

УДК 539.3:534.1

© 2005 г. Л. П. Вовк, Б. В. Соболев

**ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ
В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ СТЫКА ТРЕХ УПРУГИХ СРЕД**

В рамках модифицированного метода суперпозиции строится решение задачи о гармонических колебаниях кусочно-неоднородной области, состоящей из трех состыкованных прямоугольников с разными упругими свойствами. Исследуются особенности волнового поля в окрестности сингулярной точки границы на стыке прямоугольников.

Знание характера поведения компонентов напряженно-деформированного состояния вблизи особых точек и линий поверхности рассматриваемого тела позволяет наилучшим образом аппроксимировать решение задач теории упругости и построить эффективный численный алгоритм для его нахождения. Эта проблема еще более актуальна в задачах виброн нагружения элементов конструкций, когда напряженное состояние может претерпевать качественные изменения в зависимости от частоты внешней нагрузки. Особенности распределения статических напряжений в окрестности угловой точки линии раздела областей поперечного сечения тела, составленного из двух различных призматических тел, состыкованных между собой по боковой поверхности, рассматривались ранее [1–3]. Например, была рассмотрена [1] упруго-статическая плоская задача о двух разнородных клиньях, имеющих произвольные углы раствора; решение строилось в трансформантах Меллина, что после удовлетворения условиям сопряжения позволяет исследовать зависимость порядка сингулярности поля напряжений в вершине клиньев от углов раствора и комбинаций упругих постоянных. Был изложен метод [4], позволяющий установить характер указанных особенностей без непосредственного решения краевой задачи. Рассматривались [5–7] динамические аспекты указанной проблемы и было, в частности, введено понятие “граничного” резонанса, являющегося обобщением хорошо исследованного краевого резонанса [8].

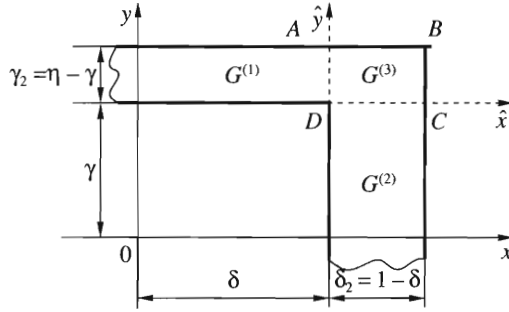
Ниже ставится задача определения качественного и количественного характера особенности волнового поля, возникающей в окрестности угловой точки стыка трех разнородных областей прямоугольной формы. Подобные задачи связаны с расчетом прочностных параметров сварных и паяных стыковых соединений, имеющих угловые швы [9]. Общее решение задачи о гармонических колебаниях неоднородного прямоугольника с внутренним отверстием построено ранее [10] при помощи модификации метода суперпозиции, использующей асимптотическое поведение волновых характеристик в особых точках границы.

1. Постановка задачи. Пусть сечение бесконечной в направлении оси α_3 кусочно-неоднородной упругой призмы занимает в системе координат $\alpha_1 O \alpha_2$ область $D = \bar{G}^{(1)} \cup \bar{G}^{(2)} \cup \bar{G}^{(3)}$, где области $\bar{G}^{(m)}$ состыкованы друг с другом и определяются неравенствами

$$\bar{G}^{(1)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1| \leq c, \alpha_2 \in [-b, -d] \cup [d, b]\}$$

$$\bar{G}^{(2)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a], |\alpha_2| \leq d\}$$

$$\bar{G}^{(3)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a], \alpha_2 \in [-b, -d] \cup [d, b]\}$$



Фиг. 1

Материал областей $\bar{G}^{(m)}$ предполагается изотропным и определяется модулем сдвига $\mu^{(m)}$, коэффициентом Пуассона $\nu^{(m)}$ и плотностью $\rho^{(m)}$. Здесь и далее верхний индекс будет определять принадлежность механической характеристики или упругого модуля к области $\bar{G}^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3$), а греческие индексы принимают значения 1, 2.

Пусть на внешних сторонах сечения $\alpha_1 = \pm a$, $\alpha_2 = \pm b$ задана гармонически изменяющаяся во времени с частотой ω вибронагрузка переменной интенсивности q , а внутренняя граница сечения свободна.

Для удобства в области сечения вводим локальные безразмерные координаты

$$\hat{x} = (\alpha_1 - c)/a, \quad \hat{y} = (\alpha_2 - d)/a$$

и безразмерные геометрические параметры

$$\eta = b/a, \quad \delta = c/a, \quad \gamma = d/a, \quad \delta_2 = 1 - \delta, \quad \gamma_2 = \eta - \gamma$$

Учитывая симметрию области D , можно рассматривать волновое поле части области, расположенной в первой четверти. Эта часть области изображена на фиг. 1 в безразмерных координатах.

Отнесенные к $\mu^{(m)}$ безразмерные амплитудные компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$ связаны с безразмерными, отнесенными к a , перемещениями $U_{\beta}^{(m)}$ соотношениями закона Гука для изотропного тела и зависят от безразмерного частотного параметра $\Omega^{(m)} = \omega a / \sqrt{\mu^{(m)}/\rho^{(m)}}$.

Граничные условия задачи включают в себя силовые условия нагружения на внешней границе сечения и условия жесткого сцепления областей $G^{(m)}$. В безразмерном виде они могут быть записаны следующим образом:

$$\text{в области } G^{(1)} = \{ |x| \leq \delta; 0 \leq \hat{y} \leq \gamma_2 \}$$

$$\sigma_{1\beta}^{(1)}(\delta, \hat{y}) = r_{31} \sigma_{1\beta}^{(3)}(0, \hat{y}), \quad U_{\beta}^{(1)}(\delta, \hat{y}) = U_{\beta}^{(3)}(0, \hat{y})$$

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, \gamma_2) = q^{(1)}, \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \gamma_2) = \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) = 0$$

$$\text{в области } G^{(2)} = \{ 0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; |y| \leq \gamma \}$$

$$\sigma_{\beta 2}^{(2)}(\hat{x}, \gamma) = r_{32} \sigma_{\beta 2}^{(3)}(\hat{x}, 0), \quad U_{\beta}^{(2)}(\hat{x}, \gamma) = U_{\beta}^{(3)}(\hat{x}, 0)$$

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = \sigma_{12}^{(2)}(0, y) = \sigma_{11}^{(2)}(0, y)$$

(1.1)

в области $G^{(3)} = \{0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; 0 \leq \hat{y} \leq \gamma_2\}$

$$\sigma_{11}^{(3)}(\delta_2, \hat{y}) = q^{(3)}, \quad \sigma_{12}^{(3)}(\delta_2, \hat{y}) = 0, \quad \sigma_{22}^{(3)}(\hat{x}, \gamma_2) = q^{(3)}, \quad \sigma_{12}^{(3)}(\hat{x}, \gamma_2) = 0$$

Здесь

$$r_{ij} = \mu^{(i)}/\mu^{(j)}, \quad q^{(m)} = q/\mu^{(m)}$$

2. Построение общего решения. Общее решение $U_{\beta}^{(m)}$, удовлетворяющее системе уравнений движения внутри области $G^{(m)}$, конструируем по методу суперпозиции [8] в виде суммы двух частных решений этой системы, каждое из которых описывает колебания бесконечных полос, образующих при своем пересечении область $G^{(m)}$. Четность или нечетность этих частных решений определяется видом граничных условий. При этом необходимо учитывать, что по координате \hat{y} функции $U_{\beta}^{(1)}(x, \hat{y})$, $U_{\beta}^{(3)}(\hat{x}, \hat{y})$, а по координате \hat{x} – функции $U_{\beta}^{(2)}(\hat{x}, y)$, $U_{\beta}^{(3)}(\hat{x}, \hat{y})$ являются функциями общего вида. Таким образом, общее решение задачи в областях $G^{(m)}$ запишется в виде

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= H_1^{(1)} \operatorname{sh}(l^{(1)}x) \cos \theta^{(1)}(\hat{y} - \gamma_2) + \tilde{U}_1^{(1)} \sin \chi^{(1)}(x - \delta) \\ U_2^{(1)} &= H_2^{(1)} \operatorname{ch}(l^{(1)}x) \sin \theta^{(1)}(\hat{y} - \gamma_2) + \tilde{U}_2^{(1)} \cos \chi^{(1)}(x - \delta) \\ U_1^{(2)} &= \hat{U}_1^{(2)} \cos \theta^{(2)}(y - \gamma) + R_1^{(2)} \operatorname{ch}(l^{(2)}y) \sin \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta_2) \\ U_2^{(2)} &= \hat{U}_2^{(2)} \sin \theta^{(2)}(y - \gamma) + R_2^{(2)} \operatorname{sh}(l^{(2)}y) \cos \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta_2) \\ U_1^{(3)} &= \hat{U}_1^{(3)} \cos \theta^{(1)}(\hat{y} - \gamma_2) + \tilde{U}_1^{(3)} \sin \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta_2) \\ U_2^{(3)} &= \hat{U}_2^{(3)} \sin \theta^{(1)}(\hat{y} - \gamma_2) + \tilde{U}_2^{(3)} \cos \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\tilde{U}_{\beta}^{(n)} = R_{\beta}^{(n)} \operatorname{sh}(l^{(n)}\hat{y}) + S_{\beta}^{(n)} \operatorname{ch}(l^{(n)}\hat{y}), \quad n = 1, 3; \quad \hat{U}_{\beta}^{(p)} = H_{\beta}^{(p)} \operatorname{sh}(l^{(p)}\hat{x}) + Q_{\beta}^{(p)} \operatorname{ch}(l^{(p)}\hat{x}), \quad p = 2, 3$$

Набор постоянных $H_{\beta}^{(m)}$, $Q_{\beta}^{(m)}$, $R_{\beta}^{(m)}$, $S_{\beta}^{(m)}$ в формулах (2.1) обеспечивает необходимую степень произвола для удовлетворения граничным условиям и условиям сопряжения (1.1) в рассматриваемой составной области. В качестве значений $\theta^{(\beta)}$, $\chi^{(\beta)}$ целесообразно выбрать такие последовательности чисел $\theta_k^{(\beta)}$, $\chi_j^{(\beta)}$, чтобы системы соответствующих функций были полными и ортогональными на соответствующих отрезках [8, 10]. Из этого требования в качестве возможных следуют значения

$$\theta_k^{(1)} = k\pi/\gamma_2, \quad \theta_k^{(2)} = k\pi/\gamma, \quad \chi_j^{(1)} = j\pi/\delta, \quad \chi_j^{(2)} = j\pi/\delta_2; \quad k = 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots$$

Подставляя выражения (2.1) в системы уравнений движения, получаем для каждого значения k и j системы линейных однородных уравнений относительно коэффициентов $H_1^{(m)}$ и $H_2^{(m)}$, ..., $S_1^{(m)}$ и $S_2^{(m)}$. Из условия существования нетривиального решения этих систем находим значения параметров $l^{(m)}$ и $l^{(m)}$

$$l_{\beta k}^{(m)2} = \theta_k^{(m)2} - \Omega_{\beta}^{(m)2}, \quad l_{\beta j}^{(m)2} = \chi_j^{(m)2} - \Omega_{\beta}^{(m)2}$$

где

$$\Omega_1^{(m)^2} = \Omega^{(m)^2} / N_{11}^{(m)}, \quad N_{11}^{(m)} = 2(1 - v^{(m)}) / (1 - 2v^{(m)}), \quad \Omega_2^{(m)} = \Omega^{(m)}$$

$$\theta_k^{(1)} = \theta_k^{(3)}, \quad \chi_j^{(2)} = \chi_j^{(3)}$$

и связь между упомянутыми коэффициентами, что полностью определяет общее решение задачи во всех областях $G^{(m)}$ и позволяет удовлетворить условиям сопряжения и силовым граничным условиям.

3. Решение вспомогательных задач. В соответствии с алгоритмом модифицированного метода суперпозиции, впервые предложенного для случая однородных конечных областей [11] и распространенного на неоднородные области [7, 10], заменим часть исходных граничных условий вспомогательными. Это позволит получить аналитическое решение вспомогательной задачи. Решение исходной краевой задачи будет выражено через дополнительные функции, определяющие введенные граничные условия. Закономерности изменения этих функций в окрестности сингулярных точек области позволит исследовать особенности концентрации напряжений и выделить медленно сходящиеся части в рядах для всех волновых характеристик. Граничные условия вспомогательной задачи в рассматриваемом случае значительно усложнятся ввиду наличия двух внутренних линий раздела областей $G^{(m)}$ и примут следующий вид:

$$G^{(1)} = \{|x| \leq \delta; 0 \leq \hat{y} \leq \gamma_2\}:$$

$$U_1^{(1)}(\delta, \hat{y}) = f_1(\hat{y}), \quad \sigma_{12}^{(1)}(\delta, \hat{y}) = \varphi_1(\hat{y})$$

$$U_2^{(1)}(x, \gamma_2) = f_2(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \gamma_2) = 0, \quad U_2^{(1)}(x, 0) = f_3(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = 0$$

$$G^{(2)} = \{0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; |y| \leq \gamma\}:$$

$$U_1^{(2)}(\delta_2, y) = f_4(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0, \quad U_1^{(2)}(0, y) = f_5(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(0, y) = 0 \quad (3.1)$$

$$U_2^{(2)}(\hat{x}, \gamma) = f_6(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \gamma) = \varphi_2(\hat{x})$$

$$G^{(3)} = \{0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; 0 \leq \hat{y} \leq \gamma_2\}:$$

$$U_1^{(3)}(\delta_2, \hat{y}) = f_7(\hat{y}), \quad \sigma_{12}^{(3)}(\delta_2, \hat{y}) = 0, \quad U_1^{(3)}(0, \hat{y}) = f_1(\hat{y}), \quad \sigma_{12}^{(3)}(0, \hat{y}) = r_{13}\varphi_1(\hat{y})$$

$$U_2^{(3)}(\hat{x}, \gamma_2) = f_8(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(3)}(\hat{x}, \gamma_2) = 0, \quad U_2^{(3)}(\hat{x}, 0) = f_6(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(3)}(\hat{x}, 0) = r_{23}\varphi_2(\hat{x})$$

Через $f_1(\hat{y})$, $\varphi_1(\hat{y})$, ..., $f_8(\hat{y})$ обозначены неизвестные вспомогательные функции.

Отметим, что выбор граничных условий вспомогательной задачи в виде (3.1) позволяет автоматически удовлетворить части граничных условий исходной краевой задачи, затрагивающих нормальные перемещения и касательные напряжения на внешних и внутренних границах области. Раскладываем вспомогательные функции в ряды Фурье на соответствующих отрезках и, используя общее решение задачи, составляем условия (3.1). Получающиеся наборы линейных систем допускают аналитическое решение и позволяют в явном виде выразить характеристики волнового поля во всей составной области сечения через коэффициенты Фурье f_{10} , f_{1k} , f_{20} , f_{2j} , φ_{1k} , ... введенных вспомогательных функций. Например, выражения для перемеще-

ний в области $G^{(1)}$ имеют вид (всюду суммирование по k и j ведется от единицы до бесконечности)

$$U_1^{(1)} = \frac{1}{\Omega_2^{(1)2}} \left\{ \sum_k V_{k65}^{(1)} \cos \theta_k^{(1)} (\hat{y} - \gamma_2) + \sum_k W_{j3}^{(1)} \sin \chi_j^{(1)} (x - \delta) \right\} + f_{10} \frac{\sin \Omega_1^{(1)} x}{\sin \Omega_1^{(1)} \delta}$$

$$U_2^{(1)} = \frac{1}{\Omega_2^{(1)2}} \left\{ \sum_k V_{k34}^{(1)} \sin \theta_k^{(1)} (\hat{y} - \gamma_2) + \sum_k W_{j6}^{(1)} \cos \chi_j^{(1)} (x - \delta) \right\} +$$

$$+ f_{20} \frac{\sin \Omega_1^{(1)} \hat{y}}{\sin \Omega_1^{(1)} \gamma_2} - f_{30} \frac{\sin \Omega_1^{(1)} (\hat{y} - \gamma_2)}{\sin \Omega_1^{(1)} \gamma_2}$$

где

$$V_{krs}^{(1)} = 2(\theta_k^{(1)})^2 f_{1k} \Delta_r^{(1)}(x, \delta, \theta_k^{(1)}) + \theta_k^{(1)} \varphi_{1k} \Delta_s^{(1)}(x, \delta, \theta_k^{(1)}), \quad rs = 65, 34$$

$$W_{jt}^{(1)} = 2(\chi_j^{(1)})^2 [f_{2j} \Delta_t^{(1)}(\hat{y}, \gamma_2, \chi_j^{(1)}) - f_{3j} \Delta_t^{(1)}(\hat{y} - \gamma_2, \gamma_2, \chi_j^{(1)})], \quad y = 3, 6$$

$$\Delta_3^{(m)}(u, v, z_j) = \frac{a_{3j}^{(m)2}}{2z_j a_{1j}^{(m)}} C_{1j}^{(m)} - \frac{a_{2j}^{(m)}}{z_j} C_{2j}^{(m)}, \quad \Delta_4^{(m)}(u, v, z_j) = \frac{z_j}{a_{1j}^{(m)}} C_{1j}^{(m)} - \frac{a_{2j}^{(m)}}{z_j} C_{2j}^{(m)}$$

$$\Delta_5^{(m)}(u, v, z_j) = S_{2j}^{(m)} - S_{1j}^{(m)}, \quad \Delta_6^{(m)}(u, v, z_j) = S_{2j}^{(m)} - \frac{a_{3j}^{(m)2}}{2z_j^2} S_{1j}^{(m)}$$

$$S_{\gamma j}^{(m)} = \frac{\text{sh} a_{\gamma j}^{(m)} u}{\text{sh} a_{\gamma j}^{(m)} v}, \quad C_{\gamma j}^{(m)} = \frac{\text{ch} a_{\gamma j}^{(m)} u}{\text{sh} a_{\gamma j}^{(m)} v}, \quad a_{\beta j}^{(m)2} = z_j^2 - \Omega_{\beta}^{(m)2}, \quad a_{3j}^{(m)2} = a_{2j}^{(m)2} + z_j^2$$

Представленная форма записи решения вспомогательных задач предполагает исключение из рассмотрения тех значений частоты, при которых имеет место обращение в нуль выражений $\text{sh}(l_{\beta j}^{(m)} \gamma)$, $\text{sh}(l_{\beta k}^{(m)} \delta)$, Как отмечалось [8, 11], эти значения частоты не связаны с какими-либо физическими особенностями в поведении упругого тела, а требуют лишь некоторого изменения формы записи общего решения.

4. Асимптотический анализ разрешающей системы интегральных уравнений. После замены исходной краевой задачи вспомогательной, определяемой граничными условиями (3.1), часть граничных условий (1.1) осталась неудовлетворенной. Их можно рассматривать как систему интегральных уравнений относительно неизвестных вспомогательных функций $f_1(\hat{y})$, $\varphi_1(\hat{y})$, ..., $f_8(\hat{x})$. Эти функции могут иметь особенности в крайних точках своих областей определения. Учет этих особенностей позволяет выделить и просуммировать медленно сходящиеся части в рядах для волновых характеристик и удачно подобрать координатные функции в асимптотических методах решения системы интегральных уравнений. Характер особенностей в точках A , B и C (фиг. 1) был исследован ранее [7, 10], поэтому в данной работе поставим задачу определения особенности волнового поля во внутренней точке $D(\delta, \gamma)$ стыка трех областей. Для этого предполагаем, что асимптотически значимые в окрестности этой точки функции (3.1) имеют особенности следующего вида:

$$f_i'(\xi) = F_i^D \xi^{\alpha-1}, \quad \varphi_j(\xi) = \Phi_j^D \xi^{\alpha-1}; \quad i = 1, 6; \quad j = 1, 2 \quad \text{при } \xi \rightarrow 0$$

$$f_3'(\xi) = F_3^D (\delta - \xi)^{\alpha-1} \quad \text{при } \xi \rightarrow \delta; \quad f_5'(\xi) = F_5^D (\gamma - \xi)^{\alpha-1} \quad \text{при } \xi \rightarrow \gamma$$

В этих формулах α – параметр, определяющий особенности указанных функций в точке D , а F_i^D , Φ_j^D ($i = 1, 3, 5, 6; j = 1, 2$) – произвольные постоянные.

Определяя асимптотику коэффициентов Фурье рассматриваемых функций, записываем неиспользованные во вспомогательных задачах граничные условия и условия сопряжения областей $G^{(m)}$ в окрестности точки D при предельных значениях аргументов, т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)}(\delta, \hat{y}) &= \sigma_{11}^{(3)}(0, \hat{y}) \text{ при } \hat{y} \rightarrow 0; \quad \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \gamma) = \sigma_{22}^{(3)}(\hat{x}, 0) \text{ при } \hat{x} \rightarrow 0 \\ U_2^{(1)}(\delta, \hat{y}) &= U_2^{(3)}(0, \hat{y}) \text{ при } \hat{y} \rightarrow 0; \quad U_1^{(2)}(\hat{x}, \gamma) = U_1^{(3)}(\hat{x}, 0) \text{ при } \hat{x} \rightarrow 0 \\ \sigma_{11}^{(2)}(0, y) &= 0 \text{ при } y \rightarrow \gamma; \quad \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) = 0 \text{ при } x \rightarrow \delta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Переобозначая постоянные и учитывая отсутствие у внешней нагрузки разрывов в этой точке, сводим условия (4.1) к системе однородных уравнений, определяющих характер особенности характеристик волнового поля в точке D ,

$$\begin{aligned} -m_{13}s_\alpha\Phi_1 + r_{21}(1 + \alpha d_{11}^{(3)})\Phi_2 - 2(d_{11}^{(1)} + r_{31}d_{11}^{(3)})s_\alpha F_1 - 2d_{11}^{(1)}\alpha F_3 - 2r_{31}d_{11}^{(3)}\alpha F_6 &= 0 \\ r_{12}(1 + \alpha d_{11}^{(3)})\Phi_1 - m_{23}s_\alpha\Phi_2 - 2r_{32}d_{11}^{(3)}\alpha F_1 - 2d_{11}^{(2)}\alpha F_5 + 2(d_{11}^{(2)} - r_{32}d_{11}^{(3)})s_\alpha F_6 &= 0 \\ -(A^{(1)} + r_{13}A^{(3)})s_\alpha\Phi_1 + r_{23}d_{11}^{(3)}\alpha\Phi_2 + 2m_{13}s_\alpha F_1 + 2(1 - \alpha d_{11}^{(1)})F_3 + 2(1 - \alpha d_{11}^{(3)})F_6 &= 0 \quad (4.2) \\ r_{13}d_{11}^{(3)}\alpha\Phi_1 - (A^{(2)} + r_{23}A^{(3)})s_\alpha\Phi_2 + 2(1 - \alpha d_{11}^{(3)})F_1 + 2(1 - \alpha d_{11}^{(2)})F_5 + 2m_{23}s_\alpha F_6 &= 0 \\ \left(\frac{1}{d_{11}^{(2)}} + \alpha\right)\Phi_2 - 2s_\alpha F_5 - 2\alpha F_6 = 0, \quad \left(\frac{1}{d_{11}^{(1)}} + \alpha\right)\Phi_1 - 2\alpha F_1 - 2s_\alpha F_3 &= 0 \end{aligned}$$

где

$$d_{11}^{(m)} = \frac{1}{2(1 - v^{(m)})}, \quad A^{(m)} = 2 - d_{11}^{(m)}, \quad m_{ij} = \frac{2 - 3(v^{(i)} + v^{(j)}) + 4v^{(i)}v^{(j)}}{2(1 - v^{(i)})(1 - v^{(j)})}$$

$$\Phi_\beta = -2\Phi_\beta^D \Gamma(\alpha)s_\alpha, \quad F_k = 2F_k^D \Gamma(\alpha)s_\alpha, \quad k = 1, 3, 5, 6; \quad s_\alpha = \sin \frac{\pi\alpha}{2}$$

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

В системе (4.2) номер уравнения соответствует номеру граничного условия в формулах (4.1).

Параметр α , характеризующий особенность волновых характеристик во внутренней угловой точке составной области, можно определить из условия существования нетривиального решения системы (4.2)

$$\Delta(\alpha, \mu^{(m)}, v^{(m)}) = 0 \quad (4.3)$$

Следует отметить, что параметр α не зависит от частоты и геометрических параметров γ , δ , η и определяется только значениями модуля сдвига и коэффициента Пуассона стыкуемых областей. Этот вывод следует из вида уравнения (4.3) и определяется локальным характером особенности, что подтверждается также тем, что уравнение (4.3) не изменит свой вид при замене $\mu^{(1)}, v^{(1)}$ на $\mu^{(2)}, v^{(2)}$ и обратно. Это

Таблица 1

Материал областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$	Материал области $G^{(3)}$				
	латунь	олово	платина	свинец	цинк
Алюминий	0.985	0.971	0.968	0.952	0.994
Вольфрам	0.965	0.976	0.962	0.901	0.990
Магний	0.984	0.992	0.979	0.897	0.971
Медь	0.986	0.981	0.994	0.908	1.106
Никель	0.993	0.951	0.997	0.878	1.018
Серебро	0.971	0.987	0.975	0.922	0.993
Сталь 20	0.991	0.942	0.995	0.902	1.009

можно доказать при помощи элементарных преобразований строк и столбцов определителя системы (4.2).

5. Численный анализ параметра особенности. При численном анализе задач рассматриваемого типа основное внимание уделяется исследованию спектра резонансных частот и максимальных динамических напряжений. Однако несомненный интерес представляет также численное исследование уравнения (4.3) с целью определения параметра локальной особенности во внутренней угловой точке сечения. Оно показало, что при некоторых соотношениях упругих констант стыкуемых в точке D областей $G^{(m)}$ уравнение (4.3) имеет вещественный корень α , $0 < \alpha < 1$. Это характеризует возникновение локальных особенностей напряжений в этой точке. Поскольку в точке D имеем сопряжение сразу трех разнородных областей, в данном случае нет возможности ввести компактные параметры, аналогичные коэффициентам Дандерса [1], определяющим наличие особенности в сингулярной точке границы при стыке двух областей.

В табл. 1 представлены данные расчетов корней уравнения (4.3) при разных сочетаниях упругих свойств материалов областей $G^{(m)}$. При этом рассмотрен наиболее часто встречающийся на практике случай одинаковых материалов областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$.

Практический интерес представляет вопрос о зависимости изучаемого параметра особенности напряжений от соотношения жесткостей стыкуемых областей. Если упругие параметры областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ зафиксировать ($\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu^{(3)}$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$, $r_{32} = r_{31}$) и принять их равными упругим параметрам стали, а варьировать только модуль сдвига угловой области $G^{(3)}$, то приходим к данным фиг. 2, где показана зависимость $\alpha = \alpha(r_{32})$.

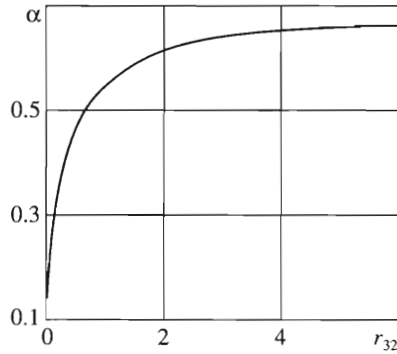
Из анализа представленной зависимости следует, что локальная особенность напряжений во внутренней угловой точке появляется при любых r_{32} . Анализ данных фиг. 2 позволит уже на этапе проектирования оптимально подобрать жесткости материалов составных элементов конструкций с целью уменьшения концентрации напряжений в проблемных точках их сечения.

Установим асимптотику параметра особенности α при больших значениях модуля сдвига угловой области $\mu^{(3)}$. Для этого вводим малые безразмерные параметры $\epsilon_j = \mu^{(j)}/\mu^{(3)} = r_{3j}^{-1}$ ($j = 1, 2$) и, разыскивая решение уравнения (4.3) в виде ряда

$$\alpha = \alpha_0 + \epsilon_1 \alpha_{11} + \epsilon_2 \alpha_{12} + \dots \tag{4.4}$$

можем достаточно просто получить последовательность уравнений для определения $\alpha_0, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots$. Например, первый член разложения α_0 удовлетворяет уравнению

$$\left(\sin^2 \frac{\pi \alpha_0}{2} - \alpha_0^2 \right) \prod_{i=1}^2 \left(\alpha_0^2 - (3 - 4\nu^{(i)}) \sin^2 \frac{\pi \alpha_0}{2} - 4(1 - \nu^{(i)})^2 \right) = 0 \tag{4.5}$$



Фиг. 2

Первый сомножитель в уравнении (4.5) совпадает с левой частью известного уравнения [1, 7, 8, 10], определяющего особенность компонент тензора напряжений в вершине однородного клина с углом раствора 90° . Его корни не зависят от упругих постоянных материала, и при построении асимптотики решения следует учитывать только вещественный корень $\alpha_0 = 1$ этого уравнения и счетное множество комплексных корней с положительной вещественной частью. Вторым и третьим сомножителями, как показывает численный анализ, имеют корни $\alpha_0 \in (0, 1)$ только при $\nu^{(j)} > 0.62$, что не соответствует упругим параметрам реальных материалов. Таким образом, можно утверждать, что при больших значениях α_{11} , α_{12} параметр локальной особенности стремится к единице. Отметим также, что полученные результаты носят лишь качественный характер, поскольку определение следующих членов асимптотики в разложении (4.4) приводит к уравнениям, содержащим сумму четырех определителей с элементами, зависящими от α_0 и α_{1j} . Его численное решение гораздо сложнее решения уравнения (4.3).

6. Численное исследование характеристик волнового поля. Решение системы интегральных уравнений проводим по обычной методике [7, 8], сводя ее к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье вспомогательных функций. Известная асимптотика поведения этих коэффициентов при больших номерах позволяет свести эту систему к конечной. Частотное уравнение получаем, приравнявая определитель системы нулю. Критерием достоверности вычислений служила погрешность выполнения условий сопряжения сред. Погрешность выполнения условий сопряжения по перемещениям во всем рассмотренном частотном диапазоне не превышала 2–3% от максимальной величины перемещений. Точность выполнения условий сопряжения по напряжениям в окрестности сингулярных точек A , C и D границы составной области не превышала 6–8%.

Для обеспечения достоверности полученных результатов были проведены также расчеты методом конечных элементов при помощи программы ANSYS. При создании конечно-элементной модели использован метод твердотельного моделирования (описываются геометрические границы модели, затем программа берет на себя генерацию сетки с узлами и элементами, причем размеры и форму элементов можно контролировать). Объект моделируется шестью узловыми треугольными твердотельными элементами PLANE2. Модальный анализ помогает установить параметры колебаний составной области: с его помощью определяются собственные частоты и формы колебаний. Достоверность по конечно-элементной модели контролировалась изменением густоты сетки и сравнением полученных результатов. Практически для всех геометрических размеров достаточно было задать не более 900 узлов.

В табл. 2 приведены значения первой, второй и третьей собственных частот для однородного сечения стальной детали ($\eta = 0.5$, $\delta = 0.4$, $\gamma = 0.2$) и разных сочетаний материалов стыкуемых областей (на первом месте стоит материал области $G^{(1)}$, на

Таблица 2

№ резонансных частот	Сталь		Сталь-алюминий-сталь		Сталь-серебро-сталь		Сталь-золото-сталь	
	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(1)}$
1	0.303	0.301	0.267	0.264	0.319	0.320	0.333	0.330
2	0.821	0.814	0.743	0.732	0.869	0.863	0.897	0.889
3	1.133	1.120	1.007	0.992	1.102	1.092	1.296	1.290

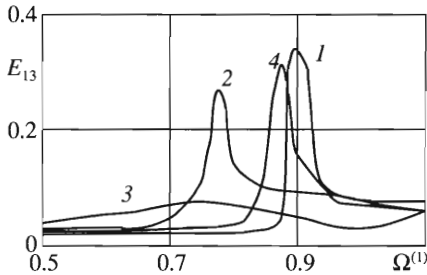
втором – области $G^{(2)}$, на третьем – области $G^{(3)}$ по предлагаемой методике $\Omega_i^{(1)}$ и найденные по методу конечных элементов $\Omega_i^{(1)'}$. Из данных табл. 2 следует, что совпадение результатов достаточно хорошее, однако практически для всех рассмотренных сочетаний материалов значения частот $\Omega_i^{(1)'}$ получаются несколько меньшими, чем $\Omega_i^{(1)}$. С ростом номера собственной частоты, как и следовало ожидать, погрешности растут.

При исследовании спектра резонансных частот колебаний составных областей особый интерес вызывает определение частот, при которых характерно возникновение интенсивных колебаний, локализованных в окрестности границ раздела. Подобные вопросы для случая сопряжения двух областей изучены ранее [5–7].

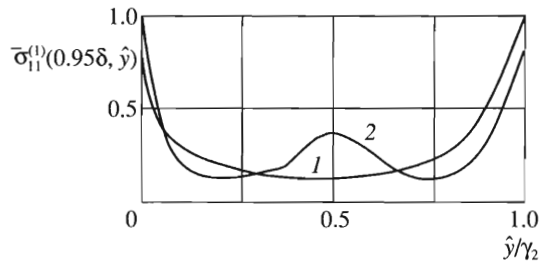
Проведем анализ средней за период энергии \bar{E} [7, 8], накопленной в области $G^{(1-3)} = \{ |x - \delta| \leq 0.1\delta_2; 0 \leq \hat{y} \leq \gamma_2 \}$ – окрестности границы раздела DA областей $G^{(1)}$ и $G^{(3)}$ (фиг. 1). На фиг. 3 представлена частотная зависимость отношения $E_{13} = \bar{E}^{(1-3)} / \bar{E}$ энергии, накопленной в области $G^{(1-3)}$, к энергии, накопленной во всем сечении. Расчеты проведены для разных сочетаний упругих параметров стыкуемых областей при $\eta = 0.7, \delta = 0.8, \gamma = 0.5$.

Кривой 1 соответствует случай, когда материал областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ – сталь, а материал области $G^{(3)}$ – свинец (сочетание сталь – сталь – свинец). В окрестности частоты $\Omega^{(1)} = 0.897$ наблюдается довольно резкий скачок энергии, что объясняется возникновением интенсивных колебаний, локализованных в окрестности границы раздела областей. Подобные частоты естественно называть частотами граничного резонанса [5]. Величина максимума отношения $\bar{E}^{(1-3)} / \bar{E}$ существенно зависит от упругих свойств контактирующих материалов. Так, для тройки материалов сталь – сталь – латунь интенсивность колебаний на частоте граничного резонанса снижается (кривая 2 на фиг. 3). При этом сама частота граничного резонанса несколько смещена по сравнению с предыдущим случаем, что связано с изменением параметров. Для пар материалов, соответствующих значениям параметра особенности $\alpha > 1$, скачок величины коэффициента при особенности у напряжений практически не наблюдается. На фиг. 3 кривая 3 соответствует частотной зависимости отношения энергий для тройки материалов сталь – сталь – цинк.

Следует отметить, что, как и следовало ожидать, изменение упругих параметров области $G^{(2)}$ несущественно влияет на частотную зависимость энергии, накопленной в области $G^{(1-3)}$. В большинстве рассмотренных вариантов максимум скачка энергии несколько снижается по сравнению со случаем одинаковых материалов областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$. Кривая 4 на фиг. 3 представляет указанную зависимость для тройки материалов сталь – алюминий – свинец.



Фиг. 3



Фиг. 4

При численном анализе динамических компонент тензора напряжений необходимо учитывать не только геометрические и упругие параметры контактирующих областей, но и значения параметров локальной особенности по напряжениям в сингулярных точках сечения. Не менее важно учитывать и акустические сопротивления контактирующих сред [6], поскольку при их различных соотношениях наблюдается различная степень отражения волнового поля от границы раздела. На фиг. 4 представлено распределение нормированных, т.е. отнесенных к максимальным, напряжений $\sigma_{11}^{(1)}(0.95\delta, \hat{y})$, рассчитанных на первой ($\Omega^{(1)} = 0.333$, кривая 1) и второй ($\Omega^{(1)} = 0.897$, кривая 2) резонансных частотах при постоянной интенсивности внешней нагрузки. Сочетание материалов сталь – золото – сталь, а геометрические параметры сечения равны $\eta = 0.5$, $\delta = 0.4$, $\gamma = 0.2$.

Из данных фиг. 4 следует, что максимальные касательные напряжения возникают в окрестности разных сингулярных точек сечения: на первой собственной частоте – в точке А, а на второй – в точке D. Указанная особенность сохраняется и при других сочетаниях упругих и геометрических параметров составной области.

7. Выводы. Определение вещественных корней уравнения (4.3) позволяет прогнозировать характер динамической концентрации напряжений в опасных зонах сечения призматических составных тел. Подбирая упругие характеристики стыкуемых областей, соответствующие максимальным значениям параметра локальной особенности α , можно минимизировать динамические напряжения в сингулярных точках границы сечения, соответствующих внутренним угловым точкам стыка разнородных областей. Полученные результаты могут быть применены на этапе проектирования сварных, паяных и клеевых угловых стыковых соединений, работающих в вибрационном поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vogy D.V.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. V. 38. № 2. P. 171–180 = Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1971. Т. 38. № 2. С. 87–96.
2. *Лобода В.В.* О контактном взаимодействии упругой прямоугольной пластины и полосы // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 4. С. 69–76.
3. *Чобанян К.С., Геворкян С.Х.* Поведение поля напряжений около угловой точки линии раздела в задаче плоской деформации составного упругого тела // Изв. АН Армянской ССР. 1971. Т. 24. № 5. С. 16–24.
4. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 178–186.
5. *Гетман И.П., Лисицкий О.Н.* Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1044–1048.

6. *Гринченко В.Т., Городецкая Н.С.* Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 5. С. 121–125.
7. *Вовк Л.П.* Особенности гармонических колебаний кусочно-неоднородной прямоугольной области // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2002. № 4. С. 9–13.
8. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
9. *Аснис А.Е., Мосенкис Ю.Г.* Снижение металлоемкости сварных швов стальных конструкций. Киев: Техніка, 1987. 108 с.
10. *Вовк Л.П.* Асимптотическое исследование собственных колебаний неоднородного прямоугольника с внутренним отверстием // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2001. № 1. С. 29–33.
11. *Белоконь А.В.* Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 1. С. 56–59.

Ростов-на-Дону
e-mail: bsobol@dstu.edu.ru
vovklp@ukrtop.com

Поступила в редакцию
21.IX.2004