УДК 539.3

© 2005 г. Р. Д. Банцури, Н. Н. Шавлакадзе

ЗАДАЧА ИЗГИБА БАЛКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается плоская контактная задача о передаче нормального усилия заданной интенсивности на упругую анизотропную клиновидную пластинку упругой балкой переменной изгибной жесткости. Балка сцеплена с одной из граней пластинки, другая ее грань свободна от напряжений. Решение задачи получено в замкнутой форме путем сведения ее к граничной задаче Карлемана со сдвигом для полосы. Сделан вывод о характере особенности контактного нормального напряжения в вершине клина.

Рассматривались [1–3] контактные задачи взаимодействия упругих тел различной формы с тонкими упругими элементами в виде стрингеров, балок или включений. При помощи граничных задач теории аналитических функций изучались задачи для упругого изотропного или анизотропного клина, подкрепленного упругими элементами постоянной жесткости [4–8], а также задача для упругого изотропного клина, подкрепленного по биссектрисе упругим стержнем переменной жесткости [9]. Рассматривалась [10] контактная задача для анизотропной клиновидной пластинки с упругим креплением переменной жесткости.

Предположим, что на одной границе ($\arg z = 0$) упругого анизотропного тела, которое на плоскости $z = x + iy$ занимает угол $-\theta \le \arg z \le 0$, лежит балка с жесткостью $D(x)$, к балке приложена распределенная нормальная нагрузка с интенсивностью $P_0(x)$. Будем считать, что $P_0(x)$ – ограниченная суммируемая функция, равная нулю вне некоторого интервала. Трение между балкой и клином отсутствует. Другая граница клина ($\arg z = -\theta$) свободна от внешних напряжений, $0 < \theta < 2\pi$.

Поставленная задача сводится к следующей задаче равновесия упругого угла:

$$\frac{d^2}{dx^2}D(x)\frac{d^2 \upsilon}{dx^2} = P_0(x) - P(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad x > 0; \quad D(x) = \frac{E_0(x)h^3(x)}{12(1-\nu_0^2)} \tag{1}$$

$$X_n(t) = Y_n(t) = 0, \quad \arg t = -\theta \tag{2}$$

где $P(x)$ – искомое контактное напряжение, удовлетворяющее условиям равновесия

$$\int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty P_0(t)dt = P_0, \quad \int_0^\infty tP(t)dt = \int_0^\infty tP_0(t)dt = M_0 \tag{3}$$

$E_0(x)$ – модуль упругости балки, $dh(x)$ – ее толщина, ν_0 – коэффициент Пуассона, $\upsilon(x)$ – вертикальное смещение точек балки.

Рассмотрим две плоскости комплексных переменных: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, получаемые из плоскости $z = x + iy$ путем соответствующих аффинных преобразований

$$x_1 = x + \alpha_1 y, \quad y_1 = \beta_1 y, \quad x_2 = x + \alpha_2 y, \quad y_2 = \beta_2 y; \quad \beta_1 > \beta_2 > 0$$

Область $S(-\theta \le \arg z \le 0)$ плоскости переменной z с помощью этих преобразований переходит соответственно в область $S_k(-\theta_k \le \arg z_k \le 0)$ плоскости переменной z_k $(k = 1, 2)$, $\operatorname{tg}\theta_k = \beta_k \sin\theta(\cos\theta - \alpha_k \sin\theta)^{-1}$.

Если корни характеристического уравнения $s_1 \ne s_2$, на основании известных формул [11] поставленная задача сводится к отысканию функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, голоморфных соответственно в областях S_1 и S_2 со следующими граничными условиями:

$$\begin{gathered}(s_1 - \bar{s}_2)t_1\Phi_1(t_1) + (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)\bar{t}_1\overline{\Phi_1(t_1)} + (s_2 - \bar{s}_2)t_2\Phi_2(t_2) = 0 \\ t_k = \rho(\cos\theta - s_k\sin\theta), \quad \rho = |t| > 0\end{gathered} \tag{4}$$

$$(s_1 - \bar{s}_2)\Phi_1(t) + (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)\overline{\Phi_1(t)} + (s_2 - \bar{s}_2)\Phi_2(t) = -\bar{s}_2 P(t), \quad t > 0 \tag{5}$$

$$2\operatorname{Re}[q_1\Phi_1'(x) + q_2\Phi_2'(x)] = \frac{1}{D(x)}\int_0^x dt\int_0^t [P_0(s) - P(s)]ds, \quad x > 0 \tag{6}$$

От функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ требуется, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\lim z_k\Phi_k(z_k) \to 0, \quad z_k \to 0, \quad k = 1, 2$$

и при достаточно больших $|z_k|$ имели вид

$$\Phi_k(z_k) = \gamma_k/z_k + O(1/z_k), \quad k = 1, 2 \tag{7}$$

Решение задачи будем искать в виде

$$\Phi_k(z_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}z_k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A_k(t)}{t}e^{it\ln z_k} - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{A_k(0)}{z_k}, \quad z_k \in S_k \tag{8}$$

причем $A_k(0)$ удовлетворяют условию

$$(s_2 - \bar{s}_2)A_2(0) = (\bar{s}_2 - s_1)A_1(0) + (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)\overline{A_1(0)}$$

Внося значения (8) в граничные условия (4) и (5), получаем

$$A_k(t) = [\bar{s}_k(s_2 - \bar{s}_2)e^{i(3-2k)\mu t} + \bar{s}_{3-k}(\bar{s}_k - s_{3-k})e^{-(3-2k)\delta t} + s_{3-k}(\bar{s}_2 - \bar{s}_1)e^{-\gamma t}]\frac{tN(t)}{2\Delta(t)} \tag{9}$$

где

$$\mu = \ln\left|\frac{\cos\theta - s_1\sin\theta}{\cos\theta - s_2\sin\theta}\right|, \quad \delta = \theta_1 - \theta_2, \quad \gamma = \theta_1 + \theta_2$$

$$\Delta(t) = |s_1 - s_2|^2\operatorname{ch}\gamma t - |s_1 - \bar{s}_2|^2\operatorname{ch}\delta t + 4\beta_1\beta_2\cos\mu t, \quad N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}P(e^s)e^s e^{-its}ds$$

Первое равенство (3) дает

$$\sqrt{2\pi}N(0) = \int_{-\infty}^{\infty}P(e^s)e^s ds = \int_0^{\infty}P(t)dt = P_0$$

Переходя к пределу в равенствах (9) при $t \to 0$, получим

$$A_k(0) = \frac{2(-1)^k\mu\beta_2\bar{s}_k + (-1)^k\delta\bar{s}_{3-k}(\bar{s}_k - s_{3-k}) + \gamma s_{3-k}(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)}{|s_1 - s_2|^2\gamma^2 - |s_1 - \bar{s}_1|^2\delta^2 - 4\beta_1\beta_2\mu^2}\frac{P_0}{\sqrt{2\pi}}$$

Внося значения функций $\Phi_k(z_k)$, представленных формулой (8), в граничное условие (6) и принимая во внимание равенство (9), будем иметь

$$2\mathrm{Re}[q_1\Phi_1'(x) + q_2\Phi_2'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(it-1)(\Delta_2 + i\Delta_1)N(t)e^{it\ln x}}{\Delta(t)}dt + \frac{c}{x^2} \tag{10}$$

где

$$c = \sqrt{\pi}\mathrm{Im}[q_1A_1(0) + q_2A_2(0)]$$

$$\Delta_1(t) = a_1^+\mathrm{sh}\gamma t + a_1^-\mathrm{sh}\delta t + c_1^-\sin\mu t, \quad \Delta_2(t) = a_2^+\mathrm{ch}\gamma t + a_2^-\mathrm{ch}\delta t + c_1^+\cos\mu t$$

$$c_1^\pm = 2\beta_2\mathrm{Im}[\bar{q}_1s_1] \pm 2\beta_1\mathrm{Im}[\bar{q}_2s_2]$$

$$a_2^- + ia_1^- = (\bar{q}_1s_2 - q_2\bar{s}_1)(s_1 - s_2), \quad a_2^+ + ia_1^+ = (\overline{q_1s_2} - \overline{q_2s_1})(s_2 - s_1)$$

Подставляя в эти формулы значения q_1 и q_2 [11], производя некоторые преобразования и применяя теорему Виета, получим

$$a_1^+ = a_{22}|s_1 - s_2|^2\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\bar{s}_1} + \frac{1}{\bar{s}_2}\right), \quad a_1^- = a_{22}|s_1 - \bar{s}_2|^2\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\bar{s}_2} - \frac{1}{\bar{s}_1}\right)$$

$$a_2^+ = a_2^- = c_1^+ = 0, \quad c_1^- = 4\beta_1\beta_2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right), \quad \Delta_2(t) = 0$$

a_{22} – одна из упругих постоянных пластинки.

Следовательно, согласно формуле (10) условие (6) принимает вид

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(t)N(t)e^{it\ln x}dt + \frac{x^2}{D(x)}\int_0^x dt\int_0^t[P(s) - P_0(s)]ds = c; \quad G(t) = \frac{(1-it)\Delta_1(t)}{\Delta(t)} \tag{11}$$

Функции $\Delta(t)$ и $\Delta_1(t)$ нигде, кроме точки $t = 0$, в нуль не обращаются. Точка $t = 0$ для функции $\Delta(t)$ является нулем второго порядка, а для функции $\Delta_1(t)$ – нулем первого порядка.

Положим $D(x) = d_0x^{p+2}$, $d_0 > 0$, p – любое действительное число. После подстановки $\xi_0 = \ln x$ в формулу (11), дифференцирования обеих частей полученного равенства и обратного преобразования Фурье получим

$$d_0t(p+it)G(t)\Psi(t) + \Psi(t - ip) = F(t), \quad -\infty - i\varepsilon < t < \infty - i\varepsilon \tag{12}$$

где

$$\Psi(t) = \frac{N(t) - N_0(t)}{t}, \quad F(t) = -d_0G(t)(p+it)N_0(t), \quad N_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^sP_0(e^s)e^{-its}ds$$

ε – сколь угодно малое положительное число.

Ставится следующая задача: найти функцию, голоморфную в полосе $-p - \varepsilon < \mathrm{Im}z < -\varepsilon$, исчезающую на бесконечности, непрерывно продолжимую на границе полосы и удовлетворяющую условию (12).

Функция $F(t)$ аналитически продолжима в полосе $0 < \mathrm{Im}z < p$, кроме точек, являющихся корнями функции $\Delta(t)$, где она имеет полюсы и исчезает на бесконечности.

Пусть $p > 0$, тогда коэффициенту задачи можно придать вид

$$\frac{t(t-ip)(t+i)\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = it(t^2+p^2)T_p(t)\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}\operatorname{th}\frac{\pi}{2p}t\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2p}(t-ip)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2p}t}; \quad T_p(t) = \frac{t+i}{t+ip}$$

Рассмотрим функцию

$$G_p(t) = T_p(t)U_p(t)$$

где

$$U_p(t) = \frac{\Delta_1(t)}{a\Delta(t)}\operatorname{th}\frac{\pi}{2p}t, \quad a = \lim_{t\to\infty}\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = a_{22}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{s}_1}+\frac{1}{\bar{s}_2}\right)$$

Функция $G_p(t)$ непрерывна на всей оси и $G_p(-\infty) = G_p(+\infty) = 0$. Функция $U_p(t)$ принимает положительные значения, а функция $T_p(t)$ в нижней полуплоскости имеет один нуль и один полюс, поэтому $\operatorname{Ind}G_p(t) = 0$. Ветвь функции $\ln G_p(t)$, которая исчезает на бесконечности, интегрируема на всей оси.

На основании полученных ранее результатов [12] функции $G_p(t)$, t^2+p^2 и число ad_0 представляются в виде

$$G_p(t) = \frac{X_p(t-ip)}{X_p(t)}, \; t^2+p^2 = \frac{X_1(t-ip)}{X_1(t)}, \; ad_0 = \frac{X_2(t-ip)}{X_2(t)}; \; -\infty-i\varepsilon < t < (\infty-i\varepsilon) \quad (13)$$

где

$$X_p(z) = \exp\left\{\frac{1}{2i\rho}\int\limits_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon}\ln G_p(t)\operatorname{cth}\pi(t-z)dt\right\}.$$

$$X_1(z) = p^{2iz/p}\Gamma(1+iz/p)/\Gamma(2-iz/p), \; X_2(z) = \exp(i(z/p)\ln(ad_0)); \; -p-\varepsilon < \operatorname{Im}z < -\varepsilon$$

Подставив выражения (13) в формулу (12), получим

$$\begin{aligned}&\frac{\Psi(t)}{X(t)}+\frac{\Psi(t-ip)}{X(t-ip)} = \frac{F(t)}{X(t-ip)}, \quad -\infty-i\varepsilon < t < \varepsilon-i\varepsilon\\ &X(z) = \frac{1}{z}X_p(z)X_1(z)X_2(z)\operatorname{sh}\frac{\pi}{2p}zp^{iz/p}\Gamma(1+iz/p)\end{aligned} \quad (14)$$

Функции $X_p(z)$ и $X_2(z)$ ограничены во всей полосе, а функция $X_1(z)$ при достаточно большом $|z|$ допускает оценку

$$|X_1(z)| = O(|t|^{-2\tau/p-1}), \quad z = t+i\tau, \quad -p < \tau < 0$$

Отсюда следует, что

$$X(z) = O(|t|^{-3\tau/p-1/2}), \quad -p < \tau < 0$$

Таким образом, решение задачи (14) представимо в виде

$$\Psi(z) = \frac{X(z)}{2ip}\int\limits_{-\infty-i\varepsilon}^{\infty-i\varepsilon}\frac{F(t)dt}{X(t-ip)\operatorname{sh}\frac{\pi}{p}(t-z)}, \quad -p-\varepsilon < \operatorname{Im}z < -\varepsilon \quad (15)$$

Пусть $p \geq 1$. Если функция $N_0(t)$ аналитически продолжима в полосе $-1 < \operatorname{Im} z < 1$ и экспоненциально исчезает на бесконечности, из условия (12) и формулы (15) следует, что функция

$$\Psi_1(z) = \begin{cases} \Psi(z), & -p-\varepsilon < \operatorname{Im} z < -\varepsilon \\ \dfrac{F(z)-\Psi(z-ip)}{d_0 z(p+iz)G(z)}, & -\varepsilon < \operatorname{Im} z < p-\varepsilon \end{cases}$$

голоморфна в полосе $-p-\varepsilon < \operatorname{Im} z < p-\varepsilon$, экспоненциально исчезает на бесконечности, ограничена во всей полосе, кроме точек $z_j^+ = t_j^+ + i\tau_j^+$ ($j = 1, 2, \ldots, l$), являющихся нулями функции $G(z)$ в полосе $-\varepsilon < \operatorname{Im} z < p-\varepsilon$.

По формуле Коши искомое контактное напряжение представляется в виде

$$\Delta P(x) = P(x) - P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\int_{-\infty}^{\infty} t\Psi(t)e^{it\ln x}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\int_{-\infty}^{\infty}(t-ip)\Psi(t-ip)e^{i(t-ip)\ln x}dt$$

Следовательно, в окрестности вершины угла ($x \to 0$) имеем $\Delta P(x) = x^{p-1}g(x)$, где $g(x)$ – ограниченная функция при $x \geq 0$. Для больших x имеем $\Delta P(x) = O(x^{-(1+\tau_1^+)})$.

Если $0 < p < 1$, функция $\Psi(z)$, даваемая формулой (15), аналитически продолжима в полосе $-1 < \operatorname{Im} z < -\varepsilon$, кроме точек $w_j^- = \lambda_j^- + i\mu_j^-$ ($j = 1, 2, \ldots, q$), являющихся полюсами функции $G(z)$ в этой полосе. Тогда в окрестности точки $x = 0$ нормальное контактное напряжение представляется следующим образом: $\Delta P(x) = \tilde{c}x^{-(1+\mu_1^-)} + \tilde{g}(x)$, где $\tilde{g}(x)$ – ограниченная функция при $x \geq 0$, $\tilde{c} = \text{const}$.

Рассмотрим случай $p < 2$, т.е. жесткость стержня растет в вершине угла, а на бесконечности уменьшается. Вводя обозначение $m = -p$ ($m > 0$), в результате рассуждений, аналогичных проведенным выше, условие (12) запишем в виде

$$\frac{\Psi_0(t)}{\tilde{X}(t)} + \frac{\Psi_0(t+im)}{\tilde{X}(t+im)} = \frac{F_0(t)}{\tilde{X}(t)}, \quad -\infty + i\varepsilon < t < \infty + i\varepsilon$$

$$\tilde{X}(z) = \frac{1}{z}X_m(z)\kappa(z)(z - im/2)\operatorname{sh}\frac{\pi}{2m}z, \quad \varepsilon < \operatorname{Im} z < m + \varepsilon$$

$$X_m(z) = \exp\left\{\frac{1}{2im}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\ln G_m(t)\operatorname{cth}\frac{\pi}{m}(t-z)dt\right\} \tag{16}$$

$$\kappa(z) = \exp(-iz/m\ln(ad_0))m^{-3iz/m}\Gamma^2(1+iz/m)/\Gamma(2+iz/m)$$

$$G_m(t) = \frac{t+i}{a(t-im)}\frac{2t-im}{2t+im}\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}\operatorname{th}\frac{\pi}{2m}t$$

Функция $\tilde{X}(z)$ при достаточно больших $|z|$ допускает оценку

$$|\tilde{X}(z)| = O(|t|^{3\tau/m - 5/2}), \quad 0 < \tau < m$$

Функция $\Psi_0(z)/\tilde{X}(z)$ голоморфна в полосе $\varepsilon < \mathrm{Im} z < m + \varepsilon$, кроме точки $z = im/2$, где она может иметь полюс первого порядка. Поэтому решение задачи (16) дается формулой

$$\Psi_0(z) = \frac{\tilde{X}(z)}{2im} \int\limits_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \frac{F_0(t)dt}{\tilde{X}(t + im)\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{m}(t - z)} + \frac{A_0\tilde{X}(z)}{\mathrm{ch}\frac{\pi}{m}z}$$

$$F_0(z) = d_0(iz - 1)(m - iz)(\Delta_1(z)/\Delta(z))N_0(z), \quad A_0 = \mathrm{const}, \quad \varepsilon < \mathrm{Im} z < m + \varepsilon$$

Из равенства

$$\int\limits_0^{\infty} t(P(t) - P_0(t))dt = 0$$

получается $\Psi_0(i) = 0$; отсюда и определяется постоянная A_0.

Функция

$$\Psi_2(z) = \begin{cases} \Psi_0(z), & \varepsilon < \mathrm{Im} z < m + \varepsilon \\ \dfrac{F_0(z) + \Psi_0(z + im)}{d_0 z(m - iz)G(z)}, & -m - \varepsilon < \mathrm{Im} z < \varepsilon \end{cases}$$

голоморфна в полосе $-m + \varepsilon < \mathrm{Im} z < m + \varepsilon$, исчезает на бесконечности, непрерывно продолжима на границе полосы, кроме точек $z_j^- = t_j^- + i\tau_j^-$, ($j = 1, 2, \ldots, n$), являющихся нулями функции $G(z)$ в полосе $-m + \varepsilon < \mathrm{Im} z < \varepsilon$.

Если $\tau_1^- < -1$, то функция $\Psi_2(z)$ аналитически продолжима в полосе $-1 < \mathrm{Im} z < m + \varepsilon$ и нормальное контактное напряжение $\Delta P(x)$ ограничено в окрестности точки $x = 0$. Если $\tau_1^- > -1$, функция $\Psi_2(z)$ имеет ближайший к действительной оси полюс в точке $z_1^- = t_1^- + i\tau_1^-$, и, следовательно, контактное напряжение в окрестности точки $x = 0$ представимо в виде

$$\Delta P(x) = \tilde{c}_1 x^{-(1 + \tau_1^-)} + \tilde{g}_1(x)$$

где $\tilde{g}_1(x)$ – ограниченная функция при $x \geq 0$, $\tilde{c}_1 = \mathrm{const}$. Для больших x имеем

$$\Delta P(x) = O(x^{-1-m}), \quad x \to \infty$$

Рассмотрим теперь частные случаи. Как будет видно из дальнейшего изложения, в рассматриваемых случаях

$$\Delta P(x) = \begin{cases} O(x^{p-1}), & p \geq 1 \\ O(x^{\xi}), & 0 < p < 1; \quad x \to 0 \\ O(x^{\eta}), & p < 0 \end{cases} \tag{17}$$

Пусть область S – полуплоскость. Тогда

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta = \pi, \quad \delta = 0, \quad \gamma = 2\pi, \quad \mu = 0$$

$$\Delta(t) = 2|s_1 - s_2|^2 \mathrm{sh}\pi t, \quad \Delta_1(t) = 2|s_1 - s_2|^2 a\,\mathrm{sh}\pi t\,\mathrm{ch}\pi t$$

Отсюда следует, что $\tau_1^- = -1/2$, $\mu_1^- = -1$, и функция $\Delta P(x)$ удовлетворяет соотношениям (17) при $\xi = 0$, $\eta = -1/2$.

Когда $\theta = 2\pi$, т.е. плоскость разрезана вдоль действительной положительной полуоси, получим

$$\theta_1 = \theta_2 = 2\pi, \quad \delta = 0, \quad \gamma = 4\pi, \quad \mu = 0$$

$$\Delta(t) = 2|s_1 - s_2|^2 \operatorname{sh} 2\pi t, \quad \Delta_1(t) = 2|s_1 - s_2|^2 a \operatorname{sh} 2\pi t \operatorname{ch} 2\pi t$$

Следовательно, $\tau_1^- = -1/4$, $\mu_1^- = -1/2$, и функция $\Delta P(x)$ удовлетворяет соотношениям (17) при $\xi = -1/2$, $\eta = -3/4$.

Заметим, что при $p = m = 0$ условие (12) дает

$$\Psi(z) = F(z)/(id_0 z^2 G(z) + 1)$$

а для нормального напряжения справедлива оценка

$$\Delta P(x) = O(x^{\lambda - 1}) \quad \text{при} \quad x \to 0$$

где $\lambda = -\operatorname{Im}\mu$, μ – ближайший к действительной оси нуль функции $id_0 z^2 G(z) + 1$ в нижней полуплоскости.

В частном случае, когда тело ортотропно, а одна из осей анизотропии параллельна грани клина, на которую опирается балка, доказано, что при $p < 0$ в окрестности конца балки нормальное контактное напряжение ограничено при $\theta \le \pi/2$ и имеет вид $\Delta P(x) = O(x^{-\tau_0})$, $x \to 0$ при $\theta > \pi/2$, где $0 < \tau_0 \le 3/4$. В частности, при $\theta = 3\pi/2$ имеем $\Delta P(x) = O(x^{-2/3})$, $x \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
3. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. *Банцури Р.Д.* Контактная задача для клина с упругим креплением // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211. № 4. С. 797–800.
5. *Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я.* Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 312–320.
6. *Нуллер Б.М.* Деформация упругого клина, подкрепленного балкой // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 876–882.
7. *Банцури Р.Д.* Контактная задача для анизотропного клина с упругим креплением // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 3. С. 568–571.
8. *Банцури Р.Д.* Об одной задаче изгиба балки, лежащей на упругом основании // Сообщ. АН ГССР. 1975. Т. 80. № 2. С. 317–320.
9. *Нуллер Б.М.* О деформации упругой клиновидной пластинки, подкрепленной стержнем переменной жесткости, и об одном методе решения смешанных задач // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 306–316.
10. *Банцури Р.Д., Шавлакадзе Н.Н.* Контактная задача для анизотропной клиновидной пластинки с упругим креплением переменной жесткости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 663–669.
11. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 364 с.
12. *Банцури Р.Д.* Об одной граничной задаче теории аналитических функций // Сообщ. АН ГССР. 1974. Т. 73. № 3. С. 549–552.

Тбилиси
e-mail: nusha@rmi.acnet.ge

Поступила в редакцию
28.X.2003