

$$\xi' = \frac{\xi}{a}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad \varphi(x') = \frac{\tau(ax')}{G(h)}, \quad f = \frac{\epsilon}{a}, \quad \alpha = \frac{\pi a}{b} \quad (3.1)$$

В результате получим

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) K[\alpha(\xi - x)] d\xi = \pi f \quad (|x| \leq 1) \quad (3.2)$$

(штрихи здесь и далее опускаем). Заметим, что интегральное уравнение (3.2) содержит в ядре в силу формул (2.6) и (2.7) три безразмерных параметра α, β, m , причем $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \infty, 0 \leq |m| < \infty$.

Относительно функции $L(v)$, определяемой формулой (2.7), можно заключить, что она нечетная, непрерывная и не обращается в нуль при всех $v, 0 < |v| < \infty$. Кроме того, для нее имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$L(v) = 1 + O(v^{-1}) \quad (|v| \rightarrow \infty), \quad L(v) = Av + O(v^{-3}) \quad (v \rightarrow 0) \quad (3.3)$$

$$A = \operatorname{sh} m \epsilon^m m^{-1}$$

В силу свойств (3.3) функции $L(v)$ ее можно представить в форме

$$L(v) = \operatorname{th} Av + g(v) \quad (3.4)$$

$$g(v) = O(v^{-1}) \quad (|v| \rightarrow \infty), \quad g(v) = O(v^3) \quad (v \rightarrow 0)$$

причем на полупрямой $|v| \in (0, \infty)$ функция $L(v)$ имеет один экстремум – максимум.

Рассмотрим ряд

$$M(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{th} \gamma u_k \sin u_k s, \quad \gamma = \beta A \quad (3.5)$$

Для задач 1 и 2 имеем ([4], формулы 1.441(2), 1.442(2), 8.146(10, 12))

$$M_1(s) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{cosec} \frac{s}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k-1}}{1+q^{2k-1}} \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) s \right] = K(e) F_1(u)$$

$$M_2(s) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{s}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2k}}{1+q^{2k}} \sin ks \right] = K(e) F_2(u); \quad q = e^{-\gamma} \quad (3.6)$$

$$F_1(u) = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad F_2(u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}; \quad u = \frac{K(e)s}{\pi}$$

$M_1(s)$ соответствует задаче 1, $M_2(s)$ – задаче 2. Величина $e < 1$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\pi K(\sqrt{1-e^2})/K(e) = \gamma \quad (3.7)$$

$K(e)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ – эллиптические функции Якоби.

Продифференцируем интегральное уравнение (3.2) один раз по x и на основании соотношений (3.4)–(3.6) запишем его в форме

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) F[\mu(\xi - x)] d\xi = -\alpha \int_{-1}^1 \varphi(\xi) G_*[\alpha(\xi - x)] d\xi \quad (3.8)$$

$$\mu = \pi^{-1} K(e) \alpha, \quad G_*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} g(\beta u_k) \sin u_k s$$

Функция $F(u)$ равна $F_1(u)$ или $F_2(u)$, а на основании свойств (3.4) функции $g(v)$ можно показать, что функция $G_*(s)$ при $|s| \leq 2\alpha$ ограничена. Более тонкое исследование приводит к заключению, что функция $G_*(s)$ при $s \neq 0$ непрерывна, а в окрестности $s = 0$ имеет скачок, т.е. ведет себя следующим образом:

$$G_*(s) = \frac{\pi - s}{2} \operatorname{sgn} s \quad (3.9)$$

Естественно доопределить функцию $G_*(s)$ при $s = 0$ нулем.

Заметим, что

$$F_1[\mu(\xi - x)] - F_1[\mu(\xi + x)] = 2 \operatorname{sn} \mu x \operatorname{cn} \mu \xi \operatorname{dn} \mu x / \Delta$$

$$F_2[\mu(\xi - x)] - F_2[\mu(\xi + x)] = 2 \operatorname{sn} \mu x \operatorname{cn} \mu x \operatorname{dn} \mu \xi / \Delta$$

$$\Delta = \operatorname{sn}^2 \mu \xi - \operatorname{sn}^2 \mu x$$

На основании этих равенств и с учетом того, что $\mu < K(e)$, а функции $\operatorname{sn}(K(e)x)$ и $\operatorname{dn}(K(e)x)$ монотонно убывают от 1 до 0 при возрастании x от 0 до 1 [5], приведем уравнение (3.8) к виду:

для задачи 1

$$\mu \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi) \operatorname{cn} \mu \xi}{\operatorname{sn} \mu \xi - \operatorname{sn} \mu x} d\xi = -\frac{\alpha}{\operatorname{dn} \mu x} - \int_{-1}^1 \varphi(\xi) G_*[\alpha(\xi - x)] d\xi \quad (3.10)$$

для задачи 2

$$\mu \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi) \operatorname{dn} \mu \xi}{\operatorname{sn} \mu \xi - \operatorname{sn} \mu x} d\xi = -\frac{\alpha}{\operatorname{cn} \mu x} - \int_{-1}^1 \varphi(\xi) G_*[\alpha(\xi - x)] d\xi \quad (3.11)$$

Учитывая вновь, что $\mu < K(e)$, а функция $\operatorname{sn}(K(e)x)$ монотонно возрастает от 0 до 1 при возрастании x от 0 до 1 [5], введем новые переменные и обозначение

$$\tau = \operatorname{sn} \mu \xi, \quad t = \operatorname{sn} \mu x, \quad c = \operatorname{sn} \mu \quad (3.12)$$

и введем еще обратную к $\operatorname{sn} u$ функцию

$$\xi = \frac{\operatorname{asnt}}{\mu}, \quad x = \frac{\operatorname{asnt}}{\mu}, \quad \operatorname{asnt} = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-e^2x^2)}} \quad (3.13)$$

(использовано определение ([4], формула 8.144(1)) функции $\operatorname{sn} u$).

На основании соотношений (3.12) и (3.13) приведем уравнения (3.10), (3.11) к виду

$$\int_{-c}^c \frac{\Psi_j(\tau)}{\tau - t} d\tau = - \int_{-c}^c \Psi_j(\tau) H_j(\tau, t) \quad (|t| \leq c) \quad (3.14)$$

где $j = 1$ отвечает задаче 1, а $j = 2$ – задаче 2 и введены обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\xi)}{\operatorname{dn} \mu \xi} &= \Psi_1(\tau), \quad \frac{\varphi(\xi)}{\operatorname{cn} \mu \xi} = \Psi_2(\tau) \\ H_j(\tau, t) &= \frac{\pi \tilde{H}_j(\tau, t)}{K(e)} G_* \left[\frac{\pi}{K(e)} (\operatorname{asnt} \tau - \operatorname{asnt} t) \right] \\ \tilde{H}_1(\tau, t) &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2t^2} \sqrt{1-\tau^2}}, \quad \tilde{H}_2(\tau, t) = \tilde{H}_1(t, \tau) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Важно отметить, что $c < 1 < 1/e$ и корневые особенности в знаменателях выражений $\tilde{H}_j(\tau, t)$ лежат вне интервалов определения и интегрирования в (3.14). Таким образом $H_j(\tau, t)$ – ограниченные части ядер сингулярных интегральных уравнений (3.14) (в левой части (3.14) стоит сингулярный интегральный оператор с ядром Коши).

4. Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения (3.14). В этом разделе индекс j в уравнении (3.14) будем опускать, поскольку схема приближенного решения задач 1 и 2 одна и та же.

С учетом отмеченных выше свойств функции $G_*(s)$ можно доказать [6], что если решение интегрального уравнения (3.14) при заданных значениях параметров α , β и m существует в классе функций, для которых интеграл

$$\int_{-c}^c |\Psi(\tau)|^p d\tau \quad (0 < p < 2) \quad (4.1)$$

сходится, то это решение имеет структуру

$$\Psi(t) = \Psi(t)(c^2 - t^2)^{-1/2} \quad (4.2)$$

причем функция $\Psi(t)$ по меньшей мере при $|t| \leq c$ ограничена.

Заметим, что функция $\psi(t)$ находится из сингулярного интегрального уравнения (3.14) с точностью до слагаемого

$$\pi^{-1} C(c^2 - t^2)^{-1/2} \quad (4.3)$$

Постоянная C затем определяется из дополнительного условия, о котором речь пойдет в разд. 5

Далее воспользуемся известным методом Мультиппа – Каландии [6–8], который изложим кратко применительно к рассматриваемой задаче.

Подставим выражение (4.2) в уравнение (3.14) и перейдем к новым переменным ω и θ согласно формулам

$$\tau = c \cos \omega, \quad t = c \cos \theta \quad (4.4)$$

В результате получим

$$\frac{1}{c} \int_0^\pi \frac{\Omega(\omega) d\omega}{\cos \omega - \cos \theta} = - \int_0^\pi \Omega(\omega) H(c \cos \omega, c \cos \theta) d\omega, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4.5)$$

$$\Omega(\theta) = \Psi(c \cos \theta)$$

Построим для функции $\Psi(t)$ интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам

$$t_n = c \cos \theta_n, \quad \theta_n = \pi(2n - 1)/(2N), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.6)$$

которые являются нулями полинома Чебышева первого рода $T_N(t/c)$ [4]. В частном случае, когда $N = 2r + 1$ ($r \geq 1$), такой многочлен имеет вид [8]

$$\Omega(\theta) \approx \frac{1}{r + 1/2} \sum_{n=1}^{r+1} \Omega(\theta_n) \delta_n \left(1 + 2 \sum_{l=1}^r \cos 2l\theta_n \cos 2l\theta \right), \quad \delta_n = \begin{cases} 1, & n \neq r + 1 \\ 1/2, & n = r + 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Подставив в интегральное уравнение (4.5) приближенное выражение (4.7) для $\Omega(\theta)$ и используя соотношение ([4], формула 7.344(1))

$$\int_0^\pi \frac{\cos l\omega}{\cos \omega - \cos \theta} d\omega = \pi \frac{\sin l\theta}{\sin \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad l = 0, 1, \dots \quad (4.8)$$

вычислим точно интеграл в левой части уравнения (4.5). Для приближенного вычисления интеграла в правой части этого уравнения используем квадратурную формулу Гаусса [7, 8]

$$\int_0^\pi f(\omega) d\omega = \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^N f(\theta_n) \quad (4.9)$$

После вычисления интегралов в (4.5) в полученном соотношении положим $\theta = \theta_s$ и придем к системе r однородных линейных алгебраических уравнений относительно значений $\Omega(\theta_n)$

$$\sum_{n=1}^{r+1} \Omega(\theta_n) \delta_n \left\{ \frac{1}{c \sin \theta_s} \chi_r(\theta_n, \theta_s) + \frac{1}{2} [H(c \cos \theta_n, c \cos \theta_s) + H(-c \cos \theta_n, c \cos \theta_s)] \right\} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r \quad (4.10)$$

$$\chi_r(\omega, \theta) = 2 \sum_{m=1}^r \cos 2m\omega \sin 2m\theta$$

5. Дополнительное условие. В системе (4.10) r уравнений, но $r + 1$ неизвестных $\Omega(\theta_n)$. Для замыкания системы нужно получить еще одно неоднородное уравнение. Это можно сделать следующим образом.

Вспомним, что уравнение (3.8), на основании которого получена система (4.10), отличается на одну операцию дифференцирования от уравнения (3.2). Следовательно, недостающее алгебраическое уравнение относительно величин $\Omega(\theta_n)$ нужно получить из уравнения (3.2). При этом в нем можно положить x равным любому значению; удобно положить $x = 0$.

Итак, из уравнения (3.2) при $x = 0$ и с учетом соотношения (3.4) имеем

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) P_j(\alpha\xi) d\xi = \pi f - \int_{-1}^1 \varphi(\xi) Q_j(\alpha\xi) d\xi$$

$$P_1(\alpha\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{th}\gamma(k-1/2)}{k-1/2} \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \text{cn}\mu\xi}{1 - \text{cn}\mu\xi}$$

$$P_2(\alpha\xi) = \frac{1}{2}\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{th}\gamma k}{k} \cos k\alpha\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \text{dn}\mu\xi}{1 - \text{dn}\mu\xi}$$

$$Q_j(\alpha\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(\beta u_k)}{u_k} \cos u_k \alpha\xi$$
(5.1)

Здесь ряды для $P_1(\alpha\xi)$ и $P_2(\alpha\xi)$ просуммированы с использованием формул из работ [1, 2]. Функции $Q_j(\alpha\xi)$ при $|\xi| \leq 1$ непрерывны, что можно показать на основании свойств (3.4) функции $g(v)$.

Производя в (5.1) замены по формулам (3.12), (3.13) и (3.15), после преобразований получим

$$-\int_{-c}^c \psi_j(\tau) L_j(\tau) d\tau = \pi\mu f - \int_{-c}^c \psi_j(\tau) N_j(\tau) d\tau$$

$$N_j(\tau) = R_j(\tau) \left[S_j(\tau) + Q_j\left(\frac{\pi \text{asn}\tau}{K(e)}\right) \right]$$

$$L_1(\tau) = \ln|\tau|, \quad L_2(\tau) = L_1(e\tau); \quad R_1(\tau) = (1 - \tau^2)^{-1/2}, \quad R_2(\tau) = R_1(e\tau)$$

$$S_1(\tau) = (\sqrt{1 - \tau^2} - 1) \ln|\tau| + \ln(\sqrt{1 - \tau^2} + 1), \quad S_2(\tau) = S_1(e\tau)$$
(5.2)

Подставляя теперь в равенство (5.2) выражение (4.2) и переходя к новым переменным и обозначениям согласно формулам (4.4), (4.5), перепишем равенство (5.2) в форме

$$-\int_0^\pi \Omega_j(\omega) L_j(c \cos \omega) d\omega = \pi\mu f - \int_0^\pi \Omega_j(\omega) N_j(c \cos \omega) d\omega$$
(5.3)

Используя соотношение [3, 9]

$$-\int_0^\pi \cos 2l\omega \ln|c \cos \omega| d\omega = \begin{cases} \pi \ln(2/c), & l = 0 \\ \pi(-1)^l / (2l), & l \neq 0 \end{cases}$$
(5.4)

α	Задача 1			Задача 2		
	β = 2	4	8	β = 2	4	8
	<i>m</i> = -1					
π/9	1.870	1.408	1.194	1.866	1.342	0.942
2π/9	2.738	1.933	1.585	2.728	1.804	1.164
π/3	3.567	2.419	1.947	3.543	2.202	1.334
4π/9	4.394	2.912	2.319	4.344	2.567	1.477
	<i>m</i> = 1					
π/9	0.656	0.720	0.838	0.560	0.371	0.218
2π/9	0.812	0.888	1.051	0.663	0.408	0.230
π/3	0.963	1.049	1.252	0.750	0.434	0.237
4π/9	1.131	1.228	1.470	0.826	0.455	0.242

подставим в левую часть соотношения (5.3) выражение (4.7) и вычислим точно интеграл в левой части (5.3). Для приближенного вычисления интеграла в правой части вновь воспользуемся квадратурной формулой (4.9). В результате найдем еще одно уравнение относительно Ω(θ_n)

$$\sum_{n=1}^{r+1} \Omega_j(\theta_n) \delta_n \left[l_j \left(\frac{2}{c} \right) + \sum_{l=1}^r (-1)^l \frac{\cos 2l\theta_n}{l} + N_j(c \cos \theta_n) \right] = (r + 1/2) \mu f \tag{5.5}$$

$$l_1 \left(\frac{2}{c} \right) = \ln \frac{2}{c}, \quad l_2 \left(\frac{2}{c} \right) = l_1 \left(\frac{2}{ec} \right)$$

дополняющее систему (4.10).

6. Определение связи между сдвигающей силой и величиной сдвига штампа. Заметим, что каждый штамп должен находиться в равновесии под действием сдвигающей силы *T* на его верхней грани и контактного касательного напряжения на его нижней грани. Это условие равновесия для основного штампа имеет вид

$$T = \int_{-a}^a \tau(\xi) d\xi \tag{6.1}$$

Проведем в подынтегральном выражении в формуле (6.1) последовательный переход τ(ξ) → φ(ξ') → ψ(τ) → Ψ(τ) → Ω(ω)

и подставим в него затем Ω(ω) в форме (4.7). В результате получим

$$\frac{T}{G(h)a} = \frac{2}{\mu(r + 1/2)} \sum_{n=1}^{r+1} \Omega_j(\theta_n) \delta_n \left[J_0^{(j)}(c) + 2 \sum_{l=1}^r (-1)^l \cos 2l\theta_n J_{2l}^{(j)}(c) \right] \tag{6.2}$$

$$J_{2l}^{(1)}(c) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2l\omega}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \omega}} d\omega, \quad J_{2l}^{(2)}(c) = J_{2l}^{(1)}(ce), \quad l = 0, 1, \dots$$

Все интегралы J_{2l}⁽¹⁾(c) могут быть выражены через полные эллиптические интегралы первого K(c) и второго E(c) рода. Приведем формулы для первых четырех интегралов

$$J_0^{(1)}(c) = K(c), \quad J_2^{(1)}(c) = [(-2 + c^2)K(c) + 2E(c)]c^{-2}$$

$$J_4^{(1)}(c) = [(16 - 16c^2 + 3c^4)K(c) + (-16 + 8c^2)E(c)](3c^4)^{-1}$$

$$J_6^{(1)}(c) = [(-256 + 384c^2 - 158c^4 + 15c^6)K(c) + (256 - 256c^2 + 46c^4)E(c)](15c^4)^{-1}$$

После решения системы (4.10), (5.5) относительно $\Omega(\theta_n)$ по формуле (6.2) может быть найдена приближенная связь между безразмерной сдвигающей силой $N = T/(G(h)a)$ и безразмерной величиной сдвига штампа $f = \epsilon/a$.

В таблице приведены значения N/f для задач 1 и 2 при $m = -1$, $m = 1$ и разных α и β .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00002), Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (03-01-96551), Минобразования России (УР.04.02.527).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Ступина Т.М. Об интегральном уравнении, возникающем в периодических задачах механики со смешанными граничными условиями // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1996. № 5. С. 49–55.
2. Александров В.М. О решении интегральных уравнений, возникающих в периодических задачах со смешанными граничными условиями // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 838–844.
3. Александров В.М., Коваленко Е.В. Периодические контактные задачи для упругой полосы // Изв. АН АрмССР. Механика. 1977. Т. 30. № 4. С. 18–33.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
5. Jahnke E., Emde F., Losch F. Tafeln hoherer Funktionen. Stuttgart: Teubner, 1960 = Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
6. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
7. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
8. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
9. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.II.2004