

УДК 539.3

© 2005 г. Л. П. Вовк, Б. В. Соболев

**О КОНЦЕНТРАЦИИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ
НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА УПРУГИХ СРЕД**

Рассматриваются установившиеся симметричные колебания поперечно-неоднородной упругой прямоугольной области, состоящей из трех состыкованных однородных изотропных прямоугольников, причем упругие характеристики внутреннего прямоугольника предполагаются отличными от внешних. На основе методов, развитых ранее [1, 2], исследуется зависимость порядка сингулярности поля напряжений на границе раздела от комбинаций упругих постоянных стыкуемых сред и от их волновых сопротивлений.

Анализ спектра и форм колебаний изотропного прямоугольника на основе метода суперпозиции представлен достаточно полно [3, 4]. Была предложена [1, 2] модификация этого метода, улучшающая его сходимость за счет исследования особенностей волнового поля в угловых точках. Количественное исследование процесса распространения волн в составном волноводе бесконечной протяженности проведено ранее [5–7].

1. Постановка задачи. Пусть сечение бесконечной в направлении оси α_3 неоднородной упругой призмы занимает в системе координат $\alpha_1 O \alpha_2$ область

$$D = G^{(1)} \cup G^{(2)} \tag{1.1}$$

Области $G^{(m)}$ состыкованы друг с другом, изотропны, в общем случае имеют различные упругие постоянные и определяются неравенствами

$$G^{(1)} = \{(\alpha_1, \alpha_2): |\alpha_1| \leq c; |\alpha_2| \leq b\}, \quad G^{(2)} = \{(\alpha_1, \alpha_2): \alpha_1 \in [-a, c] \cup [c, a]; |\alpha_2| \leq b\} \tag{1.2}$$

Здесь и далее верхний индекс определяет принадлежность механической характеристики или упругого модуля к области $G^{(m)}$.

Пусть на внешних сторонах пластины $\alpha_1 = \pm a, \alpha_2 = \pm b$ задана гармонически изменяющаяся во времени с частотой ω нагрузка интенсивности q . Для исследования частот и форм собственных колебаний используем уравнения движения, записанные в безразмерных функциях и координатах

$$\Delta U_{\beta}^{(m)} + (N_{12}^{(m)} + 1)(U_{1,1}^{(m)} + U_{2,2}^{(m)})_{,\beta} + \Omega^{(m)2} U_{\beta}^{(m)} = 0, \quad \beta = 1, 2; \quad m = 1, 2 \tag{1.3}$$

где

$$U_{\beta}^{(m)} = \frac{v_{\beta}^{(m)}}{a}, \quad N_{12}^{(m)} = N_{11}^{(m)} - 2, \quad N_{11}^{(m)} = \frac{2(1 - \nu^{(m)})}{1 - 2\nu^{(m)}}, \quad f_{,1} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{,2} = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.4}$$

$$x = \frac{\alpha_1}{a}, \quad y = \frac{\alpha_2}{a}, \quad \Omega^{(m)2} = \frac{\rho^{(m)} \omega^2 a^2}{\mu^{(m)}}$$

$\mu^{(m)}$ – модуль сдвига, $\nu^{(m)}$ – коэффициент Пуассона, $\rho^{(m)}$ – плотность в области $G^{(m)}$, $v_{\alpha}^{(m)}$ – амплитудные компоненты вектора перемещений. При формулировке гранич-

ных условий учтем симметрию области и будем рассматривать напряженное состояние части области, расположенной в первой четверти. Вводим локальную безразмерную координату

$$\hat{x} = (\alpha_1 - c)/a, \quad \hat{x} \in [0, \delta_2]; \quad \delta_2 = 1 - \delta, \quad \delta = c/a \quad (1.5)$$

и безразмерные амплитудные компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$

$$\sigma_{11}^{(m)} = N_{11}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + N_{12}^{(m)} U_{2,2}^{(m)}, \quad \sigma_{22}^{(m)} = N_{12}^{(m)} U_{1,1}^{(m)} + N_{11}^{(m)} U_{2,2}^{(m)}, \quad \sigma_{12}^{(m)} = U_{1,2}^{(m)} + U_{2,1}^{(m)} \quad (1.6)$$

Таким образом, граничные условия задачи запишутся в следующем виде:

в области $\bar{G}^{(1)} = \{(x, y) : |x| \leq \delta, |y| \leq \eta\}$

$$\sigma_{1\beta}^{(1)}(\delta, y) = \sigma_{1\beta}^{(2)}(0, y), \quad U_{\beta}^{(1)}(\delta, y) = U_{\beta}^{(2)}(0, y), \quad \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) = q^{(1)}, \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0 \quad (1.7)$$

в области $\bar{G}^{(2)} = \{(\hat{x}, y) : 0 \leq \hat{x} \leq \delta_2, |y| \leq \eta\}$

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0, \quad \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0 \quad (1.8)$$

Здесь

$$q^{(m)} = q/\mu^{(m)}, \quad \eta = b/a$$

2. Решение вспомогательных задач. В соответствии с методом суперпозиции [1–4]

общее решение $U_{\beta}^{(m)}$, удовлетворяющее системе уравнений (1.3) внутри области $\bar{G}^{(m)}$, конструируем в виде суммы частных решений этой системы, каждое из которых описывает симметричные колебания бесконечных полос, имеющих общую область $\bar{G}^{(m)}$. Основой для исследования будут выражения для частных решений уравнений движения, построенные для бесконечных слоев, которые представляют собой наборы плоских стоячих волн [3]. Однако при выборе формы этих частных решений необходимо учитывать возможность удовлетворения при их помощи не только граничным условиям на внешней границе области, но и условиям сопряжения механических характеристик на границе раздела сред. Естественно, это требует изменения численно-аналитического алгоритма решения задачи, предложенного ранее для решения задачи о вынужденных колебаниях однородного прямоугольника [2].

Итак, рассмотрим решение систем (1.3) при следующих вспомогательных граничных условиях:

в области $\bar{G}^{(1)}$

$$U_1^{(1)}(\delta, y) = f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(1)}(\delta, y) = \varphi_1(y), \quad U_2^{(1)}(x, \eta) = f_2(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0 \quad (2.1)$$

в области $\bar{G}^{(2)}$

$$U_1^{(2)}(0, y) = f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(0, y) = \varphi_1(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0, \quad U_1^{(2)}(\delta_2, y) = f_3(y) \\ U_2^{(2)}(\hat{x}, \eta) = f_4(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(\hat{x}), \varphi_1(y)$ – неизвестные функции.

Выбор вспомогательных условий в виде (2.1), (2.2) обусловлен тем, что при формулировке вспомогательной задачи необходимо не только добиться ее аналитичес-

кого решения, но и ввести в граничные условия и условия сопряжения как можно больше условий из (1.7), (1.8). Это позволит максимально упростить вид последующей системы интегральных уравнений для определения введенных неизвестных функций. Раскладывая их в ряды Фурье на соответствующих отрезках, после удовлетворения граничным условиям (2.1), (2.2) получим в конечном итоге после некоторых преобразований решения вспомогательных задач (1.3), (2.1), (2.2) (всюду далее суммирование по k и j ведется от единицы до бесконечности)

$$\begin{aligned}
 U_1^{(1)} &= \sum_k \frac{\alpha_k}{k^2} [2\alpha_k f_{1k} \Delta_1^{(1)}(x, \delta, \alpha_k) + \varphi_{1k} \Delta_4^{(1)}(x, \delta, \alpha_k)] \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
 &+ \sum_j \frac{2\beta_j^2}{k_2^2} f_{2j} \Delta_2^{(1)}(y, \eta, \beta_j) \sin \beta_j (x - \delta) + f_{10} \frac{\sin k_1}{\sin k_1 \delta} \\
 U_2^{(1)} &= \sum_k \frac{\alpha_k}{k^2} \left[2\alpha_k f_{1k} \Delta_2^{(1)}(x, \delta, \alpha_k) + \frac{\alpha_k \varphi_{1k}}{k_2^2} \Delta_3^{(1)}(x, \delta, \alpha_k) \right] \sin \alpha_k (y - \eta) + \\
 &+ \sum_j \frac{2\beta_j^2}{k_2^2} f_{2j} \Delta_1^{(1)}(y, \eta, \beta_j) \cos \beta_j (x - \delta) + f_{20} \frac{\sin k_1 y}{\sin k_1 \eta} \\
 U_1^{(2)} &= \sum_k \frac{\alpha_k}{l_2^2} [2\alpha_k f_{3k} \Delta_1^{(2)}(\hat{x}, \delta_2, \alpha_k) - 2\alpha_k f_{1k} \Delta_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2, \delta_2, \alpha_k) - \\
 &- \varphi_{1k} \Delta_4^{(2)}(\hat{x} - \delta_2, \delta_2, \alpha_k)] \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
 &+ \sum_j \frac{2\chi_j^2}{l_2^2} f_{4j} \Delta_2^{(2)}(y, \eta, \chi_j) \sin \chi_j (\hat{x} - \delta_2) + \frac{f_{30} \sin l_1 \hat{x} - f_{10} \sin l_1 (\hat{x} - \delta_2)}{\sin l_1 \delta_2} \\
 U_2^{(2)} &= \sum_k \frac{\alpha_k}{l_2^2} [2\alpha_k f_{3k} \Delta_2^{(2)}(\hat{x}, \delta_2, \alpha_k) - 2\alpha_k f_{1k} \Delta_2^{(2)}(\hat{x} - \delta_2, \delta_2, \alpha_k) - \\
 &- \varphi_{1k} \Delta_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2, \delta_2, \alpha_k)] \sin \alpha_k (y - \eta) + \sum_j \frac{2\chi_j^2}{l_2^2} f_{4j} \Delta_1^{(2)}(y, \eta, \chi_j) \cos \chi_j (\hat{x} - \delta_2) + f_{40} \frac{\sin l_1 y}{\sin l_1 \eta}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь

$$\alpha_k = k\pi/\eta, \quad \beta_k = k\pi/\delta, \quad \chi_k = k\pi/\delta_2$$

$$\Delta_1^{(m)}(x, y, z_j) = S_{2j}^{(m)} - \frac{a_{3j}^{(m)2}}{2z_j} S_{1j}^{(m)}, \quad \Delta_2^{(m)}(x, y, z_j) = \frac{a_{3j}^{(m)2}}{2z_j a_{1j}^{(m)}} C_{1j}^{(m)} - \frac{a_{2j}^{(m)}}{z_j} C_{2j}^{(m)}$$

$$\Delta_3^{(m)}(x, y, z_j) = \frac{z_j}{a_{1j}^{(m)}} C_{1j}^{(m)} - \frac{a_{2j}^{(m)}}{z_j} C_{2j}^{(m)}, \quad \Delta_4^{(m)}(x, y, z_j) = S_{2j}^{(m)} - S_{1j}^{(m)} \tag{2.4}$$

$$S_{ij}^{(m)} = \frac{\text{sh} a_{ij}^2 x}{\text{sh} a_{ij}^{(m)} y}, \quad C_{ij}^{(m)} = \frac{\text{ch} a_{ij}^{(m)} x}{\text{sh} a_{ij}^{(m)} y}, \quad a_{ij}^{(m)2} = z_j^2 - k_{ij}^{(m)2}, \quad a_{3j}^{(m)2} = a_{2j}^{(m)2} + z_j^2$$

$$k_1^{(m)} = \Omega^{(m)} / \sqrt{N_{11}^{(m)}}, \quad k_2^{(m)} = \Omega^{(m)}, \quad k_\gamma = k_\gamma^{(1)}, \quad l_\gamma = k_\gamma^{(2)}; \quad \gamma = 1, 2; \quad m = 1, 2$$

$f_{10}, f_{1k}, \dots, \Phi_{1k}$ – коэффициенты Фурье соответствующих функций.

Используя выражения (2.3), по формулам (1.6) можно рассчитать компоненты тензора напряжений.

3. Вывод системы интегральных уравнений и ее асимптотический анализ. Учитывая неиспользованные граничные условия из (2.1), (2.2), а именно

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)}(\delta, y) &= \sigma_{11}^{(2)}(0, y), \quad U_2^{(1)}(\delta, y) = U_2^{(2)}(0, y) \\ \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) &= q^{(1)}, \quad \sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q^{(2)}, \quad \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q^{(2)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

сведем исследуемую задачу к решению следующей системы интегральных уравнений относительно функций $\varphi_1(y), f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(\hat{x})$:

$$M_{k1}\varphi_1 + \sum_{r=1}^4 L_{kr}f_r = Q_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (3.2)$$

В системе (3.2) номер уравнения совпадает с номером граничного условия в формулах (3.1), а соответствующие операторы получаются из формул (2.3), (2.4), (1.6). Например,

$$\begin{aligned} M_{11}\varphi_1 &= \sum_k \alpha_k \varphi_{1k} k_2^{-2} [\Delta_8^{(1)}(\delta, \delta, \alpha_k) + k_{12}^2 \Delta_8^{(2)}(-\delta_2, \delta_2, \alpha_k)] \cos \alpha_k (y - \eta) \\ L_{11}f_1 &= \sum_k 2\alpha_k^2 f_{1k} k_2^{-2} [\Delta_7^{(1)}(\delta, \delta, \alpha_k) + k_{12}^2 \Delta_7^{(2)}(-\delta_2, \delta_2, \alpha_k)] \cos \alpha_k (y - \eta) + \\ &+ (N_{11}^{(1)} k_1 \operatorname{ctg} k_1 \delta + N_{11}^{(2)} l_1 \operatorname{ctg} l_1 \delta_2) f_{10} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{12} &= \frac{k_2}{l_2} = \frac{\rho^{(1)} \mu^{(2)}}{\rho^{(2)} \mu^{(1)}}, \quad \Delta_7^{(m)}(x, y, z_k) = 2a_{2k}^{(m)} C_{2k}^{(m)} - \frac{a_{3k}^{(m)4}}{2a_{1k}^{(m)2} z_k^{(m)}} C_{1k}^{(m)} \\ \Delta_8^{(m)}(x, y, z_k) &= 2a_{2k}^{(m)} C_{2k}^{(m)} - \frac{a_{3k}^{(m)2}}{a_{1k}^{(m)}} C_{1k}^{(m)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Исследуем поведение решения системы интегральных уравнений (3.2) в угловых точках областей $\bar{G}^{(m)}$. Это позволит определить асимптотику коэффициентов Фурье искомых функций $\varphi_{1k}, f_{1k}, f_{2j}, f_{3k}, f_{4j}$ при больших значениях индексов и удачно подобрать координатные функции [2] в методе Бубнова–Галеркина при решении системы (3.2). Итак, предположим, что функция $\varphi_1(\xi)$ имеет особенность в угловой точке стыка областей $A(\delta, \eta)$

$$\varphi_1(\xi) = P_1(\eta - \xi)^{\alpha-1}, \quad \xi \rightarrow \eta \quad (3.5)$$

а функции $f_i(\xi)$ непрерывны в своих областях определения, но их производные также терпят разрывы в угловых точках.

В окрестности точки $A(\delta, \eta)$

$$\begin{aligned} f_1'(\xi) &= Q_1(\eta - \xi)^{\alpha-1} \quad \text{при } \xi \rightarrow \eta; \quad f_2'(\xi) = Q_2(\delta - \xi)^{\alpha-1} \quad \text{при } \xi \rightarrow \delta \\ f_4'(\xi) &= \bar{Q}_4 \xi^{\alpha-1} \quad \text{при } \xi \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

В окрестности угловой точки $B(\delta_2, \eta)$ области $\bar{G}^{(2)}$

$$f_3'(\xi) = Q_3(\eta - \xi)^{\gamma-1} \text{ при } \xi \rightarrow \eta; \quad f_4'(\xi) = Q_4(\delta_2 - \xi)^{\gamma-1} \text{ при } \xi \rightarrow \delta_2 \quad (3.7)$$

Через α и γ обозначены параметры, характеризующие особенности искомым функций в указанных точках, а через P_1, Q_1, \dots, Q_4 – произвольные постоянные.

Производя интегрирование в формулах (3.5)–(3.7), можно определить асимптотику коэффициентов Фурье рассматриваемых функций в окрестностях точек A и B . Учитывая отсутствие особенностей в угловых точках у правых частей системы интегральных уравнений (3.2), по обычной методике [1, 2] приводим ее к виду

$$\begin{aligned} -m_{12}s_\alpha H_1 + 2(2 - m_{12})s_\alpha R_1 + 2n^{(1)}\alpha R_2 + 2n^{(2)}\alpha \bar{R}_4 &= 0 \\ (m_{12} + 2)s_\alpha H_1 + 2m_{12}s_\alpha R_1 - 2(1 - n^{(1)})\alpha R_2 - 2(1 - n^{(2)})\alpha \bar{R}_4 &= 0 \\ \left(\frac{1}{n^{(1)}} + \alpha\right)H_1 + 2\alpha R_1 + 2s_\alpha R_2 = 0, \quad \left(\frac{1}{n^{(2)}} + \alpha\right)H_1 + 2\alpha R_1 + 2s_\alpha \bar{R}_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$s_\gamma R_3 + \gamma R_4 = 0, \quad \gamma R_3 + s_\gamma R_4 = 0$$

Здесь

$$H_1 = -2P_1\Gamma(\alpha)s_\alpha, \quad R_i = 2Q_i\Gamma(\alpha)s_\alpha, \quad \bar{R}_4 = 2\bar{Q}_4\Gamma(\alpha)s_\alpha, \quad R_l = 2Q_l\Gamma(\gamma)s_\gamma$$

$$s_\alpha = \sin \frac{\pi\alpha}{2}, \quad s_\gamma = \sin \frac{\pi\gamma}{2}, \quad m_{12} = \frac{1}{N_{11}^{(1)}} + \frac{1}{N_{11}^{(2)}}, \quad n^{(m)} = 1 - \frac{1}{N_{11}^{(m)}}$$

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция; $i = 1, 2; l = 3, 4$.

Особенность системы (3.8) состоит в том, что она распадается на две части: первые четыре уравнения содержат неизвестные H_1, R_1, R_2, \bar{R}_4 и определяют значение параметра α – особенность характеристик волнового поля в точке A . Пятое и шестое уравнения определяют особенность во внешней угловой точке B и содержат постоянные R_3 и R_4 . Очевидно, последние не будут равны нулю, если параметр γ удовлетворяет уравнению

$$\sin^2 \frac{2\pi\gamma}{2} - \gamma^2 = 0 \quad (3.9)$$

Для разных граничных условий была исследована [8] зависимость порядка сингулярности поля статических напряжений в вершине одиночного клина от его угла раствора (уравнение (3.9) соответствует уравнению (15) работы [8] для одиночного клина с незакрепленными гранями и углом раствора 90°). Как видим, характер особенности механического поля в точке B не зависит от упругих постоянных областей $\bar{G}^{(m)}$. Учитывая механический смысл функций $f_3(y)$ и $f_4(\hat{x})$ и требуя ограниченности энергии всей системы, приходим к выводу, что в уравнении (3.9) следует учитывать только вещественный корень $\gamma_0 = 1$ и счетное множество комплексных корней [2, 9] γ_k . Естественно, должно выполняться условие $\text{Re}\gamma_k > 0$.

Перейдем к рассмотрению особенности, возникающей во внутренней угловой точке области и влияющей на концентрацию напряжений в ее окрестности на границе раздела сред. Параметр α , характеризующий особенность во внутренней угловой точке области, определяется из условия существования нетривиального решения

Таблица 1

Группа	Материалы	D^*	G_*	α
1	Кварц плавленный–магний	0.046	1.172	0.971
	Кварц плавленный–олово	0.022	0.551	0.984
	Вольфрам–алюминий	0.267	5.642	0.820
	Стекло–свинец	0.279	0.603	0.865
	Латунь–молибден	0.111	0.612	0.948
	Никель–золото	0.159	0.808	0.934
	Титан–магний	0.122	2.399	0.941
2	Алюминий–сталь	0.140	0.374	0.937
	Магний–медь	0.114	0.276	0.942
	Магний–цинк	0.083	0.388	0.969
	Магний–платина	0.173	0.132	0.921
3	Цинк–платина	-0.04	0.391	1.000
	Сталь–сталь	0	1	1
	Алюминий–алюминий	0	1	1

первых четырех уравнений системы (3.8). Данная система симметрична относительно упругих параметров областей $G^{(m)}$ и не будет изменяться при замене значения $N_{11}^{(1)}$ на $N_{11}^{(2)}$ и наоборот. Это легко доказать, если после этой замены в определителе этой системы поменять местами третью и четвертую строку, а затем третий и четвертый столбец.

Прежде всего остановимся на исследовании весьма интересного вопроса зависимости параметра α от упругих постоянных стыкуемых областей. Следует отметить, что в статическом случае подобное исследование проведено ранее [10] и указано, что поле напряжений должно зависеть от упругих постоянных через посредство лишь двух параметров, введенных Дандерсом,

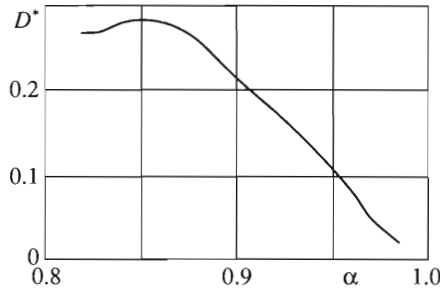
$$\alpha^* = \frac{\alpha_-}{\alpha_+}, \quad \beta^* = \frac{\alpha_- - (\mu^{(2)} - \mu^{(1)})/2}{\alpha_+}; \quad \alpha_{\pm} = \mu^{(2)}(1 - \nu^{(1)}) \pm \mu^{(1)}(1 - \nu^{(2)})$$

Если параметр Дандерса $D^* = \alpha^*(\alpha^* - 2\beta^*)$ неотрицателен, в угловых точках возникает локальная особенность по напряжениям. Если $D^* < 0$, особенности нет. В процессе проведения анализа были подсчитаны значения параметра Дандерса для большинства сочетаний известных материалов и выделены пары материалов-концентраторов напряжений.

Проведем исследование зависимости $\alpha = \alpha(D^*)$ для трех комбинаций материалов стыкуемых областей. В первую группу пар материалов включим материалы-концентраторы, которые характеризуются возникновением локальных особенностей в значениях напряжений в угловых точках. Во вторую группу включим материалы, на границе раздела которых возникают волны Стоунли [3]. Наконец, в третью группу отнесем пары материалов, не входящие в первые две группы, в том числе пары, состоящие из одинаковых материалов (назовем эти пары "обычными").

В табл. 1 для всех трех групп пар материалов приведены значения наименьших положительных корней α , полученных из условия существования нетривиального решения первых четырех уравнений системы (3.8). На первом месте в паре стоит материал внутренней области, на втором – материал наплавки. Для каждой пары вычислен параметр G_* , определяющий отношение волновых сопротивлений материалов [7] областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, а также параметр Дандерса D^* , что позволяет судить о величине локальной особенности по напряжениям в стыковой точке А.

Численный анализ определителя системы и данные табл. 1 показали, что для материалов-концентраторов существуют только действительные корни $0 < \alpha < 1$. Сле-



Фиг. 1

дует отметить, что зависимость значения параметра особенности α от параметра Дандерса D^* и от соотношения между упругими постоянными материалов областей $G^{(m)}$ достаточно сложна. Однако при численном анализе удалось установить, что: 1) при фиксированных упругих параметрах одной из областей уменьшение жесткости другой ведет к увеличению значения α ; 2) зависимость $\alpha = \alpha(D^*)$ носит более сложный характер: при одном и том же значении параметра Дандерса D^* могут существовать различные значения исследуемого корня $0 < \alpha < 1$; это иллюстрируется фиг. 1, где представлена указанная зависимость.

4. Численный анализ. Применяя для решения системы (3.2) метод Бубнова и переразлагая гиперболические и тригонометрические функции, входящие в выражения для операторов M_{k1}, L_{kr} из этой системы, по функциям

$$\cos \alpha_k(y - \eta), \quad \sin \alpha_k(y - \eta), \quad \cos \beta_j(x - \delta), \quad \cos \chi_j(\hat{x} - \delta_2)$$

из граничных условий (3.1) получим бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов Фурье $f_{10}, f_{1k}, \dots, f_{4j}, \varphi_{1k}$. Проведенный асимптотический анализ позволяет свести эту систему к конечной, поскольку при больших j и k можно заменить коэффициенты Фурье их асимптотикой, определяемой значениями параметров особенностей волнового поля в точках A и B . Для интегрального описания особенностей краевой моды и всего спектра собственных частот целесообразно провести сравнительный анализ энергетической характеристики – средней за период накопленной в упругой области (или ее элементе) энергии E [1–4]. Представляющая интерес часть области сечения, расположенная в первой четверти, разбивается на вертикальные участки и для каждого из них вычисляется значение накопленной энергии. Отношение ее к полной энергии, вычисленное для каждого участка разбиения и выраженное в процентах, характеризует распределение энергии по сечению призмы.

Основной вывод проведенного численного анализа спектра собственных частот заключается в том, что колебания области, составленной из материалов-концентраторов, при малых значениях δ_2 сопровождаются более ярко выраженной “краевой” природой по сравнению с материалами второй группы. По-видимому, это можно объяснить близостью границы раздела сред, где появляется концентрация напряжений. При увеличении параметра δ_2 эффекты, характерные для явления краевого резонанса [3], проявляются все менее заметно. В то же время увеличение параметра δ_2 примерно до значений δ лишь несколько усиливает эффекты “граничного” резонанса [5] на границе раздела для материалов-концентраторов. Это иллюстрируется данными, представленными в верхней части табл. 2, для области, составленной из материалов титан–магний, со значениями параметров $L = 1, \delta = 0.5, \delta_2 = 0.5$. Частоте краевого резонанса соответствует третья строка таблицы. В нижней части табл. 2 представлены данные для

Таблица 2

$\Omega^{(1)}$	E	x/δ				\hat{x}/δ_2	
		0.0–0.2	0.2–0.4	0.6–0.8	0.8–1.0	0.0–0.2	0.8–1.0
Титан–магний							
0.192	0.084	9.1	10.4	8.8	12.1	10.6	9.5
0.269	1.112	10.1	8.0	7.3	12.3	11.9	9.0
0.543	26.230	9.6	7.4	7.8	16.7	17.3	31.2
Медь–серебро							
0.185	0.078	7.3	8.1	6.6	10.3	21.8	9.3
0.241	1.154	8.4	6.6	5.1	9.1	20.6	9.1
0.645	6.238	7.2	6.8	6.3	11.1	21.3	14.6

области, составленной из пары материалов медь–серебро, не являющихся концентраторами, с теми же геометрическими параметрами.

С дальнейшим увеличением размеров внешних областей признаки краевого резонанса исчезают практически для любых сочетаний материалов.

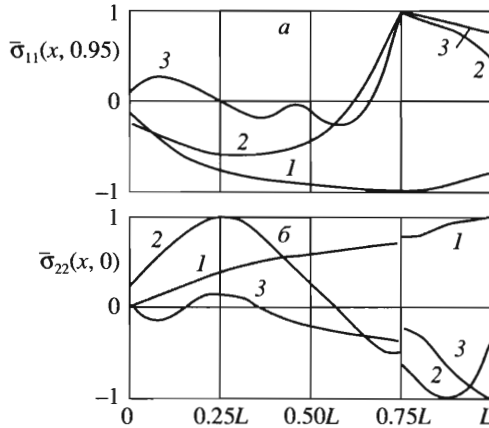
При исследовании характеристик волнового поля в окрестности границы раздела областей погрешность выполнения условий сопряжения по перемещениям не превышала 2%, а по напряжениям – 5–6%. В случае наличия особенности в точке A ряды по напряжениям при $x = \delta$ расходятся, и для удовлетворения условиям сопряжения на всем отрезке $|y| \leq \eta$ необходимы выделение особенности и привлечение обобщенных методов суммирования и регуляризации [11].

Рассмотрим распределение нормированных, т.е. отнесенных к максимальным величинам, компонент тензора напряжений для разных сочетаний пар материалов-концентраторов для первой, второй и третьей собственных частот. Следует отметить, что при численном анализе важно учитывать не только упругие параметры пар материалов, но и акустические сопротивления контактирующих сред. Как было отмечено ранее [7], при анализе особенностей волнового поля в бесконечном составном волноводе в случае различных соотношений акустических сопротивлений материалов областей $G^{(m)}$ наблюдается различная степень эффективности отражения волнового поля от границы раздела. При сочетаниях пар материалов, соответствующих случаю $G_* > 1$, наблюдается локализация напряжений во внутренней угловой точке области.

На фиг. 2, *a* представлено распределение нормированного напряжения $\bar{\sigma}_{11}(x, 0.95)$ для пары концентраторов цинк–золото при $L = a/b = 2.25$, что соответствует середине плато в спектре собственных частот [3]. Около кривых указаны номера собственных частот. Третья собственная частота представляет собой частоту краевого резонанса: в соответствующей ей форме зона больших напряжений сосредоточена во внутренней угловой точке области и вблизи торцов прямоугольника. При удалении от границы раздела величина напряжений резко падает.

На фиг. 2, *б* представлено распределение вдоль оси $y = 0$ нормированного напряжения $\bar{\sigma}_{22}(x, 0)$ для той же пары материалов и тех же геометрических размеров области. В этом случае вновь наблюдается зона относительно больших напряжений во внутренней угловой точке области, а вдоль границы локализации нет. Кроме того, на границе раздела областей собственные формы претерпевают скачкообразный разрыв, что в принципе согласуется с выводами В.П. Плевако [12].

При сочетании пар материалов-концентраторов, соответствующих величине $G_* < 1$ (внутренняя область более жесткая), имеем качественно иную картину в распределении напряжений. Очевидно, что распределение энергии зависит не только от сочетания материалов, составляющих область, но и от величины частотного параметра



Фиг. 2

ра $\Omega^{(1)} = \omega a / c_S^{(1)}$ ($c_S^{(1)}$ – скорость сдвиговых волн в области $G^{(1)}$). В рассматриваемом случае пар материалов-концентраторов на низких частотах имеем почти равномерное распределение энергии по площади сечения. На частоте краевого резонанса, однако, большая часть накопленной энергии сосредоточена во внешней, менее жесткой области $G^{(2)}$. Наблюдается отсутствие концентрации напряжений как на границе раздела областей, так и вблизи внешних угловых точек рассматриваемого составного сечения. Однако около $2/3$ накопленной энергии сосредоточено во внешней области $G^{(2)}$, обладающей меньшей жесткостью по сравнению с внутренней. Таким образом, говорить о том, что только параметры Дандерса определяют пары материалов-концентраторов нельзя. Во внутренней угловой точке области возникает концентрация напряжений при определенном сочетании этих материалов. В данном случае внешняя область должна быть более жесткой по сравнению с внутренней.

Интересен также вопрос, связанный с особенностями поведения динамических характеристик для пар материалов, для которых возможно возникновение волн Стоунли. И в этом случае важное значение имеет определенное сочетание таких материалов. Результаты проведенного анализа для пар материалов второй группы показали, что возникновение на границе раздела двух сред волн типа волн Стоунли возможно лишь в случае, когда для материалов, составляющих области, жесткость $G_* < 1$. В этом случае наблюдается резко выраженная локализация напряжений вдоль границы раздела. Во внутренней угловой точке областей также существует особенность, что подтверждается численным анализом характеристического уравнения системы (3.8) для пар материалов с указанными свойствами. Кроме того, имеем скачкообразный разрыв в напряжениях $\bar{\sigma}_{22}(\delta, y)$ на границе раздела. Что касается количества запасенной энергии, то около $3/4$ ее сосредоточено во внешней, более “жесткой” области. Это подтверждает ранее сделанные выводы о том, что для таких сред присутствуют признаки краевого резонанса [13], которые, однако, выражены не так ярко, как в случае однородной области. Внутренняя, более “мягкая” область воспринимает около $1/4$ запасенной энергии.

Исследование распределения компонента тензора напряжений в окрестности границы $x = \delta$ с параметром жесткости $G_* > 1$ показало для таких материалов отсутствие локализации напряжений вдоль границы раздела сред и в угловой точке A . При указанном сочетании материалов около $3/4$ запасенной энергии сосредоточено во внутренней, более “жесткой” области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вовк Л.П.* Асимптотическое исследование собственных колебаний неоднородного прямоугольника с внутренним отверстием // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2001. № 1. С. 29–33.
2. *Белоконь А.В., Вовк Л.П.* Об установившихся колебаниях электроупругой пластины переменной толщины // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 5. С. 93–97.
3. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
4. *Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н., Гринченко В.Т.* Динамика упругих тел. Киев: Наук. думка, 1986. 288 с. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 5).
5. *Гетман И.П., Лисицкий О.Н.* Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1044–1048.
6. *Гетман И.П., Лисицкий О.Н.* Об отражении изгибных волн Лэмба от границы раздела двух состыкованных полуполос // Прикл. механика. 1991. Т. 27. №8. С.54–59.
7. *Гринченко В.Т., Городецкая Н.С.* Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе // Прикл. механика. 1985. Т. 21. №5. С.121–125.
8. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
9. *Вовк Л.П.* Симметричные колебания электроупругой пластины // Изв. Сев.-Кавказ. Науч. Центра высшей школы. 1982. № 3. С. 42–45.
10. *Vogy D.V.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. V. 38. № 2. P. 171–180 = Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1971. Т. 38. № 2. С. 87–96.
11. *Пельц С.П., Шихман В.М.* О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 4. С. 821–824.
12. *Плевако В.П.* Распределение напряжений в зоне скачкообразного изменения упругих свойств неоднородного материала // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 760–764.
13. *Вовк Л.П., Лупаренко Е.В.* Об установившихся колебаниях анизотропных неоднородных прямоугольных областей // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Днепропетровск. 2001. № 2(13). С. 28–33.

Ростов-на-Дону
e-mail: bsobol@dstu.edu.ru
vovklp@ukrtop.com

Поступила в редакцию
11.IX.2003