УДК 539.3

 И. И. Аргатов

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ШАРА

Рассматривается осесимметричная конструкционно нелинейная контактная задача для упругого шара с заранее неизвестной границей области контакта. Интегральное уравнение для определения плотности контактных давлений составляется с учетом касательных смещений граничных точек упругого тела. В случае малого пятна контакта строится приближенное решение, уточняющее уравнения теории Герца.

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричную задачу о вдавливании упругого шара $r \le R$ в жесткую опору, заданную в сферической системе координат (r, θ, φ) уравнением

$$r = R[1+\rho(\theta)], \quad \rho(0) = 0, \quad \rho'(0) = 0 \tag{1.1}$$

Предполагается, что поверхность шара свободна от касательных усилий и шар деформируется под действием нормальной нагрузки

$$\sigma_r = Q(\theta), \quad \gamma_0 \le \theta \le \pi; \quad \sigma_r = -p(\theta), \quad 0 \le \theta \le \gamma \tag{1.2}$$

Здесь $Q(\theta)$ – заданное, а $p(\theta)$ – искомое давление, окружность $\theta = \gamma$ на сфере $r = R$ ограничивает неизвестную априори область контакта, причем $\gamma < \gamma_0$.

Уравнение статического равновесия шара имеет вид

$$2\pi R^2 \int_0^{\gamma} p(\alpha)\sin\alpha\cos\alpha d\alpha = P \tag{1.3}$$

где P – равнодействующая внешнего давления $Q(\theta)$.

Обозначим через δ_0 сближение центра шара с опорой, а через $u_r(\theta)$ и $u_\theta(\theta)$ – упругие смещения поверхностных точек. Тогда в результате деформации шара точка с координатой (R, θ, φ) получает радиальное $u_r(\theta) + \delta_0\cos\theta$ и касательное $u_\theta(\theta) - \delta_0\sin\theta$ смещения. Сферические координаты рассматриваемой точки в деформированном состоянии (при условии малости величин $u_r(\theta)$, $u_\theta(\theta)$ и δ_0 по сравнению с радиусом R) будут такими:

$$(R + u_r(\theta) + \delta_0\cos\theta, \theta + R^{-1}(u_\theta(\theta) - \delta_0\sin\theta), \varphi) \tag{1.4}$$

Предположим теперь, что рассматриваемая точка пришла в соприкасание с неподвижной опорой. Подставляя координаты точки (1.4) в уравнение опоры (1.1), находим условие контакта в виде

$$R + u_r + \delta_0\cos\theta = R[1+\rho(\theta + R^{-1}(u_\theta - \delta_0\sin\theta))], \quad 0 \le \theta \le \gamma \tag{1.5}$$

Из соотношения (1.5) выводим линеаризованное условие контакта с учетом касательных смещений

$$R + u_r + \delta_0\cos\theta = R[1+\rho(\theta) + \rho'(\theta)R^{-1}(u_\theta - \delta_0\sin\theta)], \quad 0 \le \theta \le \gamma \tag{1.6}$$

Наконец, пренебрегая в квадратных скобках в правой части уравнения (1.6) третьим слагаемым, получаем [1]

$$R + u_r + \delta_0 \cos\theta = R[1 + \rho(\theta)], \quad 0 \le \theta \le \gamma \tag{1.7}$$

Согласно решению осесимметричной задачи о нагружении упругого шара поверхностной нормальной нагрузкой $\sigma_r = N(\theta)$ при $0 \le \theta \le \pi$, полученному в работах [2, 3], радиальные и касательные перемещения поверхностных точек представляются интегралами

$$u_r(\theta) = \frac{R}{2\pi G}\int_0^{\pi} N(\alpha) H_r(\theta, \alpha)\sin\alpha d\alpha \tag{1.8}$$

$$u_\theta(\theta) = \frac{R}{2\pi G}\int_0^{\pi} N(\alpha) H_\theta(\theta, \alpha)\sin\alpha d\alpha \tag{1.9}$$

Здесь

$$H_r(\theta, \alpha) = \frac{\pi}{2}\frac{1-2\nu}{1+\nu} + 4(1-\nu)U(1, \theta, \alpha) + \operatorname{Re}\int_0^1 \left(\frac{A_r}{y^m} + \frac{1}{y^2}\right) U(y, \theta, \alpha) dy \tag{1.10}$$

$$H_\theta(\theta, \alpha) = \frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Re}\int_0^1 \left(\frac{A_\theta}{y^m} + \frac{1}{y^2}\right) U(y, \theta, \alpha) dy \tag{1.11}$$

G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Функция U, входящая в ядра (1.10) и (1.11), выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $\mathbf{K}(k)$ и имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} U(y, \theta, \alpha) = \frac{\mathbf{K}(k)}{k} - \frac{\pi}{2}(1 + y\cos\theta\cos\alpha) \\ h^2 = (1-y)^2 + 4y\sin^2\frac{\theta+\alpha}{2}, \quad k^2 h^2 = 4y\sin\theta\sin\alpha \end{gathered} \tag{1.12}$$

Постоянные A_r, A_θ и m зависят только от коэффициента Пуассона:

$$A_r = 8\nu^2 - 8\nu + 1 + i\frac{16\nu^3 - 16\nu^2 - 4\nu + 5}{\sqrt{3-4\nu^2}} \tag{1.13}$$

$$A_\theta = 4\nu - 3 + i\frac{18\nu^2 + \nu - 2}{2\sqrt{3-4\nu^2}}, \quad 2m = 1 - 2\nu + i\sqrt{3-4\nu^2} \tag{1.14}$$

Подстановка выражений (1.8) и (1.9) в уточненное условие контакта (1.6) приводит к интегральному уравнению относительно контактного давления

$$-\frac{R}{2\pi G}\int_0^{\gamma} p(\alpha) H(\theta, \alpha)\sin\alpha d\alpha = \upsilon(\theta), \quad 0 \le \theta < \gamma \tag{1.15}$$

Через $\upsilon(\theta)$ обозначена заданная с точностью до величины δ_0 функция

$$\upsilon(\theta) = R\rho(\theta) - \delta_0\cos\theta - \rho'(\theta)\delta_0\sin\theta - \frac{R}{2\pi G}\int_{\gamma_0}^{\pi} Q(\alpha) H(\theta, \alpha)\sin\alpha d\alpha \tag{1.16}$$

Ядро интегрального оператора (1.15) выражается через ядра (1.10) и (1.11) так:

$$H(\theta, \alpha) = H_r(\theta, \alpha) - \rho'(\theta) H_\theta(\theta, \alpha) \tag{1.17}$$

В случае сферической вогнутой опоры радиуса $R_1 > R$

$$R\rho(\theta) = \sqrt{R(2R_1 - R) + (R_1 - R)^2 \cos^2\theta} - (R_1 - R)\cos\theta - R \tag{1.18}$$

В случае сферической выпуклой опоры радиуса R_1 следует в обеих частях равенства (1.18) заменить R на $-R$. В случае плоской опоры в пределе при R_1 имеем

$$\rho(\theta) = (\cos\theta)^{-1} - 1 \tag{1.19}$$

Контактная задача для упругого шара с фиксированной областью контакта (опора с острой кромкой) рассматривалась различными методами в [4, 6, 7]. Контактные задачи с заранее неизвестной границей раздела краевых условий на основе условия контакта (1.7) исследовались в работах [1, 7] с применением метода работы [8] (см. также [9], § 55). Ниже для построения приближенного аналитического решения в замкнутой форме применяется метод работы [10]. Трехмерные контактные задачи для упругого полупространства в уточненной постановке с учетом касательных смещений рассматривались ранее [11, 12].

2. Замена переменных. Положим

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \varepsilon x, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \varepsilon t, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \varepsilon \tag{2.1}$$

Кроме этого введем аналогичные принятым ранее [1] обозначения

$$q(x) = \frac{4p(2\operatorname{arctg}\varepsilon x)}{G(1+\varepsilon^2x^2)^{3/2}}, \quad w(x) = -\frac{2\upsilon(2\operatorname{arctg}\varepsilon x)}{R(1+\varepsilon^2x^2)^{1/2}} \tag{2.2}$$

$$S_r(x,t) = \frac{t}{\sqrt{(1+\varepsilon^2x^2)(1+\varepsilon^2t^2)}}\left[\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^1\left(\frac{A_r}{y^m} + \frac{1}{y^2}\right)U^0(y)dy + \right.$$

$$\left. + \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} - 2(1-\nu)\left(1 + \frac{(1-\varepsilon^2x^2)(1-\varepsilon^2t^2)}{(1+\varepsilon^2x^2)(1+\varepsilon^2t^2)}\right)\right] \tag{2.3}$$

$$S_\theta(x,t) = \frac{1}{2\varepsilon\pi}\frac{t(1+\varepsilon^2x^2)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2x^2)(1+\varepsilon^2t^2)}}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}\int_0^1\left(\frac{A_\theta}{y^m} + \frac{1}{y^2}\right)U^0(y)dy \tag{2.4}$$

$$\theta_1 = \frac{1-\nu}{2\pi}, \quad U^0(y) = U(y, 2\operatorname{arctg}\varepsilon x, 2\operatorname{arctg}\varepsilon t)$$

После осуществления замены переменных (2.1) уравнение (1.15) при учете выражения (1.17) запишем в виде

$$\frac{\theta_1}{\varepsilon}\int_0^1 q(t)\frac{4t}{x+t}\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right)dt = -\int_0^1 q(t)S(x,t)dt + \frac{1}{\varepsilon^2}w(x) \tag{2.5}$$

$$S(x,t) = S_r(x,t) - \rho'(2\operatorname{arctg}\varepsilon x)S_\theta(x,t) \tag{2.6}$$

При этом уравнение статического равновесия (1.3) перепишется так:

$$\varepsilon^2\int_0^1 q(t)\frac{(1-\varepsilon^2t^2)t}{(1+\varepsilon^2t^2)^{3/2}}dt = \frac{P}{2\pi R^2G} \tag{2.7}$$

Таким образом, в результате указанных преобразований в исходном интегральном уравнении в явном виде выделен интегральный оператор, отвечающий осесимметричной контактной задаче для упругого полупространства.

3. Метод приближенного решения осесимметричной уточненной контактной задачи. Воспользуемся полученным ранее [13–15] общим решением

$$q(x) = \frac{F(1)}{\pi\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi}\int_x^1 \frac{F'(s)}{\sqrt{s^2-x^2}}ds \tag{3.1}$$

$$\pi F(x) = u(0) + x\int_0^x \frac{u'(z)}{\sqrt{x^2-z^2}}dz \tag{3.2}$$

интегрального уравнения осесимметричной контактной задачи для упругого полупространства

$$\int_0^1 q(t)\frac{4t}{x+t}\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right)dt = u(x)$$

Подставим в формулу (3.2) выражение

$$\frac{\theta_1}{\varepsilon}u(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}w(x) - \int_0^1 q(t)S(x,t)dt \tag{3.3}$$

Имеем

$$\frac{\pi\theta_1}{\varepsilon}F(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}w(0) - \int_0^1 q(t)S(0,t)dt + \frac{x}{\varepsilon^2}\int_0^x \frac{w'(z)dz}{\sqrt{x^2-z^2}} - \int_0^1 q(t)x\int_0^x \frac{S'_z(z,t)dz}{\sqrt{x^2-z^2}}dt$$

или после некоторых преобразований

$$\frac{\pi\theta_1}{\varepsilon}F(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}w(0) + \frac{x}{\varepsilon^2}\int_0^x \frac{w'(z)dz}{\sqrt{x^2-z^2}} - \int_0^1 q(t)\left(S(x,t) - x\int_0^x \frac{S(z,t)-S(x,t)}{(x^2-z^2)^{3/2}}zdz\right)dt \tag{3.4}$$

Из условия обращения в нуль контактного давления на границе области контакта выводим равенство $F(1)=0$. Согласно выражению (3.4) приходим к уравнению

$$w(0) + \int_0^1 \frac{w'(z)dz}{\sqrt{1-z^2}} - \varepsilon^2\int_0^1 q(t)\left(S(1,t) - \int_0^1 \frac{S(z,t)-S(1,t)}{(1-z^2)^{3/2}}zdz\right)dt = 0 \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) служит для определения искомого угла γ, координаты границы области контакта.

Ввиду равенства $F(1)=0$ формула (3.1) переписывается так:

$$q(x) = -\frac{1}{\pi}\int_x^1 \frac{F'(s)}{\sqrt{s^2-x^2}}ds \tag{3.6}$$

Подстановка выражения (3.6) в формулу (2.7) дает после изменения порядка интегрирования

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{P}{2\pi R^2 G} = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 F'(s)ds\int_0^s \frac{(1-\varepsilon^2 t^2)tdt}{\sqrt{s^2-t^2}(1+\varepsilon^2 t^2)^{3/2}}$$

Вычислим теперь внутренний интеграл, а затем проинтегрируем по частям. В результате находим

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{P}{2\pi R^2 G} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 F(s)\left[\frac{1-\varepsilon^2 s^2}{1+\varepsilon^2 s^2} - \frac{2\varepsilon s}{(1+\varepsilon^2 s^2)^{3/2}}\ln\left(\sqrt{1+\varepsilon^2 s^2}+\varepsilon s\right)\right]ds \tag{3.7}$$

Из формулы (3.6) выводим следующее выражение для максимума контактных давлений (в полюсе шара):

$$q(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{F'(s)}{s}ds \tag{3.8}$$

Интегрируя здесь по частям при учете значений $F(1) = 0$ и $F'(0) = 0$ и подставляя в полученный результат выражение (3.4), получаем

$$\begin{gathered}\frac{\pi^2\theta_1}{\varepsilon}q(0) = \frac{1}{\varepsilon^2}w(0) - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{w'(z)}{z}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin z\right)dz - \int_0^1 q(t)S(0,t)dt + \\ + \int_0^1 q(t)\int_0^1\left(\frac{S(s,t)-S(0,t)}{s^2} - \frac{1}{s}\int_0^s \frac{S(z,t)-S(s,t)}{(s^2-z^2)^{3/2}}z\,dz\right)ds\,dt\end{gathered} \tag{3.9}$$

Согласно теории Герца [16] (см. также [2, 17]) контактное давление распределено в области контакта по полуэллипсоидальному закону

$$q(x) = q_0\sqrt{1-x^2} \tag{3.10}$$

где q_0 – максимальное значение контактных давлений.

Подставляя выражение (3.10) в правую часть уравнения (3.9), получаем приближенное уравнение для отыскания величины q_0. После определения величины q_0 выражение (3.10) подставляем в уравнение (3.5) для выражения угловой координаты γ границы области контакта через величину δ_0 сближения шара с опорой. Наконец, подстановка выражения (3.10) в формулу (3.7) дает возможность установить приближенную зависимость величины δ_0 от величины P силы, прижимающей шар к опоре.

4. Выделение особенности у функции $S(x, t)$. Вместо формулы (1.12) для ядра в интегралах (1.10) и (1.11) воспользуемся следующим представлением [3] :

$$U(y,\theta,\alpha) = \int_0^{\pi/2}[h_\lambda(y)^{-1} - 1 - y\lambda]d\psi \tag{4.1}$$

$$h_\lambda(y) = \sqrt{y^2 - 2y\lambda + 1}, \quad \lambda = \cos(\theta+\alpha) + 2\sin\theta\sin\alpha\sin^2\psi \tag{4.2}$$

Подстановка выражения (4.1) в формулы (1.10), (1.11) приводит к интегралу

$$I_\lambda = \int_0^1\left(\frac{A}{y^m} + \frac{1}{y^2}\right)[h_\lambda(y)^{-1} - 1 - y\lambda]dy \tag{4.3}$$

Найдем асимптотику интеграла (4.3) при $\lambda \to 1$. Имеем

$$I_\lambda = \int_0^1 (Ay^{2-m}+1)\frac{2-y^2+(1-\lambda^2)(y^2-2\lambda y-3)}{h_\lambda(y)[1+(1+y\lambda)h_\lambda(y)]}dy$$

Рассмотрим сначала поведение при $\lambda \to 1$ интеграла

$$I_\lambda^0 = \int_0^1 (Ay^{2-m}+1)\frac{dy}{h_\lambda(y)}$$

Выделяя расходящиеся в пределе (при $\lambda = 1$) интегралы (см., в частности [18], гл. 1, § 4), получаем

$$I_\lambda^0 = (A+1)\int_0^1 \frac{dy}{h_\lambda(y)} - A\int_0^1 \frac{1-y^{2-m}}{1-y}dy + 2A(1-\lambda)\int_0^1 \frac{1-y^{2-m}}{1-y}\frac{ydy}{h_\lambda(y)(1-y+h_\lambda(y))}$$

Используя теперь эталонные интегралы

$$I_\lambda^1 = \int_0^1 \frac{dy}{h_\lambda(y)} = -\frac{1}{2}\ln(1-\lambda) + \ln(\sqrt{2}+\sqrt{1-\lambda})$$

$$I_\lambda^2 = \int_0^1 \frac{dy}{h_\lambda(y)(1-y+h_\lambda(y))} = \frac{1}{1-\lambda}\ln\left(1+\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}\right)$$

можно показать справедливость следующих соотношений:

$$I_\lambda^0 = \frac{A+1}{2}(-\ln(1-\lambda)+\ln 2) - A\int_0^1 \frac{1-y^{2-m}}{1-y}dy + O(\sqrt{1-\lambda}) \tag{4.4}$$

$$I_\lambda = I_\lambda^0 + O(\sqrt{1-\lambda}), \quad \lambda \to 0 \tag{4.5}$$

Далее, осуществляя замену переменных (2.1) в формуле (4.2), получаем

$$\frac{1-\lambda}{2\varepsilon^2} = \frac{x^2+t^2+2xt\cos 2\psi}{(1+\varepsilon^2x^2)(1+\varepsilon^2t^2)}$$

Имея в виду интегрирование в формуле (4.1), вычислим интеграл

$$I(\beta) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+\beta^2+2\beta\cos 2\psi)d\psi \ (0 \le \beta < 1)$$

Дифференцируя по параметру β, будем иметь

$$\frac{dI}{d\beta} = \int_0^{\pi} \frac{\beta+\cos\psi}{1+\beta^2+2\beta\cos\psi}d\psi = 0$$

В силу начального значения $I(0) = 0$ находим $I(\beta) \equiv 0$. Соответственно получаем

$$\int_0^{\pi/2} \ln(x^2+t^2+2xt\cos 2\psi)d\psi = \pi\ln\max\{x, t\} \ (x \ne t)$$

Таким образом, на основании асимптотических формул (4.4) и (4.5) устанавливаем соотношения

$$S_r(x, t) = t\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(A_r+1)\ln\varepsilon\max\{x, t\} + c_0\right] + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.6}$$

$$c_0 = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} - 4(1-\nu) - \frac{1}{2}\mathrm{Re}A_r\int_0^1 \frac{1-y^{2-m}}{1-y}dy \tag{4.7}$$

Подчеркнем, что формула (4.6) согласуется с известными результатами [1].

Аналогично находим

$$S_\theta(x,t) = -\frac{\mathrm{Re}(A_\theta+1)}{4\varepsilon}\frac{t}{x}h(x-t) + O(1), \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.8}$$

где $h(t)$ – функция Хевисайда.

Согласно предположениям (1.1) справедливо разложение

$$\rho(\theta) = \alpha_0\theta^2 + O(\theta^3), \quad \theta \to 0 \tag{4.9}$$

Величина $R(1-2\alpha_0)^{-1}$ имеет смысл радиуса кривизны опоры в полюсе.

Подставляя асимптотические выражения (4.6), (4.8) и (4.9) в формулу (2.6), получаем

$$S(x,t) = t[-\beta^2 \ln\varepsilon \max\{x,t\} + c_0] - 2\beta\alpha_0 th(x-t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0 \tag{4.10}$$

Постоянная c_0 определена формулой (4.7), кроме того, введено обозначение

$$\beta = 1-2\nu \tag{4.11}$$

При выводе соотношения (4.10) учтены равенства $\mathrm{Re}(A_r+1) = 2\beta^2$ и $R(A_\theta+1) = -2\beta$ (см. формулы (1.13) и (1.14)).

5. Случай малого пятна контакта. Найдем разложение функции $w(x)$, определяемой второй формулой (2.2) и фигурирующей в правой части уравнения (2.5). С этой целью рассмотрим функцию

$$V(\theta) = -\frac{R}{2\pi G}\int_{\gamma_0}^{\pi} Q(\alpha)H(\theta,\alpha)\sin\alpha d\alpha \tag{5.1}$$

При $\gamma_0 > 0$ функция $V(2\,\mathrm{arctg}\,\varepsilon x)$ регулярно зависит от параметра ε. Ввиду громоздкости получаемых формул разберем только частный случай нагружения шара сосредоточенной силой в его полюсе $\alpha = \pi$. При этом согласно уравнению равновесия (1.3) функция (5.1) принимает вид

$$V(\theta) = \frac{R}{2\pi G}\frac{P}{2\pi R^2}H(\theta,\pi) \tag{5.2}$$

Можно показать, что при $\varepsilon \to 0$ справедливо разложение

$$\frac{2}{\pi}H(2\,\mathrm{arctg}\,\varepsilon x, \pi) = \frac{1-2\nu}{1+\nu} + 2(1-\nu) + \ln 2 + C_r^1 +$$
$$+\varepsilon^2 x^2\left[-7(1-\nu) + \frac{1}{4} + 2\ln 2 + 2C_r^2 + 8\alpha_0\left(\frac{1}{8} + \ln 2 + C_\theta^2\right)\right] + O(\varepsilon^3) \tag{5.3}$$

где введены обозначения

$$C_r^1 = \mathrm{Re}\int_0^1 \frac{A_r y^{2-m}}{1+y}dy, \quad C^2 = \mathrm{Re}\int_0^1 \frac{Ay^{2-m}}{(1+y)^3}(3+3y+y^2)dy$$

Таким образом, в случае (5.2) на основании равенства (5.3) для функции

$$w(x) = -\frac{2}{R(1+\varepsilon^2 x^2)^{1/2}}[R\rho(\theta) - \delta_0\cos\theta - \rho'(\theta)\delta_0\sin\theta + V(\theta)]\big|_{\theta = 2\,\mathrm{arctg}\,\varepsilon x}$$

имеет место разложение

$$w(x) = w(0) - a_0\varepsilon^2 x^2 + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \to 0 \tag{5.4}$$

$$w(0) = \frac{2\delta_0}{R} - \frac{P}{4\pi R^2 G}\left(\frac{1-2\nu}{1+\nu} + 2(1-\nu) + \ln 2 + C_r^1\right) \tag{5.5}$$

$$a_0 = 8\alpha_0 + (5 - 16\alpha_0)\frac{\delta_0}{R} + \frac{P}{4\pi R^2 G}\left(\alpha_0(1 + 8\ln 2) + \frac{1}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} - 8(1-\nu) - \frac{1}{2}C_r^1 + 2C_r^2 + 8\alpha_0 C_\theta^2\right) \tag{5.6}$$

Приступим теперь к построению приближенного решения уравнения (2.5). Описанную в разд. 3 схему легче всего реализовать следующим образом. Для плотности (3.10) сначала вычислим вспомогательные функции $u(x)$ и $F(x)$, определяемые формулами (3.3) и (3.2). Так, согласно выражению (4.10) имеем

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}S(x,t)dt = (-\beta^2\ln\varepsilon x + c_0 - 2\beta\alpha_0)\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,t\,dt + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,t(-\beta^2\ln\varepsilon t + c_0)dt$$

В результате интегрирования получаем

$$\frac{\theta_1}{\varepsilon}u(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}w(x) - \frac{q_0}{3}\left\{\beta^2[\sqrt{1-x^2} - \ln(1+\sqrt{1-x^2})] + \right.$$

$$\left. + \left(2\beta\alpha_0 + \frac{\beta^2}{3}\right)(1-x^2)^{3/2} - \beta^2\ln\varepsilon + c_0 - 2\beta\alpha_0\right\} \tag{5.7}$$

Подстановка выражения (5.7) в формулу (3.2) при учете представления (5.4) дает

$$\frac{\pi\theta_1}{\varepsilon}F(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}w(0) - \frac{q_0}{3}\left(-\beta^2\ln 2\varepsilon + c_0 + \frac{4}{3}\beta^2\right) - 2a_0x^2 +$$

$$+ \frac{q_0 x}{6}\left\{\beta^2\left(\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x^2)\right) + (6\beta\alpha_0 + \beta^2)\left(x + \frac{1}{2}(1-x^2)\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\right\} \tag{5.8}$$

Переходя в правой части равенства (5.8) к пределу при $x \to 1-0$, находим

$$\frac{\pi\theta_1}{\varepsilon}F(1) = \frac{1}{\varepsilon^2}w(0) - 2a_0 - \frac{q_0}{3}\left(-\beta^2\ln 4\varepsilon + c_0 + \frac{5}{6}\beta^2 - 3\beta\alpha_0\right) \tag{5.9}$$

Далее, пренебрегая членами $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с единицей в подынтегральном выражении (3.7), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{P}{2\pi R^2 G} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 F(s)ds \tag{5.10}$$

Подставляя в формулу (5.10) выражение (5.8), находим

$$\frac{\pi^2\theta_1}{\varepsilon^3}\frac{P}{2\pi R^2 G} = \frac{1}{\varepsilon^2}w(0) - \frac{2}{3}a_0 + \frac{q_0}{3}\left[\beta^2\left(\ln 4\varepsilon - \frac{19}{12}\right) - c_0 + \frac{3}{2}\beta\alpha_0\right] \tag{5.11}$$

Для вычисления величины q_0 по формуле (3.8) воспользуемся следующим представлением:

$$\frac{\pi\theta_1}{\varepsilon}[F(x) - F(0)] = -2a_0x^2 + \frac{q_0x}{3}\int_0^x\left(\frac{\beta^2}{1+\sqrt{1-z^2}} + (\beta^2 + 6\beta\alpha_0)\sqrt{1-z^2}\right)\frac{zdz}{\sqrt{x^2 - z^2}}$$

Подставляя данное выражение в соотношение (3.8), приходим к уравнению

$$\frac{\pi^2\theta_1}{\varepsilon}q_0 = \frac{\pi\theta_1}{\varepsilon}F(0) + 2a_0 - \frac{q_0}{3}\int_0^1\frac{ds}{s}\int_0^s\left(\frac{\beta^2}{1+\sqrt{1-z^2}} + (\beta^2 + 6\beta\alpha_0)\sqrt{1-z^2}\right)\frac{zdz}{\sqrt{s^2 - z^2}} \tag{5.12}$$

В повторном интеграле в (5.12) изменим порядок интегрирования, а затем проинтегрируем по переменной s. Наконец, используя значения интегралов

$$\int_0^1\sqrt{1-z^2}\arccos z\,dz = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{16}, \quad \int_0^1\frac{\arccos z}{1+\sqrt{1-z^2}}dz = \frac{\pi^2}{8} - \ln 2$$

из уравнения (5.12) находим

$$q_0 = \frac{\dfrac{\varepsilon}{\pi^2\theta_1}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}w(0) + 2a_0\right)}{1 + \dfrac{\varepsilon}{3\pi^2\theta_1}\left[-\beta^2\ln 2\varepsilon + c_0 + \beta^2\left(\dfrac{19}{12} + \dfrac{3\pi^2}{16} - \ln 2\right) + 3\beta\alpha_0\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi^2}{8}\right)\right]} \tag{5.13}$$

Возвращаясь к формуле (5.9) и полагая $F(1) = 0$, получаем уравнение

$$\frac{1}{\varepsilon^2}w(0) - 2a_0 - \frac{q_0}{3}\left(-\beta^2\ln 4\varepsilon + c_0 + \frac{5}{6}\beta^2 - 3\beta\alpha_0\right) = 0 \tag{5.14}$$

Три уравнения (5.11), (5.13) и (5.14) при учете обозначения (5.5) связывают три неизвестных величины ε, δ_0 и q_0. Найдем асимптотическое решение данной системы, оставаясь в рамках точности, с которой были выведены ее уравнения.

Во-первых, исключая из уравнений (5.11) и (5.13) величину $w(0)$, выражаем параметр q_0 через величину контактной силы:

$$q_0 = \frac{\dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{P}{2\pi R^2 G} + \dfrac{8}{3}\dfrac{\varepsilon}{\pi^2\theta_1}a_0}{1 + \dfrac{\varepsilon}{\pi^2\theta_1}\left[\dfrac{\pi^2}{16}\beta^2 + \beta\alpha_0\left(1 + \dfrac{\pi^2}{8}\right)\right]} \tag{5.15}$$

Во-вторых, с помощью уравнения (5.13) исключим величину $w(0)$ из уравнения (5.14). После этого в полученное уравнение подставим значение параметра q_0, определяемое формулой (5.15). В результате приходим к уравнению

$$\frac{4}{3}\frac{\varepsilon^3 a_0}{\pi^2\theta_1} - \frac{\varepsilon^4 a_0}{(\pi^2\theta_1)^2}(\beta^2 + 2\beta\alpha_0) = \frac{P}{2\pi R^2 G} \tag{5.16}$$

Заметим, что уравнение (5.16) с точностью до членов $O(\varepsilon^3)$ по сравнению с единицей согласуется с асимптотическим решением по методу "больших λ", полученным ранее [1] (ср. с формулой (41) при $\beta\alpha_0 = 0$).

Уравнение (5.16) служит для определения искомого параметра ε, определяющего размер пятна контакта. Асимптотическое решение уравнения (5.16) при $\varepsilon \ll 1$ (правая часть уравнения (5.16) предполагается малой) таково:

$$\varepsilon = \left(\frac{3\pi\theta_1 P}{8a_0R^2G}\right)^{1/3}\left[1 + \frac{\beta^2 + 2\beta\alpha_0}{4\pi^2\theta_1}\left(\frac{3\pi\theta_1 P}{8a_0R^2G}\right)^{1/3}\right] \tag{5.17}$$

Для выражения сближения δ_0 центра шара с опорой в зависимости от силы P, действующей на шар, подставим выражение, определяемое формулами (5.5), (5.15) и (5.17), в уравнение (5.14). Окончательно будем иметь

$$\frac{\delta_0}{R} = \left(\frac{3\pi\theta_1\sqrt{a_0}P}{8R^2G}\right)^{2/3} + \frac{P}{8\pi R^2G}\left[\frac{2}{3}\beta^2\ln\frac{R^2Ga_0}{24\pi\theta_1 P} + C_0\right] \tag{5.18}$$

$$C_0 = \frac{1-2\nu}{1+\nu} + 2(1-\nu) + \ln 2 + C_r^1 + 2c_0 + \frac{19}{6}\beta^2 - 3\beta\alpha_0 \tag{5.19}$$

Следует подчеркнуть, что при $\varepsilon \ll 1$ выполняются асимптотические соотношения $\delta_0 \sim \varepsilon^2$ и $P \sim \varepsilon^3$. Тем самым, величина a_0, определяемая формулой (5.6), в результирующих уравнениях (5.17) и (5.18) принимает следующее значение:

$$a_0 = 8\alpha_0 \tag{5.20}$$

Наконец, приближенное выражение для плотности контактных давлений получается на основе формулы (3.6), куда следует подставить выражение (5.8), в котором параметр q_0 определен формулой (5.15).

Для сопоставления полученного результата (5.18) с аналогичным результатом работы [1] необходимо принять во внимание следующие два обстоятельства. Во-первых, интегральное уравнение контактной задачи в работе [1] составлено без учета касательных смещений. Во-вторых, коэффициенты разложения (32) [1] определяются заданной внешней нагрузкой (см. формулы (5.5) и (5.6)). В рассматриваемом частном случае (5.2) эта зависимость выделена явно и выражена через величину контактной силы P. Таким образом, нетрудно показать, что при учете указанных обстоятельств уравнение (5.14) с подстановками (5.15) и (5.16), из которого непосредственно получена формула (5.18), с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с единицей согласуется с уравнением (40) работы [1].

Следует отметить, что в отличие от построенного приближенного решения предложенное в работе [19] приближенное решение контактной задачи для упругого шара в случае малого пятна контакта не является асимптотически точным. Это означает, что погрешность решения [19] оказывается того же порядка, что выведенная в работе [19] поправка к теории Герца. В частности, аналогичная формуле (5.15) формула (3.4) работы [19] попросту совпадает с герцевской. При этом, разумеется, решение [19] не согласуется с асимптотическим решением, полученным в работе [1].

6. Примеры. В случае сферической вогнутой опоры радиуса $R_1 > R$ из формулы (1.18) определяем $\alpha_0 = (2R_1)^{-1}(R_1 - R)$; в случае сферической выпуклой опоры радиуса R_1 имеем $\alpha_0 = (2R_1)^{-1}(R_1 + R)$. В случае плоской опоры формула (1.19) дает $\alpha_0 = 1/2$. Соответственно по формуле (5.20) рассчитывается величина a_0.

Разложение (5.3) было получено для случая (5.2) действия на упругий шар внешней сосредоточенной силы. Нетрудно видеть, что при выводе результирующих асимптотических формул (5.17) и (5.18) потребовался только главный член разложения (5.3). Поэтому в общем случае (5.1) нагружения упругого шара распределенной нагрузкой формула (5.17) без изменений сохраняет силу. Однако в формуле (5.18) левая часть заменяется на выражение $R^{-1}(\delta_0 - V(0))$, а постоянная C_0, определяемая формулой (5.19) – следующей: $2c_0 + (19/6)\beta^2$.

Рассмотрим вкратце задачу о сдавливании упругого шара двумя одинаковыми штампами (см. заметку [7]). Выделяя какой-либо штамп, влияние на напряженное состояние в его окрестности со стороны другого штампа в главном моделируем действием сосредоточенной силы. Таким образом, вновь приходим к уравнению (5.17) для определения размера пятна контакта. При этом соотношение (5.18) будет определять величину сближения штампов, равную $2\delta_0$.

Задача о сдавливании двух одинаковых упругих шаров сосредоточенными силами, действующими вдоль их общей оси симметрии, также может быть разобрана на основе полученного решения. Эта задача сводится к задаче о давлении упругого шара на плоскую жесткую опору ($a_0 = 4$). Таким образом, размер пятна контакта между упругими шарами определяется уравнением (5.17), а сближение центров шаров, равное $2\delta_0$, рассчитывается по формуле (5.18).

В случае сдавливания двух одинаковых упругих шаров двумя одинаковыми штампами следует различать пятно контакта между штампами и пятно контакта шара со штампом. Соответственно уравнение (5.17) следует записать дважды с различными значениями постоянной a_0. Сближение штампов также рассчитывается при помощи двукратного применения формулы (5.18).

В случае сдавливания упругого шара двумя различными штампами, на каждый из которых действует сила P, радиусы пятен контакта определяются по формуле (5.17). Уравнение (5.18) с различными значениями величины (5.20) будет определять сближение каждого из штампов с центром шара. Тем самым относительное сближение штампов равно сумме правых частей указанных уравнений, а их полуразность дает относительное отклонение центра шара от среднего положения в деформированном состоянии.

7. Заключение. Полученное решение осесимметричной контактной задачи для упругого шара, очевидно, в главном согласуется с теорией Герца и представляет собой ее обобщение в рассматриваемом частном случае.

Заметим, что использование в расчетах дробно-рациональной аппроксимации типа (5.13) значительно повышает их точность (см. [10], а также [20, 21]).

Подчеркнем, что в работах [1, 7] в основу расчетов было положено граничное условие (1.7), которое отличается от использованного в данной работе отсутствием членов $\rho'(\theta)u_\theta - \delta_0\rho'(\theta)\sin\theta$. Прослеживая вновь выкладки (см., в частности, формулы (5.6) и (5.20)), заключаем, что результирующие асимптотические формулы были получены при пренебрежении члена $\delta_0\rho'(\theta)\sin\theta$. Однако член $\rho'(\theta)u_\theta$ был использован при формировании ядра (1.17) исходного интегрального уравнения (1.15) и был учтен в выражении (2.6) и асимптотическом представлении (4.10) для ядра $S(x, t)$, характеризующем отличие упругого шара от упругого полупространства. Таким образом, можно рекомендовать следующий "промежуточный" (между формулами (1.6) и (1.7)) вариант граничного условия контакта:

$$R + u_r + \rho'(\theta)u_\theta + \delta_0\cos\theta = R[1 + \rho(\theta)], \quad 0 \le \theta \le \gamma \tag{7.1}$$

В любом случае ((1.6) или (7.1)) касательные смещения граничных точек упругого тела должны учитываться при уточненной (отличной от герцевской) постановке контактной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства промышленности, науки и технологий РФ (грант Президента Российской Федерации МД-182.2003.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бондарева В.Ф.* Контактные задачи для упругого шара // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 61–70.
2. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
3. *Бондарева В.Ф.* О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 6. С. 1029–1033.
4. *Абрамян Б.Л., Арутюнян Н.Х., Баблоян А.А.* О двух контактных задачах для упругой сферы // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 622–629.
5. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* О вдавливании жесткого штампа в упругую сферу // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1101–1105.
6. *Карпенко В.А.* Осесимметричная контактная задача для упругого шара // Изв. АН Арм.ССР. Сер. Механика, 1971. № 4. С. 16–19.
7. *Карпенко В. А.* Осесимметричное вдавливание двух штампов в упругий шар // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 763–766.
8. *Александров В.М.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 934–943.
9. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
10. *Аргатов И.И.* Приближенное решение осесимметричной контактной задачи с учетом касательных смещений на поверхности контакта // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 1. С. 143–150.
11. *Галанов Б.А.* Постановка и решение некоторых уточненных задач упругого контакта двух тел // Изв. АН СССР. МТТ, 1983. № 6. С. 56–63.
12. *Галанов Б.А., Кривонос Ю.М.* Об учете в задаче Герца тангенциальных смещений на поверхности контакта // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища школа, 1984. Вып. 53. С. 87–94.
13. *Леонов М.Я.* К теории расчета упругих оснований // ПММ. 1939. Т. 3. Вып. 2. С. 53–78.
14. *Schubert G.* Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken // Ing.-Archiv. 1942. Bd. 13. № 3. S. 132–147.
15. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
16. *Hertz H.* Üeber die Berührung fester elastischer Körper // J. für die Reine und Angewandte Math. 1882. Bd. 92. S. 156–171.
17. *Johnson K.L.* Control mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985 = *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
18. *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
19. *Villaggio P.* The rebound of an elastic sphere against a rigid wall // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996. V. 63. № 2. P. 259–263.
20. *Аргатов И.И.* Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // Ж. вычисл. математики и матем. физики. 2000. Т. 40. № 4. С. 623–632.
21. *Andrianov I.V., Awrejcewicz J.* New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods // Appl. Mech. Rev. 2001. V. 54. № 1. P. 69–92.

Санкт-Петербург
e-mail: argatov@home.ru

Поступила в редакцию
10.XII.2003