УДК 539.3

© 2005 г. И. Ю. Цвелодуб

ОБ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Рассматривается пространственная линейно-упругая (вязкоупругая) область (конечная или бесконечная), содержащая физически нелинейное включение произвольной формы. Исследуется задача о возможности реализации в последнем требуемого однородного напряженно-деформированного состояния за счет подбора соответствующих нагрузок на внешней границе области. Решение построено в замкнутом виде. Рассмотрены некоторые примеры, в частности, об эллипсоидальном включении, проявляющем свойства нелинейной ползучести.

Ранее были изучены плоские задачи для конечных упругой [1] и вязкоупругой [2] областей, содержащих физически нелинейное включение (ФНВ) произвольной формы, в котором вследствие соответствующих внешних воздействий создавалось заданное однородное напряженно-деформированное состояние (НДС). Построенные в [1, 2] решения кроме величин, характеризующих НДС в ФНВ и свойства основной среды, содержали только отображающую функцию, связанную с границей включения. В данной работе с использованием известных результатов [3] подобные задачи решаются (тоже в замкнутом виде) в пространственной постановке. Отдельно рассматривается эллипсоидальное включение (ЭФНВ), когда решение может быть продолжено до бесконечно удаленных точек, НДС в которых также будет однородным. В частности, исследуются некоторые задачи о деформировании и разрушении ЭФНВ в условиях ползучести.

1. Напряженно-деформированное состояние пространственной области, содержащей физически нелинейное включение с заданным напряженно-деформированным состоянием. Рассмотрим упругую (или вязкоупругую) область υ пространства с физически нелинейным включением (ФНВ) υ^*. Внешняя и внутренняя границы области υ – кусочно-гладкие поверхности S и S^* (последняя отделяет υ от υ^*).

Для основной среды υ справедлив закон Гука

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn}, \quad \sigma_{kl} = b_{klmn}\varepsilon_{mn}, \quad k, l = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

где ε_{kl}, σ_{kl}, a_{klmn} и b_{klmn} – компоненты тензоров деформаций, напряжений, упругих податливостей и упругих модулей; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Система координат $Ox_1x_2x_3$ выбрана так, что точка $(0, 0, 0) \in \upsilon^*$. Если под величинами a_{klmn} и b_{klmn} ($k, l, m, n = 1, 2, 3$) подразумевать соответствующие операторы Вольтерры [2], то равенства (1.1) будут представлять собой определяющие соотношения для линейной вязкоупругой среды.

Для включения υ^* имеем [1, 2]

$$\varepsilon^*_{kl} = F_{kl}(\sigma^*_{mn}), \quad \sigma^*_{kl} = G_{kl}(\varepsilon^*_{mn}), \quad k, l, m, n = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

где F_{kl} и G_{kl} – компоненты взаимно обратных нелинейных тензорных операторов.

Основная задача формулируется аналогично задачам, рассмотренным ранее [1, 2]: какие перемещения u_{k0} необходимо сообщить границе S (или приложить нагрузки p_{k0}

на S), чтобы во включении v^* создать требуемое однородное (т.е. не зависящее от координат x_k) напряженно-деформированное состояние (НДС), характеризуемое напряжениями $\sigma_{kl}^* = \sigma_{kl}^*(t)$ и деформациями $\varepsilon_{kl}^* = \varepsilon_{kl}^*(t)$ ($k, l = 1, 2, 3$; t – время или параметр нагружения), связанными уравнениями (1.2)? В начальный момент $t = 0$ область $v^* \cup v$ находилась в недеформированном состоянии. На границе S^* поля нагрузок $p_k = \sigma_{kl} n_l$ (n_l – компоненты единичного вектора нормали к S) и перемещений u_k ($k = 1, 2, 3$) непрерывны. Задача геометрически линейна.

Поскольку деформации ε_{kl}^* в v^* не зависят от координат, вектор перемещений $\mathbf{u}^*$ будет линейной функцией x_k, т.е. если принять, что $\mathbf{u}^* = 0$ в точке $(0, 0, 0) \in v^*$, то

$$u_k^* = (\omega_{kl}^* + \varepsilon_{kl}^*) x_l \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

где ω_{kl}^* – компоненты антисимметричного тензора, определяющего однородный вектор вращения в v^*, который также будем считать заданным (например, $\omega_{kl}^* = 0$; $k, l = 1, 2, 3$).

В упоминавшейся выше статье [3] рассматривалось упругое пространство с ФНВ, подвергнутое на бесконечности действию внешних сил, которым в однородной упругой среде (т.е. в отсутствие включения) соответствуют поля напряжений $\sigma_{kl}^{\infty} = \sigma_{kl}^{\infty}(\mathbf{r})$ и перемещений $u_k^{\infty} = u_k^{\infty}(\mathbf{r})$, и были получены следующие соотношения:

$$u_k(\mathbf{r}) = u_k^{\infty}(\mathbf{r}) + F_k(\mathbf{r}), \quad F_k(\mathbf{r}) = \int_{v^*} \Phi_{pq}(\boldsymbol{\xi}) U_{kp,q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) dv(\boldsymbol{\xi})$$

$$k = 1, 2, 3; \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad 0 \le |\mathbf{r}| < \infty, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in v^* \tag{1.4}$$

$$\Phi_{pq} = \sigma_{pq}^* - b_{pqmn}\varepsilon_{mn}^*, \quad 2\varepsilon_{mn}^* = u_{m,n}^* + u_{n,m}^*$$

где U_{kp} – компоненты тензора Грина, индекс q после запятой означает производную по x_q; остальные величины определены формулами (1.1)–(1.3). (Заметим, что в [3] перед интегралом в (1.4) ошибочно взят знак "минус" – это видно из приведенных там на с. 13 формул.) В дальнейшем будем иметь в виду, что входящие в соотношения (1.4) компоненты перемещений, напряжений и деформаций в общем случае зависят еще и от t.

В прямой задаче, т.е. при заданных функциях $u_k^{\infty} = u_k^{\infty}(\mathbf{r})$, равенства (1.4) представляют собой нелинейные интегральные уравнения относительно $u_k = u_k(\mathbf{r})$, $0 \le |\mathbf{r}| \le \infty$. Было показано [3], что решение этих уравнений (в случае, когда оно существует), т.е. вектор перемещений и соответствующее ему согласно соотношениям (1.1) и (1.2) поле напряжений удовлетворяют упомянутым условиям непрерывности на поверхности S^* и во всем пространстве выполняются уравнения равновесия.

В случае рассматриваемой здесь обратной задачи, когда согласно равенствам (1.3) заданы $u_k^* = u_k^*(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in v^*$, а величины Φ_{pq}, фигурирующие в формулах (1.4), не зависят от $\boldsymbol{\xi}$, из соотношений (1.4) можно найти искомые функции $u_{k0} = u_{k0}(\mathbf{r}_s)$, $\mathbf{r}_s \in S$, т.е. вектор перемещений на внешней границе области v. Действительно, из соотношений (1.4) для компонент u_k^{∞} в ФНВ будем иметь

$$u_k^{\infty}(\mathbf{r}) = u_k^*(\mathbf{r}) - F_k(\mathbf{r}), \quad k = 1, 2, 3; \quad \mathbf{r} \in v^* \tag{1.5}$$

Функции $u_k^\infty(\mathbf{r})$ – аналитические в области υ^* (по крайней мере, в случае изотропной упругой области υ, когда U_{kp} – компоненты тензора Кельвина–Сомильяны и выражаются через известные гармонический и бигармонический потенциалы [4]), поэтому их можно продолжить в область υ и дальше (если область υ конечная), т.е. за границу S. В случае, когда область υ бесконечна и u_k^∞ – полиномы степени $n < \infty$, такое продолжение также возможно, т.е. поле тензора напряжений на бесконечности будет полиномом $n - 1$ степени. Например, для эллипсоидального ФНВ $n = 1$, т.е. напряжения σ_{kl}^∞ конечны при $|\mathbf{r}| \to \infty$ [3].

При известных функциях $u_k^\infty = u_k^\infty(\mathbf{r})$, $0 \le |\mathbf{r}| < \infty$, из соотношений (1.4) найдем $u_k = u_k(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \upsilon$ и $u_{k0} = u_{k0}(\mathbf{r}_s)$ (или $p_{k0} = p_{k0}(\mathbf{r}_s)$), $\mathbf{r}_s \in S$ $(k = 1, 2, 3)$.

Заметим, что, как и в случае плоской задачи [1, 2], НДС в области υ определяется только геометрией включения υ^*, величинами σ_{kl}^* и ε_{kl}^*, а также упругими (вязкоупругими) характеристиками области υ, а ее внешняя граница S не влияет на указанное НДС. Нагрузки p_{k0} на границе S определяются ее формой и уже найденным НДС в области υ.

Решение рассмотренной выше обратной задачи единственно, т.е. при известном поле u_k^* в области υ^* НДС в области υ и соответствующие перемещения и нагрузки на границе S определяются однозначно [1, 2]. Справедливо и обратное утверждение: при заданных u_k или p_k на границе S и некоторых ограничениях, налагаемых на связи (1.2) (они сводятся к предположению об устойчивости процесса деформирования материала ФНВ [1, 2]), единственным образом определяется НДС в области $\upsilon^* \cup \upsilon$, т.е найденным выше функциям $u_{k0} = u_{k0}(\mathbf{r}_s)$ (или $p_{k0} = p_{k0}(\mathbf{r}_s)$), $\mathbf{r}_s \in S$ соответствует однородное НДС в области υ^*. Доказательство повторяет приведенное ранее [1, 2] с заменой интегралов по плоской области на аналогичные пространственные.

2. Примеры. Рассмотрим случай эллипсоидального включения (ЭФНВ) с полуосями a_k $(k = 1, 2, 3)$, для которого функции $F_k(\mathbf{r})$ из соотношений (1.4) при $\Phi_{pq} = \text{const}$ являются линейными [3, 4], поэтому ввиду соотношений (1.3) и (1.5) линейными будут и $u_k^\infty = u_k^\infty(\mathbf{r})$. Следовательно, как отмечалось выше, при $|\mathbf{r}| \to \infty$ напряжения σ_{kl}^∞ будут конечными.

Нетрудно установить связь между НДС в ЭФНВ и на бесконечности. Действительно, в классической работе Эшелби [4] для случая ЭФНВ, испытывающего превращение, сопровождающееся свободной однородной деформацией ε_{kl}^T, получены соотношения вида (1.4) при $u_k^\infty = 0$ и $\Phi_{pq} = -b_{pqmn}\varepsilon_{mn}^T$, из которых вытекают следующие зависимости между свободными и стесненными деформациями:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{kl}^* = S_{klmn}\varepsilon_{mn}^T, \quad 2S_{klmn} = -b_{pqmn}\int\limits_{\upsilon^*}[U_{kp,ql}(\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}) + \\ + U_{lp,qk}(\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi})]d\upsilon(\boldsymbol{\xi}), \quad k, l, m, n = 1, 2, 3; \quad \mathbf{r}, \boldsymbol{\xi} \in \upsilon^*\end{gathered} \tag{2.1}$$

Компоненты S_{klmn} тензора $\mathbf{S}$, введенного Эшелби [4], не зависят от x_k $(k = 1, 2, 3)$. Тогда из соотношений (1.1)–(1.4) и (2.1) для случая ЭФНВ будем иметь

$$\begin{gathered}u_k^\infty = (\omega_{kl}^\infty + \varepsilon_{kl}^\infty)x_l, \quad \varepsilon_{kl}^\infty = \varepsilon_{kl}^* + S_{klmn}(\tilde{\varepsilon}_{mn}^* - \varepsilon_{mn}^*) \\ \varepsilon_{kl}^\infty = a_{klmn}\sigma_{mn}^\infty, \quad \tilde{\varepsilon}_{kl}^* = a_{klmn}\sigma_{mn}^*, \quad \omega_{kl}^\infty = \omega_{kl}^* + \Pi_{klmn}(\varepsilon_{mn}^* - \tilde{\varepsilon}_{mn}^*) \\ 2\Pi_{klmn} = b_{pqmn}\int\limits_{\upsilon^*}[U_{kp,kl}(\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}) - U_{lp,qk}(\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi})]d\upsilon(\boldsymbol{\xi})\end{gathered} \tag{2.2}$$

Для изотропной упругой среды υ компоненты тензоров **S** и **П** из соотношений (2.1) и (2.2) определяются следующим образом [4] (ν – коэффициент Пуассона):

$$S_{kkkk} = Qa_k^2 I_{kk} + RI_k, \quad S_{kkll} = Qa_l^2 I_{kl} - RI_k$$

$$2S_{klkl} = 2S_{kllk} = Q(a_k^2 + a_l^2)I_{kl} + R(I_k + I_l); \quad \Pi_{klkl} = -\Pi_{kllk} = \frac{I_l - I_k}{8\pi}$$

$$Q = \frac{3}{8\pi(1-\nu)}, \ R = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}; \ I_k = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_k^2+u)\Delta}, \ I_{kk} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_k^2+u)^2\Delta} \tag{2.3}$$

$$3I_{kl} = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_k^2+u)(a_l^2+u)\Delta}; \quad \Delta^2 = (a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)$$

($k, l = 1, 2, 3$; $k \neq l$; суммирования по k и l нет); остальные компоненты $S_{klmn} = 0$ и $\Pi_{klmn} = 0$.

Величины I_k, I_{kk} и I_{kl} выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода и могут быть найдены, если известны любые две из I_k, как, например, для сплющенного и вытянутого сфероидов, когда I_k – элементарные функции a_1, a_2, a_3 и будут иметь место следующие равенства:

при $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = \delta a$, $\delta < 1$

$$I_1 = I_2 = 2\pi\delta(1-\delta^2)^{-3/2}[\arccos\delta - \delta(1-\delta^2)^{1/2}], \quad I_3 = 4\pi - 2I_1$$

$$I_{11} = I_{22} = 3I_{12} = \frac{3I_1 - 4\pi\delta^2}{4a^2(1-\delta^2)}, \quad I_{13} = I_{23} = \frac{4\pi - 3I_1}{3a^2(1-\delta^2)} \tag{2.4}$$

$$I_{33} = \frac{4\pi(1-3\delta^2) + 6I_1\delta^2}{3a^2\delta^2(1-\delta^2)}$$

при $a_1 = a$, $a_2 = a_3 = \delta a$, $\delta < 1$

$$I_1 = 4\pi - 2I_2, \ I_2 = I_3 = \frac{2\pi}{\delta}\left(\frac{1}{\delta^2} - 1\right)^{-3/2}\left[\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\delta^2} - 1\right)^{1/2} - \operatorname{arch}\frac{1}{\delta}\right]$$

$$I_{11} = \frac{4\pi(3-\delta^2) - 6I_2}{3a^2(1-\delta^2)}, \quad I_{22} = I_{33} = 3I_{23} = \frac{4\pi - 3I_2\delta^2}{4a^2\delta^2(1-\delta^2)}, \ I_{12} = I_{13} = \frac{3I_2 - 4\pi}{3a^2(1-\delta^2)} \tag{2.5}$$

Отметим также, что в случае эллиптического цилиндра, когда $a_3 \to$ и справедливы равенства [4]

$$I_1 = \frac{4\pi a_2}{a_1 + a_2}, \quad I_2 = \frac{4\pi a_1}{a_1 + a_2}, \ I_3 = 0, \ I_{12} = \frac{4\pi}{3(a_1 + a_2)^2}$$

$$I_{kk} = \frac{4\pi}{3a_k^2} - I_{12}, \quad k = 1, 2; \quad I_{k3} = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

соотношения (2.2) совпадают с полученными ранее для плоской задачи ([1], формулы (3.4) при $\kappa = 3 - 4\nu$, что соответствует плоской деформации).

В качестве примеров применения соотношений (2.2)–(2.5) перечислим вкратце некоторые задачи для случая упругой или вязкоупругой среды с ЭФНВ, полные деформации которого складываются из упругих деформаций и деформаций ползучести ε_{kl}^{*c}, т.е. определяющие уравнения (1.2) имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}^{*} &= a_{klmn}^{*}\sigma_{mn}^{*} + \varepsilon_{kl}^{*c}, \quad \dot{\varepsilon}_{mn}^{*c} = B_1 s^n (1-\omega)^{-m} \partial s / \partial \sigma_{kl}^{*}, \quad k, l = 1, 2, 3 \\ \dot{\omega} &= B_2 s^p (1-\omega)^{-m} \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $s = s(\sigma_{kl}^{*})$ – однородная первой степени выпуклая функция, ω $(0 \le \omega \le 1)$ – параметр поврежденности, B_1, B_2, m, n, p – положительные постоянные.

Обратные задачи аналогичны рассмотренным [2] для конечной плоской области с ЭФНВ и формулируются следующим образом.

Задача 1. Необходимо подобрать такие напряжения

$$\sigma_{kl}^{\infty} = \sigma_{kl}^{\infty}(t), \quad 0 \le t \le t_0 \tag{2.7}$$

при которых деформации ползучести ε_{kl}^{*c} в области υ^* при $t = t_0$ будут принимать требуемые значения ε_{kl**}^{*c} при наименьшей поврежденности ω. Продолжительность t_0 процесса и напряжения в υ^* ограничены:

$$0 < t_0 \le t_{**}, \quad \max_{0 \le t \le t_0} s(t) \le s_{**}$$

где t_{**} и s_{**} – заданные величины.

Задача 2. При тех же ограничениях за счет внешних воздействий необходимо разрушить область υ^* за время $t_0 \le t_{**}$ при минимальном уровне рассеянной при ползучести энергии.

Задачи 3а и 3б. Найти такие напряжения (2.7), при которых разрушение ЭФНВ происходит при требуемых деформациях ε_{kl**}^{*c}:

а) с наименьшей величиной t_0 продолжительности внешнего воздействия;

б) с наименьшей рассеянной энергией.

Во всех задачах считается, что $\omega = 0$ и $\varepsilon_{kl}^{*c} = 0$ $(k, l = 1, 2, 3)$ при $t < 0$.

Другими словами, необходимо создать в ЭФНВ оптимальное (в соответствующем смысле) НДС, которое будет однородным. Такие оптимальные пути деформирования и разрушения включения для каждой из перечисленных задач были указаны [2]. По известным σ_{kl}^{*} и ε_{kl}^{*}, удовлетворяющим системе (2.6), напряжения σ_{kl}^{∞} на бесконечности определяются из соотношений (2.2) и (2.3), в частности, для сфероидальных ФНВ – из соотношений (2.2), (2.4) и (2.5).

Как и ранее [2], можно сформулировать задачи 1–3 для случая конечной упругой или вязкоупругой области υ с ФНВ произвольной формы. Соответствующее оптимальное НДС во включении должно быть однородным [2]. Оно реализуется за счет подбора нагрузок $p_{k0} = p_{k0}(t)$ на границе S, которые будут определяться по формулам (1.4) и (1.5).

3. Некоторые замечания о задаче (u, p). Как уже отмечалось [1], рассмотренная в разд. 1 обратная задача свелась к так называемой задаче (**u**, **p**) теории упругости или вязкоупругости [5] для двусвязной области υ, на внутренней границе S^* которой заданы перемещения u_k^* и нагрузки p_k^*, а на внешней границе S условия не определены. Действительно, поскольку во включении υ^* известны однородные поля

$$\sigma_{kl}^{*} = \sigma_{kl}^{*}(t), \quad \varepsilon_{kl}^{*} = \varepsilon_{kl}^{*}(t), \quad \omega_{kl}^{*} = \omega_{kl}^{*}(t)$$

то u_k^* на границе S^* будут определяться согласно выражениям (1.3) при $x_k \in S^*$, а $p_k^* = \sigma_{kl}^* n_l^*$, где n_k^* – компоненты внешней (по отношению к v) единичной нормали к S^*.

И наоборот, иногда решение задачи ($\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$) для области v можно свести к нахождению вектора $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in v$ по формулам (1.4) и (1.5). В качестве примеров такой ситуации можно привести следующие:

а) когда на границе S^* имеем $p_k^* = 0$, $u_k^* = \alpha_{kl} x_l$, $x_k \in S^*$ ($k = 1, 2, 3$), α_{kl} – постоянные величины;

б) когда $u_k^* = 0$, $p_k^* = \beta_{kl} n_l^*$ на S^*, $\beta_{kl} = \beta_{lk}$ – постоянные величины.

Эти граничные условия можно трактовать так: в случае *а* имеем свободную от нагрузок полость, занимающую область v^* с линейными относительно x_k перемещениями точек ее границы; в случае *б* – жесткое (недеформируемое) включение v^*, находящееся в однородном напряженном состоянии. Таким образом, можно считать, что включение представляет собой упругую среду, определяющие уравнения (1.2) для которой соответственно имеют вид:

а) $\sigma_{kl}^* = b_{klmn}^* \varepsilon_{mn}^*$ при $b_{klmn}^* \to 0$, б) $\varepsilon_{kl}^* = a_{klmn}^* \sigma_{mn}^*$ при $a_{klmn}^* \to 0$.

При этом, как легко видеть, $2\varepsilon_{kl}^* = \alpha_{kl} + \alpha_{lk}$ в случае *а* и $\sigma_{kl}^* = \beta_{kl}$ в случае *б*.

Таким образом, можно воспользоваться соотношениями (1.4) и (1.5), когда компоненты тензора $\mathbf{\Phi}$ из (1.4) определяются равенствами: а) $\Phi_{kl} = -b_{klmn}\alpha_{mn}$, б) $\Phi_{kl} = \beta_{kl}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00643) и в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-319.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цвелодуб И.Ю.* Об одной обратной задаче для упругой среды, содержащей физически нелинейное включение // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 424–430.
2. *Цвелодуб И.Ю.* Некоторые обратные задачи для вязкоупругой среды с физически нелинейным включением // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 6. С. 983–994.
3. *Вакуленко А.А., Севостьянов И.Б.* Включение с нелинейными свойствами в упругой среде // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. Л.: ЛИСИ, 1991. С. 8–16.
4. *Eshelby J.D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1957. V. 241. № 1226. P. 376–396 = *Эшелби Дж.* Определение поля упругих напряжений, создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой // Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 103–139.
5. *Шваб А.А.* Некорректные статические задачи теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 98–106.

Новосибирск
e-mail: itsvel hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
6.VI.2003