

УДК 539.3:629.7

© 2005 г. Г. Е. Якунина

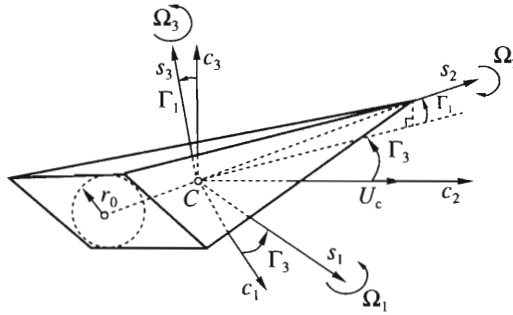
О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПИРАМИДАЛЬНЫХ ТЕЛ

На основе численного решения задачи Коши полной системы уравнений движения тела исследуется трехмерное инерционное движение пирамидальных, оптимальных по глубине проникания тел, сформированных из участков плоскостей, касательных к круговому конусу, и имеющих основание в виде ромба или звезды, состоящей из четырех симметричных циклов. Предполагается, что силовое воздействие среды на тело можно описать в рамках локальной модели, когда давление на поверхности тела представляется двучленной формулой, квадратичной по скорости, а трение постоянно. Показано, что критерий устойчивости, найденный ранее для прямолинейного движения пирамидального тела в предположении, что возмущенное движение тела плоское, позволяет и в случае произвольного задания малых возмущений параметров, ведущих к пространственному движению тела, определить характер их развития. Показано, что если прямолинейное движение тела устойчиво, то его возмущенное пространственное движение можно представить в виде суперпозиции плоских движений и при исследовании каждого из них использовать найденное ранее аналитическое решение плоской задачи.

Точные решения задач оптимизации формы тела (по сопротивлению и по глубине проникания) в рамках модели локального взаимодействия (МЛВ) были получены [1–4] при заданной длине и площади основания тела без упрощающих предположений относительно его геометрии. Был предложен [1–4] метод построения оптимальных форм, позволяющий конструировать бесконечное множество оптимальных конфигураций, которые все при одинаковых условиях погружения в среду имеют одинаковое сопротивление и обеспечивают одну и ту же глубину проникания.

Оптимизация форм [1–4] проводилась при прямолинейном движении тела. Движение тела в среде может быть возмущенным, и тогда, как показывают результаты экспериментальных и теоретических исследований [5–9], особенности формы тела оказывают существенное влияние на развитие возмущений и характер движения тела. При неустойчивом движении скорость центра масс тела может сильно отклоняться от своего начального направления, а траектория движения иметь изогнутый вид. Рост возмущений может привести к опрокидыванию тела, и тогда достижение теоретически предсказываемой глубины проникания невозможно. Таким образом, изучение влияний возмущений на характеристики движения оптимальных форм и проведение классификации форм по устойчивости движения являются важными этапами исследования свойств оптимальных тел.

В случае плоского движения в рамках модели, когда давление на поверхности тела представляется двучленной формулой, квадратичной по скорости, а трение постоянно, такое исследование было проведено [9] для пирамидальных тел, сформированных из участков плоскостей, касательных к круговому конусу. Известно [1–4], что если конус имеет оптимальный угол раствора, то такие конфигурации относятся к классу оптимальных. При безотрывном обтекании тел и малых возмущениях, наложенных в начальный момент времени на параметры прямолинейного движения, было построено [9] аналитическое решение задачи плоского движения тонких тел, контур основания которых ромб или звезда, состоящая из четырех симметричных циклов. Был найден критерий устойчивости движения, позволяющий при извест-



Фиг. 1

ных скорости, массе и положению центра тяжести тела определить характер возмущенного движения пирамидального тела.

В общем случае движение тела в среде трехмерное, и проблема устойчивости движения пирамидального тела при пространственном развитии возмущений, наложенных в начальный момент времени на параметры прямолинейного движения, остается актуальной. Ниже она исследуется в рамках МЛВ на основе численного решения задачи Коши полной системы уравнений движения тела.

1. Модель силового воздействия на тело. Рассматривается пространственное инерционное движение пирамидального тела, сформированного из участков плоскостей, касательных к круговому конусу, и имеющего основание в виде ромба или звезды, состоящей из четырех симметричных циклов. Пример ромбовидной конфигурации дан на фиг. 1. Звездообразное тело строится из участков поверхностей двух ромбовидных форм, повернутых относительно друг друга вокруг продольной оси на 90° .

Предполагаем, что в начальный момент времени тело полностью погружено в среду и в процессе движения не деформируется. Считаем, что влиянием свободной поверхности среды, как и влиянием силы тяжести, на движение тела можно пренебречь.

Силу воздействия среды на тело запишем в виде

$$\mathbf{F} = \iint_S [\sigma_n \mathbf{n} + \sigma_\tau \boldsymbol{\tau}] dS \tag{1.1}$$

где σ_n и σ_τ – нормальное и касательное напряжения на поверхности тела, \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные векторы внутренней нормали и касательной к элементу поверхности, а интегрирование ведется по поверхности контакта среды и тела S .

Взаимодействие тела и среды, как и в случае плоского движения [9], будем рассматривать в рамках локальной модели, предполагая, что каждый элемент поверхности S взаимодействует со средой независимо от других участков тела. Для записи нормального напряжения используем двучленную формулу, содержащую динамический и прочностной члены, а трение на поверхности тела считаем постоянным:

$$\sigma_n = A_1 (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})^2 + C_1, \quad \sigma_\tau = C_2 \tag{1.2}$$

Положительные коэффициенты A_1 , C_1 и C_2 – постоянные параметры модели, определяемые характеристиками среды, \mathbf{U} – полная скорость элемента поверхности: $\mathbf{U} = \mathbf{U}_c + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$, где \mathbf{U}_c – скорость центра масс тела, $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость вращения тела, \mathbf{r} – радиус – вектор элемента с началом в центре масс.

Было показано [10], что при определенных допущениях выражениями (1.2) описываются напряжения на поверхности тела при его движении в газе и плотных средах типа

грунтов и металлов. Слагаемое C_1 в этом случае характеризует сопротивляемость среды деформированию, а коэффициент A_1 имеет порядок плотности среды. Модель с постоянным трением (1.2) часто используется при расчете сил, действующих на тело, проникающее в упругопластические среды (см., например [7, 8]), и тогда $C_2 = \tau_s$, где τ_s – пластическое трение. Для конкретных сред значения A_1 , C_1 и C_2 берутся либо из решения модельных задач [11, 12], либо определяются экспериментально. Например, для глинистых сред, согласно решению, полученному для несжимаемой упругопластической среды [12], можно принять

$$A_1 = 3\rho_0/2, \quad C_1 = 5\tau_s(1 + \ln(\mu/\tau_s))/3, \quad C_2 = \tau_s \quad (1.3)$$

где ρ_0 – плотность среды, μ – модуль сдвига.

В рамках МЛВ вектор $\boldsymbol{\tau}$ компланарен векторам \mathbf{U} и \mathbf{n} :

$$\boldsymbol{\tau} = [(\mathbf{U} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] / [|\mathbf{U} \times \mathbf{n}|] \quad (1.4)$$

а поверхность S определяется условием

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \leq 0 \quad (1.5)$$

где \mathbf{u} – единичный вектор скорости элемента поверхности: $\mathbf{u} = \mathbf{U}/|\mathbf{U}|$.

2. Свойства оптимальных пирамидальных тел. Выбранная модель позволяет представить силу \mathbf{F} (1.1) в явной зависимости от формы тела и параметров движения, куда характеристики среды входят как константы. Это свойство – общее для всех локальных моделей, и оно было использовано при решении задач оптимизации формы тела по сопротивлению [1, 2, 4] и глубине проникания [3], когда сопротивление и глубина проникания представляются в виде функционалов, явно зависящих от формы тела.

При прямолинейном движении тела, имеющего заданную площадь основания S_b , в рамках модели (1.2)–(1.5) для сопротивления тела F_d , $F_d = -(\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}_2)$, \mathbf{s}_2 – единичный вектор продольной оси тела, направленный в сторону движения (см. фиг. 1), можно записать оценку [1]

$$F_d \geq F^* = A_1 U_0^2 S_b f(\alpha^*) \quad (2.1)$$

Здесь U_0 – скорость движения тела, а α^* – значение $\alpha = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_2) \in [0, 1]$, при котором функция действительного переменного

$$f(\alpha) = \alpha^2(1 + D_0); \quad D_0 = (C_1 + C_2(1 - \alpha^2)^{1/2}) / (A_1 U_0^2 \alpha^2) \quad (2.2)$$

достигает минимума. Минимальное значение F_d , равное F^* , имеют тела, в каждой точке поверхности которых $\alpha = \alpha^*$. При прямолинейном движении $\mathbf{s}_2 = \mathbf{u}$, и, следовательно, форма таких тел образуется участками поверхностей, нормаль которых составляет с направлением движения постоянный оптимальный угол.

Было показано [3], что аналогичным способом формируются тела, проникающие в среду с начальной скоростью U_0 и обеспечивающие при заданных массе m и площади основания S_b максимальную глубину проникания. В рамках модели (1.2)–(1.5) для тел максимальной глубины проникания оптимальное значение α^* находится как значение $\alpha \in [0, 1]$, при котором функция

$$h(\alpha) = \ln(1 + 1/D_0)/\alpha^2 \quad (2.3)$$

достигает максимума.

Функции $f(\alpha)$ и $h(\alpha)$ не зависят от величин S_b и m , и значения α^* для них определяются характеристиками среды и начальной скоростью движения U_0 . В общем случае значения α^* для функций $f(\alpha)$ и $h(\alpha)$ разные. Так, например, если для модели (1.2) с параметрами (1.3) рассмотреть среду с $\rho_0 = 1500 \text{ кг/м}^3$, $\tau_s = 1 \text{ МПа}$, и считать $C_1 = 5\tau_s$, что по порядку величин соответствует параметрам грунта средней прочности, то при $U_0 =$

= 600 м/с экстремумы функций $f(\alpha)$ и $h(\alpha)$ достигаются при $\alpha^* = 0.085$ и $\alpha^* = 0.115$ соответственно.

Простейшее оптимальное тело – круговой конус, половина угла раствора которого $\beta^* = \arcsin(\alpha^*)$. Метод построения оптимальных форм [1–4] позволяет конструировать бесконечное множество оптимальных конфигураций, в том числе пирамидальных, составленных из участков плоскостей, касательных к оптимальному конусу. Например, тело, изображенное на фиг. 1, принадлежит классу оптимальных, если стороны ромба, образующие контур его основания, касаются окружности с радиусом $r_0 = L \operatorname{tg} \beta^*$, где L – длина тела.

При заданных значениях S_b и m , используя параметры пирамидального тела, выражение для максимальной глубины проникания H^* [3] можно записать в виде

$$H^* = h(\alpha^*)L/(2A_m), \quad A_m = 3A_1/\rho_m \quad (2.4)$$

где ρ_m – средняя плотность тела: $\rho_m = m/V$, $V = LS_b/3$ – объем тела.

Решения задач оптимизации формы тела были получены [1–4] для прямолинейного движения тела. Движение тела в среде может быть возмущенным, и тогда оптимальные значения F^* (2.1) и H^* (2.4) могут быть достигнуты лишь когда движение тела устойчиво, и малые возмущения, наложенные в начальный момент времени на параметры прямолинейного движения, затухают со временем.

В случае плоского движения в предположении, что тела тонкие

$$\beta^2 \ll 1, \quad \beta = (S_b/\pi)^{1/2}/L \quad (2.5)$$

и нет отрыва среды от поверхности тела, был найден [9] критерий устойчивости прямолинейного движения пирамидальных тел, контур основания которых ромб или звезда, состоящая из четырех симметричных циклов. При значениях D_0 (см. второе выражение (2.2)) меньших или порядка единицы этот критерий можно записать в двух эквивалентных формах

$$A_m > A_f, \quad A_f = (18/P_f)(C_m - 2(1 + \alpha^2/P_f)/3) \quad (2.6)$$

$$z_y = C_k - C_m > 0, \quad C_k = A_m P_f / 18 + 2(1 + \alpha^2/P_f)/3 \quad (2.7)$$

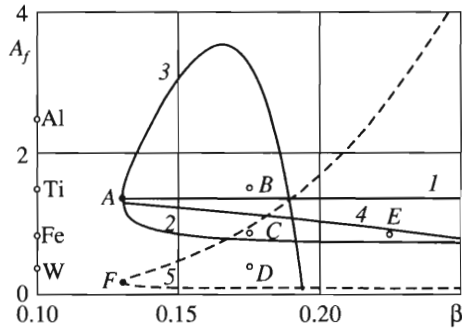
Здесь z_y – запас устойчивости тела, C_m – расстояние от вершины тела до его центра масс, C_k – расстояние от вершины тела до критического положения центра масс, при котором произойдет потеря устойчивости. Параметр P_f – параметр формы, причем для звездообразных тел $P_f = 1$, а для ромбовидных $P_f = P$, где P определяется выражением

$$P = P_{1,2} = 1 \pm (1 - b^2)^{1/2} \quad (2.8)$$

$$b = (R_1/R_k)^2; \quad R_1 = \alpha/\beta, \quad R_k = \pi^{1/2}/2 \approx 0.89$$

При $b < 1$ ($R_1 < R_k$) есть два значения P : $P_1 \in [1, 2)$ и $P_2 \in (0, 1]$, причем $P_f = P_1$, если центр масс тела движется в плоскости симметрии тела, где лежит вершина ромба с меньшим радиусом, и $P_f = P_2$, если центр масс тела движется в плоскости, где лежит вершина ромба с большим радиусом. В первом случае ромбовидная форма называлась [9] горизонтальной, а во втором – вертикальной.

Значение A_f , входящее в условие (2.6), через параметры α , β и C_m зависит от формы тела и положения центра масс. Для пирамидальных тел с равномерным распределением массы по объему $C_m = 3/4$. При $\alpha = \alpha^* = 0.115$ неравенство (2.6) является критерием устойчивости движения оптимального тела, обеспечивающего при пря-



Фиг. 2

молинейном движении и указанных выше условиях максимум глубине проникания. Для однородных оптимальных по глубине проникания тел значения A_f в зависимости от β представлены на фиг. 2 для звездообразного тела (кривая 1) и для горизонтальной (кривая 2) и вертикальной (кривая 3) ромбовидных форм. Все кривые выходят из точки А, которая соответствует значению $b = 1$, когда контур основания – квадрат, и все тела имеют одинаковую геометрию: $P_f = 1$.

Для тонких тел (2.5) величина β – половина угла раствора кругового конуса, эквивалентного пирамидальным телам по длине и площади основания. Для конуса параметр $P_f = 1$, и было показано [9], что если в формулах (2.6) и (2.7) положить $\alpha = \beta$, то неравенства (2.6) и (2.7) будут определять условия устойчивого движения конуса. Значения A_f , соответствующие однородному конусу, представлены на фиг. 2 кривой 4.

Свойства среды влияют на устойчивость движения тела только через параметр A_1 , входящий в выражение для A_m (2.4). Значения A_m , рассчитанные с использованием формул (1.3) и (2.4) при $\rho_0 = 1500 \text{ кг/м}^3$, отмечены на фиг. 2 на оси ординат точками, каждая из которых соответствует однородному телу, изготовленному из следующих материалов: Al – алюминия ($A_m = 2.5$), Ti – титана ($A_m = 1.5$), Fe – стали ($A_m = 0.85$) и W – вольфрама ($A_m = 0.38$).

Из анализа фиг. 2, в согласии с условием (2.6), в частности, следует, что при фиксированных C_m и α характер движения звездообразных тел (см. кривую 1) не зависит от β : $A_f = \text{const}$ ($A_f = 1.34$ при $C_m = 3/4$ и $\alpha = 0.115$), тогда как на характер движения конуса и ромбовидных тел величина β оказывает существенное влияние. Можно увидеть, что при $A_m < 3.5$ есть значения β , при которых движение одной из ромбовидных форм устойчиво, а другой нет.

В общем случае возмущенное движение тела в среде трехмерное, и вопрос устойчивости движения пирамидального тела при пространственном развитии возмущений, наложенных в начальный момент времени на параметры прямолинейного движения, исследуется ниже на основе численного решения задачи Коши полной системы уравнений движения.

3. Уравнения и параметры пространственного движения тела. Система уравнений пространственного движения твердого тела состоит из кинематических и динамических уравнений движения. Последние можно представить в векторной форме через производные по времени от векторов импульса и момента импульса тела (см., например [13]):

$$m dU_c/dt = F, \quad dK/dt = M \quad (3.1)$$

где $K = J\Omega$, J – тензор инерции тела, M – момент сил, действующих на тело, который, как и сила F , вычисляется по модели (1.2)–(1.5).

Скалярная форма записи уравнений (3.1) зависит от выбора системы координат и набора кинематических параметров, определяющих движение тела. При исследовании пространственной динамики пирамидальных тел, согласно традициям, принятым в аэродинамике [13], использовались четыре правые декартовы системы координат, начала которых в начальный момент времени совмещались с центром масс тела C : неподвижная, траекторная, скоростная и связанная. Считалось, что орты s_1, s_2, s_3 связанной системы координат $Cs_1s_2s_3$ направлены по главным осям инерции тела, причем ось Cs_2 направлена по его продольной оси в сторону движения тела (см. фиг. 1).

При невозмущенном движении тела направления соответствующих осей всех четырех систем координат совпадают, и вектор скорости центра масс U_c направлен по оси OY неподвижной системы координат $OXYZ$.

Возмущенное движение тела, как это принято в аэродинамике [13], будем характеризовать следующим набором кинематических параметров: углами атаки Γ_1 , крена скорости Γ_2 и скольжения Γ_3 и угловыми скоростями вращения по тангажу Ω_1 , крену Ω_2 и рысканью Ω_3 . Углы атаки Γ_1 и скольжения Γ_3 задают ориентацию осей скоростной системы координат $Cc_1c_2c_3$ относительно связанной системы (фиг. 1), и характер развития возмущений по этим углам определяет тип движения тела. Угол крена скорости Γ_2 задает угол поворота траекторной системы координат относительно оси Cc_2 , при котором траекторная система переходит в скоростную.

Для кинематических параметров Γ_i и Ω_i ($i = 1, 2, 3$) существуют уравнения связи (см. [13]), которые совместно с кинематическим уравнением поступательного движения тела: $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{U}_c$, где \mathbf{R} – вектор положения центра масс тела относительно неподвижной системы координат, и динамическими уравнениями (3.1) образуют замкнутую систему уравнений. Система состоит из двенадцати уравнений, и ее интегрирование при произвольном задании начальных значений параметров можно выполнить только численно.

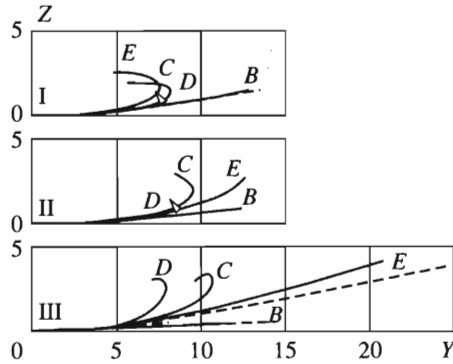
Программа численного решения задачи Коши полной системы уравнений движения, основанного на методе Рунге – Кутты четвертого порядка, была написана, и расчеты, полученные по ней, используются ниже для изучения особенностей пространственного движения пирамидального тела.

4. Особенности пространственного движения пирамидальных тел. Без ограничения общности считаем, что в начальный момент времени положения трех систем координат: неподвижной, траекторной и скоростной, совпадают, и вектор скорости центра масс U_c направлен по оси OY .

Численные расчеты, результаты которых обсуждаются ниже, проводились для среды с параметрами, указанными в разд. 2, при начальной скорости движения тела $U_0 = 600$ м/с. В этом случае максимум функции $h(\alpha)$ (2.3) достигается при $\alpha = 0.115$, и оптимальные по глубине проникания пирамидальные тела строятся из участков плоскостей, касательных к конусу с углом раствора 13° . Для таких тел с равномерным распределением массы по объему ниже даны результаты счета.

При описании результатов решения задачи будем использовать безразмерные величины γ_i и ω_i : $\gamma_i = \Gamma_i/\beta$, $\omega_i = \Omega_i L/(U_0 \beta)$, где $i = 1, 2, 3$, и считать, что все линейные размеры отнесены к длине тела L . Набором параметров $\gamma_i = \omega_i = 0$ при ненулевых значениях одной из пар: (γ_1, ω_1) или (γ_3, γ_3) , описывается плоское движение тела, устойчивость которого при безотрывном обтекании определяется условиями (2.6) и (2.7).

Численное моделирование пространственного движения тела проводилось при произвольных начальных значениях γ_i и ω_i . Однако при исследовании устойчивости прямолинейного движения оптимального пирамидального тела и для возможности сопоставления результатов исследования с полученными ранее аналитическими результатами [9] начальные возмущения по γ_i и ω_i брались такими, чтобы в начальный момент времени не было зон отрыва среды от поверхности тела.



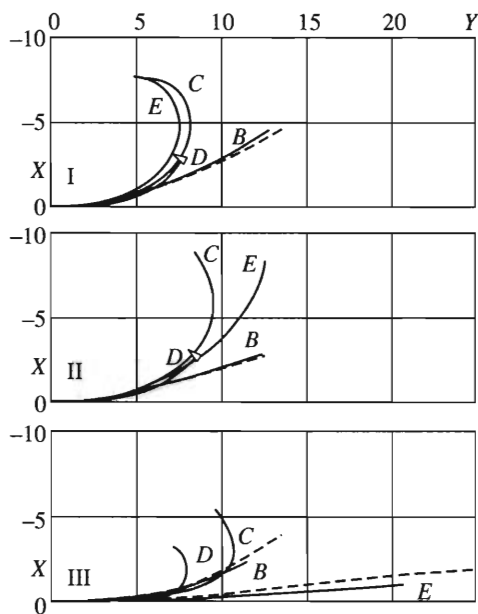
Фиг. 3

Особое внимание при проведении расчетов уделялось области параметров пирамидального тела, в которой устойчивость плоского движения ромбовидного тела зависела от плоскости движения. Так, например, в этой области в плоскости параметров (β, A_m) лежат точки B и C на фиг. 2, ординаты которых соответствуют значениям A_m однородных тел, изготовленных из титана и стали. Согласно критерию устойчивости (2.6), движение горизонтальной ромбовидной формы (см. кривую 2 на фиг. 2) с параметрами β и A_m , соответствующим точкам B и C , устойчиво, а движение вертикальной формы (см. кривую 3) – нет. Заметим, что точка B лежит выше, а точка C ниже кривых 1 и 4, построенных для значений A_f однородных звездообразных тел (кривая 1) и круговых конусов (кривая 4), эквивалентных пирамидальным телам по массе, длине и площади основания. В согласии с условием (2.6) плоское движение этих тел в первом случае устойчиво, а во втором – нет. Также в согласии с условием (2.6) получаем, что движение всех пирамидальных конфигураций из вольфрама с параметрами β и A_m , отмеченными точкой D на фиг. 2, неустойчиво, тогда как при параметрах, соответствующих точке E (конфигурации из стали), движение ромбовидных форм устойчиво, а движение конуса и звездообразного тела нет.

При значениях β и A_m , соответствующих на фиг. 2 точкам B, C, D и E , были проведены расчеты, моделирующие пространственное движение тел. Начальные возмущения по углу скольжения брались в три раза большими, чем по углу атаки: $\gamma_1 = 0.1$, $\gamma_3 = 0.3$, а возмущения по угловым скоростям были следующими: $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0.3$.

Найденные в результате счета траектории движения центра масс тел изображены на фиг. 3–5 в проекциях на плоскости неподвижной системы координат $OXYZ$ в виде наборов I, II и III сплошных линий B, C, D и E . Наборы построены для траекторий центра масс звездообразных тел (набор I), конуса (набор II) и ромбовидных форм (набор III) при значениях параметров β и A_m , соответствующих точкам B, C, D и E на фиг. 2.

Типы пространственных движений звездообразных тел и конусов точно соответствовали типам движений, описанным выше для них в согласии с критерием устойчивости плоского движения (2.6). При неустойчивом движении начальные возмущения по γ_i и ω_i росли со временем, что вело к отклонению вектора U_c от его начального направления и к искривлению траектории движения центра масс (см. кривые C, D, E для наборов I и II). Отметим, что запас устойчивости z_γ (2.7) звездообразного тела меньше, чем запас устойчивости эквивалентного конуса, и траектории центра масс звездообразных тел искривлялись сильнее, чем траектории конуса. Рост возмущений по γ_i и ω_i для вольфрамовых конфигураций привел к их опрокидыванию (см. кривые D), причем звездообразное тело опрокинулось раньше, чем конус. Сами тела схематично показаны на фиг. 3 и 4 в момент опрокидывания. При устойчивом движении возмущения по



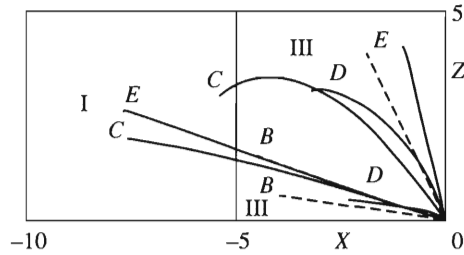
Фиг. 4

γ_i и ω_i затухали со временем, и угол отклонения вектора U_c от начального направления выходил на асимптоту, определяющую новое направление прямолинейного движения тела. При плоском движении направление асимптоты находится из аналитического решения [9].

Было проведено сравнение полученных результатов с результатами плоского движения тела, при котором в качестве начальных значений (γ_0, ω_0) для аналитического решения [9] брались значения пар $(\gamma_1, \omega_1) = (0.1, 0.1)$ и $(\gamma_3, \omega_3) = (0.3, 0.3)$. При этом $(\gamma_0, \omega_0) = (\gamma_1, \omega_1)$ при построении аналитической траектории в плоскости OYZ (см. штриховые кривые B на фиг. 3), и $(\gamma_0, \omega_0) = (\gamma_3, \omega_3)$ при построении траектории в плоскости OXY (см. штриховые кривые B на фиг. 4). Из сравнения результатов численного и аналитического решения следует, что при устойчивом движении пространственное движение центра масс тела можно представить в виде суперпозиции плоских движений, каждое из которых описывается полученным ранее аналитическим решением плоской задачи.

Проекция траекторий трехмерного движения центра масс оптимальных ромбовидных тел даны на фиг. 3–5 в виде наборов кривых III. В согласии с критерием устойчивости плоского движения (2.6) лишь траектории E на фиг. 3–5 соответствуют движению ромбовидного тела, устойчивому при плоском движении в обеих плоскостях симметрии. Траектории B, C и D построены для случаев, когда в одной или в обеих плоскостях симметрии движение тела неустойчиво. Можно увидеть, что при неустойчивых режимах движения использование оптимальных ромбовидных тел не дает тех преимуществ по отношению к конусам, которые найдены [3] для них при прямолинейном движении. Однако при выборе оптимального тела с параметрами из устойчивой области движения эти преимущества становятся явными (см. кривые E наборов II и III).

Как следует из анализа результатов численного решения, характерной особенностью движения конических и звездообразных тел является то, что независимо от типа движения траектории их центров масс лежат практически в одной плоскости, на-



Фиг. 5

клон которой по отношению к неподвижной системе координат $OXYZ$ определяется начальными значениями γ_i и ω_i (см. набор кривых I на фиг. 5). Отметим, что наклон плоскости можно найти, если использовать аналитическое решение [9] (см. штриховую линию B набора I на фиг. 5) по правилу, описанному выше. Для ромбовидного тела это не так, и в общем случае неустойчивого движения траектории его центра масс являются существенно пространственными (см. кривые B , C и D набора III на фиг. 5). Однако при устойчивом движении траектория ромбовидного тела так же, как у конусов и звездообразных тел, близка к плоской (см. кривую E набора III). В этом в случае для нахождения проекций траектории на плоскости неподвижной системы координат $OXYZ$ можно использовать полученное ранее аналитическое решение плоской задачи [9], результаты которого даны на фиг. 3–5 штриховыми линиями. Несколько большая длина траектории, полученная из аналитического решения, объясняется тем, что при ее вычислении не учитывались возмущения по угловым скоростям, и она равнялась значению H^* (2.4), которое достигается при прямолинейном движении тела.

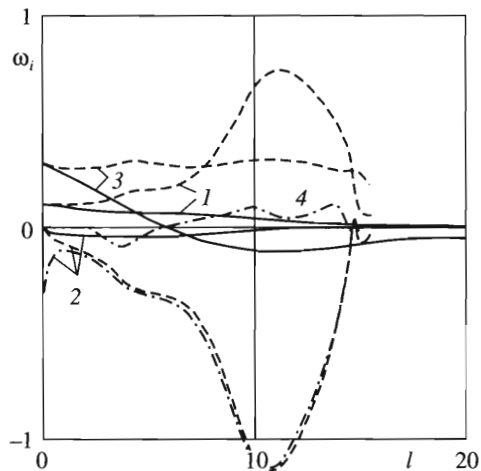
Сравнивая оптимальные звездообразные и ромбовидные формы по запасу устойчивости z_y (2.7), следует иметь в виду, что в общем случае запас устойчивости пирамидальных тел зависит от формы, массы и положения центра тяжести тела (параметров α , β , A_m и C_m). Однако запас устойчивости звездообразных тел не зависит от β , и он всегда меньше, чем запас устойчивости эквивалентного конуса. Запас устойчивости ромбовидных тел существенно зависит от β и при фиксированных значениях α и C_m можно найти область параметров β и A_m , где запасы устойчивости обеих ромбовидных форм будут больше, чем запас устойчивости звездообразного тела. Для значений A_m из этой области, используя соотношения (2.7) и (2.8), можно записать ограничение

$$12\alpha^2/P_1 \leq A_m \leq 12\alpha^2/P_2 \quad (4.1)$$

где P_1 и P_2 – параметры формы ромбовидного тела (2.8).

Для оптимальных тел область значений A_m (4.1) расположена на фиг. 2, правее кривой 5, имеющей две ветви, выходящие из точки F . В результате можно предположить, что при значениях β и A_m из этой области при выборе конфигурации для оптимального тела отдавать предпочтение следует ромбовидной форме. Результаты численного решения задачи пространственной динамики тела находятся в согласии с данным предположением (см. кривые C , D и E в наборах I и III на фиг. 3 и 4).

Численное моделирование трехмерного движения тела, результаты которого обобщались выше, было выполнено при отсутствии начальных возмущений по крену: $\omega_2(0) = 0$. Однако при движении тела вдоль траектории эти возмущения появляются и оказывают влияние на характеристики движения тела. На фиг. 6 кривыми 1–3 даны значения параметров ω_i (значение i соответствует номеру кривой) в зависимости от пройденного пути l для устойчивого (сплошные линии) и неустойчивого (штриховые линии) движений стальных ромбовидных тел, которым в плоскости параметров



Фиг. 6

β и A_m на фиг. 2 соответствуют точки E и C . Отметим, что при прямолинейном движении данные конфигурации при одинаковой длине обеспечивают одинаковую глубину проникания H^* (2.4). Однако характерной особенностью неустойчивого трехмерного движения ромбовидного тела являлось существенное развитие возмущений по крену (см. штриховую кривую 2 на фиг. 6) и, как следствие, их влияние на рост возмущений по тангажу и рысканью. При устойчивом движении появившиеся возмущения быстро затухали и практически не влияли на характеристики движения тела. В результате при устойчивом движении траектория центра масс тела значительно меньше отклонялась от своего начального направления, и ее длина была больше, чем при неустойчивом движении, на величину $\sim 30\%$ (см. кривые C и E в наборах III на фиг. 3 и 4).

Развитие возмущений по крену у звездообразных тел носит иной характер, и для стальной звездообразной формы с параметрами, соответствующими на фиг. 2 точке C , изменение величины ω_2 показано на фиг. 6 штрихпунктирной кривой 4. Характерными особенностями движения звездообразных тел являлись замедленное развитие возмущений по крену и смена знака величины ω_2 во время движения. Эти особенности были причиной того, что траектории звездообразных тел так же, как у конусов, близки к плоским, и что критерий устойчивости, найденный для этих тел в случае плоского движения, остается верным и при пространственном развитии возмущений. Заметим, что аналогичный результат был получен [8] для тонких тел вращения при их безотрывном обтекании и при наличии малой зоны отрыва среды на их поверхности, когда было показано, что критерий устойчивости, найденный для этих тел при плоском движении [7], остается справедливым и в пространственном случае.

Анализ результатов численных расчетов, проведенных при наличии начальных возмущений по крену, когда $\omega_2(0) \neq 0$, показал, что эти возмущения не вносят существенных изменений в общую картину движения пирамидального тела, рассмотренную выше. Величина ω_2 в этом случае быстро выходит на значения, которые она имеет на том же участке пути при $\omega_2(0) = 0$, и, как пример, изменение величины ω_2 в зависимости от пройденного пути при начальном значении $\omega_2(0) = 0.3$ для ромбовидных тел с параметрами, соответствующими точке C на фиг. 2, показано на фиг. 6 штрихпунктирной кривой 2.

5. Заключение. В результате проведенного исследования в рамках модели (1.2)–(1.5) выявлены характерные особенности трехмерного движения оптимальных пирамидальных тел, сформированных из участков плоскостей, касательных к круговому конусу, и

имеющих основание в виде ромба или звезды, состоящей из четырех симметричных циклов. Показано, что критерий устойчивости, найденный ранее [9] для плоского движения пирамидальных тел, позволяет и в случае произвольного задания малых возмущений параметров прямолинейного движения определить характер их развития. При этом для устойчивого движения пирамидального тела при пространственном развитии возмущений необходимо, чтобы критерий устойчивости выполнялся для него по всем плоскостям симметрии. В соответствии с критерием устойчивости определены области параметров, в которых при выборе конфигурации оптимального тела следует отдавать предпочтение звездообразной или ромбовидной форме. Показано, что если прямолинейное движение тела устойчиво, то возмущения по крену не оказывают существенного влияния на характеристики движения тела, и его возмущенное пространственное движение можно представить в виде суперпозиции плоских движений, каждое из которых описывается найденным ранее [9] аналитическим решением плоской задачи. Подтверждено, что при неустойчивом движении использование оптимальных тел не дает тех преимуществ, которые получены для них при прямолинейном движении. Однако для оптимальных пирамидальных тел с параметрами из области устойчивого движения эти преимущества близки к величинам, найденным для них при оптимизации их формы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00771) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-2124.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Якунина Г.Е. Об оптимальных неконических и несимметричных пространственных конфигурациях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 605 – 614 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Под ред. А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 431–442.
2. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным // М.: Янус-К, 2001. 132 с.
3. Якунина Г.Е. О пространственных формах тела с максимальной глубиной проникания в плотные среды // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 6. С. 768–771.
4. Yakunina G. Ye. Three-dimensional bodies of minimum total drag in hypersonic flow // J. Optimiz. Theory and Appl. 2002. V. 115. № 2. P. 241–265.
5. Zukas J. A., Nicholas T., Swift H. F. et al. Impact Dynamics. N. Y.: Wiley, 1982 = Зукас Д. А., Николас Т., Свифт Х. Ф. и др. Динамика удара. М.: Мир, 1985. 296 с.
6. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. Динамика тонких тел в плотных средах в условиях локальной модели взаимодействия // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 1008–1022.
7. Симонов И.В. Об устойчивости движения удлиненного тела вращения в упругопластической среде при отрыве потока // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 311–320.
8. Остапенко К.Ю., Симонов И.В. Модель пространственной динамики тела вращения при взаимодействии с малопрочной средой и несимметричной кавитацией // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 143–153.
9. Якунина Г.Е. Динамика пирамидальных тел в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 1. С. 15–29.
10. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. О форме тонких пространственных тел с максимальной глубиной проникания в плотные среды // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 1018–1034.
11. Сагомонян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
12. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
13. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Наука. Физматлит, 1998. 811 с.