УДК 533.6.011

© 2005 г. А. И. Рылов

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ ЧАПЛЫГИНА В ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

В развитие работы автора [1] на плоскости спидографа построены две эквивалентные однородно-дивергентные системы уравнений, каждая из которых является аналогом уравнений Чаплыгина на плоскости годографа. Каждая из систем сводится к линейному уравнению второго порядка, в одном случае для функции частицы (лагранжевой координаты) ψ, в другом – для времени t. Указанные системы обладают бесконечным числом точных решений. Показано, что каждому из этих решений отвечают однородно-дивергентная система уравнений первого порядка, связанное с ним простейшее нелинейное однородное уравнение второго порядка на модифицированной плоскости событий (ψ, t) и закон сохранения на плоскости событий (x, t). Получены наглядные соотношения между скоростями фронтов постоянных значений вновь построенных зависимых переменных и скоростью звука. Приведенные примеры демонстрируют связь точных решений с однородно-дивергентными уравнениями и законами сохранения одномерной нестационарной газовой динамики и, одновременно, позволяют сравнить вновь полученные результаты (точные решения, уравнения и законы сохранения, соотношения для скоростей фронтов) с известными результатами, в том числе и для плоских стационарных течений. Рассмотрены так называемые дополнительные законы сохранения, на которые в свое время обратил внимание С.К. Годунов.

1. Нестационарный аналог уравнений Чаплыгина. Рассмотрим одномерные нестационарные баротропные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с плоскими волнами. В качестве исходной возьмем систему уравнений на плоскости событий (x, t) [2–4]

$$\rho u_x + u\rho_x + \rho_t = 0, \quad \rho u u_x + a^2\rho_x + \rho u_t = 0 \tag{1.1}$$

Здесь t – время, x – геометрическая координата, u – скорость, ρ – плотность, p – давление, a – скорость звука $\left(a^2 = \dfrac{dp}{d\rho}\right)$.

После перехода на плоскость спидографа (u, υ) система (1.1) перепишется так [2]:

$$at_\upsilon - ut_u + x_u = 0, \quad ut_\upsilon - at_\upsilon - x_\upsilon = 0 \tag{1.2}$$

Функция υ, введенная ранее Риманом, определена следующими эквивалентными равенствами [2, 5]:

$$\upsilon = \int\frac{a}{\rho}d\rho, \quad \frac{d\upsilon}{d\rho} = \frac{a}{\rho}$$

В силу баротропности течения любые три из четырех функций ρ, p, a, υ могут быть выражены через оставшуюся четвертую функцию. В системе (1.2) в качестве таковой используется υ. Для целей дальнейшего исследования более полезными окажутся функции p или $w = \rho^{-1}$ [3, 5].

Для большей наглядности ограничимся случаем политропного газа с показателем адиабаты k; имеем

$$p = \rho^k, \quad a^2 = \frac{dp}{d\rho} = k\frac{p}{\rho} = k\rho^{k-1}, \quad \upsilon = \frac{2a}{k-1}$$

В качестве первого шага для преобразования однородной линейной системы (1.2) в однородно-дивергентную систему вместо координаты x рассмотрим функцию частицы (лагранжеву координату) ψ, определенную стандартным образом [2–5]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \rho, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\rho u, \quad d\psi = \rho dx - \rho u dt$$

В результате система (1.2) перепишется так:

$$\rho a t_\upsilon + \psi_u = 0, \quad \rho a t_u + \psi_\upsilon = 0$$

Дальнейшее упрощение достигается заменой функции υ на p или $w = \rho^{-1}$. В результате в первом случае получаем линейную однородно-дивергентную систему

$$\rho^2 a^2 \frac{\partial t}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial p} = 0 \tag{1.3}$$

и эквивалентное ей линейное однородное уравнение второго порядка для функции ψ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - \rho^2 a^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} = 0 \tag{1.4}$$

Во втором случае имеем систему

$$\rho^2 a^2 \frac{\partial t}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial w} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial w} - \frac{\partial\psi}{\partial u} = 0 \tag{1.5}$$

и уравнение второго порядка для функции t

$$\frac{\partial^2 t}{\partial w^2} - \rho^2 a^2 \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} = 0 \tag{1.6}$$

Уравнения, входящие в системы (1.3) и (1.5), содержат лишь по два слагаемых. В эти системы и в уравнения второго порядка (1.4) и (1.6) входит лишь один, отличный от ± 1, коэффициент $\rho^2 a^2$, который, в свою очередь, зависит лишь от одной независимой переменной, p или w. Поэтому каждая из гиперболических систем (1.3) и (1.5) может рассматриваться как аналог системы уравнений Чаплыгина на сверхзвуковой части плоскости годографа [2–4, 6]. Аналогично, каждое из гиперболических уравнений второго порядка (1.4) и (1.6) может рассматриваться как аналог уравнений Чаплыгина второго порядка [2–4].

Системы (1.3) и (1.5) и уравнения (1.4) и (1.6) имеют бесконечное множество точных решений. Так как системы (1.3) и (1.5) эквивалентны, в дальнейшем для определенности ограничимся рассмотрением следующих решений системы (1.3):

$$t = f(p, u), \quad \psi = g(p, u) \tag{1.7}$$

Бесконечное множество таких решений может быть построено методом разделения переменных. Для рассматриваемых политропных газов коэффициент $\rho^2 a^2$ – степенная функция независимой переменной p, что сводит процесс построения решения к известной задаче [7, 8]. Кроме того, следует указать на конечное число очевидных решений, являющихся линейными функциями p (или w) и u, их произведений и квадратов и некоторых квадратур. Примеры таких решений будут приведены в разд. 3.

Отметим, что точные решения известны и для других форм записи уравнений одномерной нестационарной газовой динамики [2–5, 6]. Роль точных решений для построения и анализа течений общеизвестна. В то же время, как оказывается, структура уравнений (1.3) и точные решения вида (1.7) играют важную роль при построении новых однородно-дивергентных уравнений на плоскости (ψ, t) и, как следствие, новых законов сохранения на плоскостях (ψ, t) и (x, t). Этим вопросам и посвящен следующий раздел.

2. Точные решения на плоскости спидографа и отвечающие им уравнения на плоскости событий. Рассмотрим связь между структурой системы (1.3), ее решениями (1.7) и новыми формами уравнений одномерной нестационарной газовой динамики на плоскости (ψ, t). В связи с этим сначала напомним [9], что если произвольная однородная или неоднородная система первого порядка с независимыми переменными p, u и зависимыми переменными t, ψ имеет двухпараметрическое решение

$$\alpha(t, \psi, p, u) = a, \quad \beta(t, \psi, p, u) = b \tag{2.1}$$

с произвольными постоянными a и b, то введение новых зависимых переменных $U = \alpha(t, \psi, p, u)$, $V = \beta(t, \psi, p, u)$ переводит исходную систему в новую однородную систему. Естественно, что наличие у системы (1.3) неограниченного множества двухпараметрических решений ставит вопрос о построении с их помощью новых однородных систем на плоскости спидографа. Исходя из этого с использованием произвольных постоянных a, b, c преобразуем решение (1.7) в эквивалентное ему решение, но записанное в форме (2.1):

$$ct - f(p, u) = a, \quad c\psi - g(p, u) = b \tag{2.2}$$

после чего приходим к следующей однородной системе:

$$\rho^2 a^2 (ct - f)_p + (c\psi - g)_u = 0, \quad (ct - f)_u + (c\psi - g)_p = 0 \tag{2.3}$$

Очевидно, что система (2.3) может быть построена и без приведенных выше результатов из [9], так как является прямым следствием уравнений (1.3) и решений (1.7). Сама по себе она не дает новой информации о решениях уравнений на плоскости спидографа. В то же время, как будет показано ниже, при переходе на плоскость (ψ, t) система (2.3) представляет определенный интерес.

Теорема 1. Каждому невырожденному решению (1.7) системы (1.3) введение зависимых переменных

$$U = f(p, u), \quad V = g(p, u), \quad (J = f_p g_u - f_u g_p \neq 0)$$

и функции R, определенной через производные

$$R_t = g(p, u), \quad R_\psi = f(p, u)$$

ставит в соответствие систему однородно-дивергентных уравнений одномерной нестационарной газовой динамики на плоскости (ψ, t)

$$\rho^2 a^2 U_\psi - V_t = 0, \quad U_t - V_\psi = 0 \tag{2.4}$$

уравнение второго порядка

$$\rho^2 a^2 R_{\psi\psi} - R_{tt} = 0 \tag{2.5}$$

и закон сохранения на плоскости (x, t)

$$(\rho u U - V)_x + (\rho U)_t = (\rho u f - g)_x + (\rho f)_t = 0 \tag{2.6}$$

Доказательство. Из того, что соотношения (1.7) являются решением системы (1.3), следуют равенства

$$\rho^2 a^2 U_p + V_u = \rho^2 a^2 (U_t t_p + U_\psi \psi_p) + V_t t_u + V_\psi \psi_u = 0$$

$$U_u + V_p = U_t t_u + U_\psi \psi_u + V_t t_p + V_\psi \psi_p = 0$$

Выражая с помощью системы (1.3) производные ψ_p и ψ_u через производные t_p и t_u, получаем однородную линейную алгебраическую систему для величин $X = U_t - V_\psi$ и $Y = \rho^2 a^2 U_\psi - V_t$

$$\rho^2 a^2 t_p X - t_u Y = 0, \quad t_u X - t_p Y = 0 \tag{2.7}$$

По условию теоремы якобиан

$$J = f_p g_u - f_u g_p = t_p \psi_u - t_u \psi_p = -\rho^2 a^2 t_p^2 + t_u^2 \neq 0$$

Следовательно, система (2.7) имеет единственное решение $X = 0$, $Y = 0$, что и приводит к уравнениям (2.4) и, как следствие, к уравнению второго порядка (2.5).

Для построения закона сохранения (2.6) перепишем второе (дивергентное) равенство системы (2.4) с использованием независимых переменных (x, t). Имеем:

$$u U_x + U_t - \rho^{-1} V_x = 0$$

Складывая это равенство с очевидным тождеством

$$\rho^{-1} U((\rho u)_x + \rho_t) = 0$$

приходим к равенству (2.6), что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. Система (2.4) допускает следующее обобщение:

$$\rho^2 a^2 (U - ct)_\psi - (V - c\psi)_t = 0, \quad (U - ct)_t - (V - c\psi)_\psi = 0$$

Здесь c – произвольная постоянная.

Видно, что при переходе на плоскость спидографа данная система совпадает с рассмотренной выше системой (2.3).

Замечания. 1°. Равенство (2.6) дает неограниченное множество законов сохранения на плоскости (x, t). Конечное число законов сохранения газовой динамики в пространстве (x, y, z, t) было построено ранее [10–12]. Часть из них сохраняют смысл и для плоскости (x, t). Надо подчеркнуть, что на с. 19 в работе [12], являющейся более поздним и переработанным изданием работы [11], говорится, что добавление к исследуемой в [11, 12] системе уравнений газовой динамики не противоречащих ей новых связей может расширить систему законов сохранения, построенных в [11, 12]. К числу таких связей можно отнести условие потенциальности, связи, появляющиеся при уменьшении числа переменных и т.д. Результаты данной работы и предшествующей ей работы [1] наглядно демонстрируют некоторые возможные пути реализации указанного выше утверждения из [12].

2°. Для отдельных точных решений введенная выше функция R имеет четкий физический смысл, что и будет продемонстрировано на ряде примеров.

Каждая из систем (2.4) во многом идентична системе уравнений двумерных стационарных течений на плоскости потенциала [3] и каждой из бесконечного множества систем, полученных с использованием решений уравнений Чаплыгина [1]. Поэтому следует ожидать, что структура линий уровня $U = \mathrm{const}$ и $V = \mathrm{const}$ на плоскости (x, t)

также имеет много общего со структурой линий уровня стационарных течений [13]. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для скоростей U^c и V^c фронтов $U = \text{const}$ и $V = \text{const}$, отвечающих решению системы (2.4), справедливы следующие соотношения, связывающие их со скоростями газа u и звука a и с якобианом $j = U_\psi V_t - U_t V_\psi$ системы (2.4):

$$(U^c - u)(V^c - u) = a^2 \tag{2.8}$$

$$\rho^2 U_\psi^2(a^2 - (U^c - u)^2) = a^{-2} V_\psi^2((V^c - u)^2 - a^2) = j \tag{2.9}$$

Иными словами, относительные скорости фронтов ($U^c - u$) и ($V^c - u$) имеют один знак, их среднее геометрическое равно скорости звука, и равенства $U^c - u = V^c - u = a$ возможны лишь при $j = 0$, и наконец, в зависимости от знака якобиана j выполнены неравенства

$$j > 0, \quad (U^c - u)^2 < a^2 < (V^c - u)^2$$

$$j < 0, \quad (V^c - u)^2 < a^2 < (U^c - u)^2$$

Доказательство. Вдоль линии $U = \text{const}$ имеем

$$U_\psi d\psi + U_t dt = U_\psi(\rho dx - \rho u dt) + U_t dt = U_\psi \rho(U^c - u)dt + U_t dt = 0$$

Для линии $V = \text{const}$ все выписывается аналогично. Следовательно,

$$U^c - u = -\frac{U_t}{\rho U_\psi}, \quad V^c - u = -\frac{V_t}{\rho V_\psi} \tag{2.10}$$

откуда при учете системы (2.4) и получаем требуемое равенство (2.8). Далее, выражение для якобиана $j = U_\psi V_t - U_t V_\psi$ с использованием равенств (2.4) и (2.10) приводит к соотношениям (2.9), что и завершает доказательство.

Замечания. 1°. Класс течений несжимаемой жидкости, охватываемых *теорией мелкой воды* [3, 6], дает возможность визуального наблюдения изменения одной из исследуемых функций и движения фронта ее постоянных значений. Эти течения описываются уравнениями одномерной нестационарной газовой динамики (2.4), в которых принято

$$U = -u, \quad V = \frac{gh^2}{2}, \quad p = \frac{gh^2}{2}, \quad \rho = h, \quad a^2 = gh$$

где g – ускорение силы тяжести, $h = h(x, t)$ – расстояние от свободной поверхности до горизонтального дна, при этом ψ, x и t связаны соотношением $d\psi = hdx - hudt$. В эксперименте изменение величины h и скорость V^c перемещения точки свободной поверхности $h = \text{const}$ легко наблюдаются и измеряются. Подстановка величин h и V^c в равенство (2.8), в котором величина a^2 заменена на gh, дает соотношение, связывающее скорость течения u и скорость V^c движения фронта $u = \text{const}$.

2°. Теорема 2 во многом идентична соответствующей теореме [13] о структуре линий уровня плоских стационарных течений, для которых также построено бесконечное множество однородно-дивергентных уравнений [1]. В сверхзвуковом случае указанная теорема формулируется так:

Среднее геометрическое тангенсов углов, образуемых линиями уровня исследуемых функций с вектором скорости равно тангенсу угла Маха.

3°. Приведенные в теореме 2 неравенства, вытекающие из соотношений (2.9), не противоречат тому факту, что по газу с постоянными параметрами возмущение распространяется со скоростью звука. В этом случае, как известно, к постоянному решению примыкает простая волна, в которой якобиан $j = 0$, в силу чего в каждой точке простой волны, в том числе и на границе с постоянным решением, $U^c - u = V^c - u = a$. В то же время в каждой точке области решения общего вида c ненулевым якобианом j, в зависимости от его знака либо $|U^c - a| > a$, либо $|V^c - u| > a$, т.е. один из фронтов, либо $U = \text{const}$, либо $V = \text{const}$, может двигаться быстрее звуковой волны.

3. Примеры. Рассмотрим некоторые примеры решений вида $t = f$, $\psi = g$ систем (1.3) и (1.5) и связанных с ними, согласно теореме 1, однородно-дивергентных систем (2.4) и уравнений второго порядка (2.5) на плоскости (ψ, t) и законов сохранения (2.6) на плоскости (x, t). Построение этих решений не требует применения разделения переменных. Тем не менее и эти примеры наглядно демонстрируют связь точных решений на плоскости спидографа с уравнениями первого и второго порядка и с законами сохранения на плоскостях событий (ψ, t) и (x, t). Решениям, построение которых требует применения разделения переменных, посвящен разд. 4. Также следует отметить, что некоторые из решений данного и последующего разделов представляют самостоятельный интерес.

Пример 1

$$t = f_1 = -u, \quad \psi = g_1 = p, \quad R(\psi, t) = P = \int_{t_0}^{t} p(\psi, t)d\tau \tag{3.1}$$

$$-\rho^2 a^2 u_\psi - p_t = 0, \quad -u_t - p_\psi = 0 \tag{3.2}$$

$$\rho^2 a^2 P_{\psi\psi} - P_{tt} = 0 \tag{3.3}$$

$$-(p + \rho u^2)_x - (\rho u)_t = 0 \tag{3.4}$$

Фигурирующий здесь интеграл является интегральным функционалом. Он сопоставляет с отрезком (t_0, t) траектории $\psi = \text{const}$ число P, которое непосредственно связано с законом сохранения импульса (второе из уравнений (3.2) и уравнение (3.4)). В частности, величина P может быть записана и через интеграл по лагранжевой координате при фиксированном значении времени, что видно из следующей формы записи закона сохранения импульса:

$$P(\psi, t) - P(\psi_0, t) = -\int_{\psi_0}^{\psi} u(\xi, t)d\xi + \int_{\psi_0}^{\psi} u(\xi, t_0)d\xi$$

Уравнения (3.2) и закон сохранения импульса (3.4) хорошо известны [2–5, 10–12]. Некоторый интерес может представлять уравнение второго порядка (3.3).

Пример 2

$$t = f_2 = w = \rho^{-1}, \quad \psi = g_2 = u, \quad R(\psi, t) = x \tag{3.5}$$

$$\rho^2 a^2 w_\psi - u_t = 0, \quad w_t - u_\psi = 0 \tag{3.6}$$

$$\rho^2 a^2 x_{\psi\psi} - x_{tt} = 0 \tag{3.7}$$

$$(\rho u f_2 - g_2)_x + (\rho f_2)_t = 0_x + 1_t = 0 \tag{3.8}$$

Как видим, закон сохранения на плоскостях (x, t) и (ψ, t) отражает тот очевидный факт, что при движении по замкнутому контуру приращение координаты x равно нулю.

Уравнения (3.6) хорошо известны [2–5]. Рассматриваемый пример более интересен предельно простым видом функции $R = x$, что приводит к компактной форме уравнения второго порядка (3.7), в котором коэффициент $\rho^2 a^2$ выражается через производную x_ψ. Это уравнение другим способом было построено ранее [4].

Равенство функции R геометрической координате x делает уместным сравнение с аналогичными уравнениями для плоских стационарных течений. Такое сравнение интересно и потому, что плоские течения характеризуются наличием двух геометрических координат x и y. В связи с этим напомним две равноправные системы уравнений, построенные [1] с использованием решений Ринглеба [2]:

$$\frac{1-M^2}{\rho^2}\left(\frac{\sin\theta}{q}\right)_\varphi + \left(\frac{\cos\theta}{\rho q}\right)_\psi = 0, \quad \left(\frac{\sin\theta}{q}\right)_\psi - \left(\frac{\cos\theta}{\rho q}\right)_\varphi = 0$$

$$\frac{1-M^2}{\rho^2}\left(\frac{\cos\theta}{q}\right)_\varphi - \left(\frac{\sin\theta}{\rho q}\right)_\psi = 0, \quad \left(\frac{\cos\theta}{q}\right)_\psi + \left(\frac{\sin\theta}{\rho q}\right)_\varphi = 0$$

В каждой из систем зависимыми переменными являются выражения в скобках, при этом в данном подразделе используются стандартные обозначения для плоских стационарных течений: M – число Маха, q и θ – модуль и угол наклона вектора скорости, φ – потенциал, ψ – функция тока.

Следуя известному подходу [4] и результатам настоящей работы и замечая, что

$$x_\varphi = \frac{\cos\theta}{q}, \quad x_\psi = -\frac{\sin\theta}{\rho q}, \quad y_\varphi = \frac{\sin\theta}{q}, \quad y_\psi = \frac{\cos\theta}{\rho q}$$

приходим к двум новым и равноправным уравнениям второго порядка для плоских потенциальных течений

$$\frac{1-M^2}{\rho^2}y_{\varphi\varphi} + y_{\psi\psi} = 0, \quad \frac{1-M^2}{\rho^2}x_{\varphi\varphi} + x_{\psi\psi} = 0$$

каждое из которых может рассматриваться как обратное к известному уравнению второго порядка для потенциала на плоскости (x, y) [2–4, 6].

Пример 3

$$t = f_3 = -\frac{1}{2}u^2 - \frac{k-1}{4k}\upsilon^2, \quad \psi = g_3 = up$$

$$R(\psi, t) = W = \int_{t_0}^{t} p(\psi,\tau)u(\psi,\tau)d\tau \tag{3.9}$$

$$-\rho^2 a^2\left(\frac{u^2}{2} + \frac{k-1}{4k}\upsilon^2\right)_\psi - (pu)_t = 0, \quad -\left(\frac{u^2}{2} + \frac{k-1}{4k}\upsilon^2\right)_t - (pu)_\psi = 0 \tag{3.10}$$

$$\rho^2 a^2 W_{\psi\psi} - W_{tt} = 0 \tag{3.11}$$

$$-\left(\rho u\left(\frac{u^2}{2} + \frac{k-1}{4k}\upsilon^2\right) + pu\right)_x - \left(\rho\left(\frac{u^2}{2} + \frac{k-1}{4k}\upsilon^2\right)\right)_t = 0 \tag{3.12}$$

Первое соотношение (3.9), разделив обе его части на t, можно записать в виде уравнения эллипса на плоскости спидографа (u, υ).

Функционал W имеет четкий физический смысл: это работа, совершенная траекторией (поршнем) со значением лагранжевой координаты ψ на момент времени t (интеграл, определяющий функцию W, вычисляется вдоль траектории $\psi = \text{const}$). Решение (3.9) и отвечающие ему система (3.10) и уравнение второго порядка (3.11) представляются достаточно новыми, в то время как закон сохранения (3.12) на плоскости (x, t) и он же на плоскости (ψ, t) (второе из уравнений (3.10)) – известный закон сохранения энергии [2–5, 10–12]. Пользуясь случаем отметим, что этот закон сохранения позволяет свести достаточно сложную задачу построения оптимального (с точки зрения достижения максимальной работы) движения поршня к одномерной вариационной задаче для замыкающей характеристики и получить условия оптимальности в виде конечных алгебраических соотношений [14].

Пример 4

$$t = f_4 = \frac{u}{\rho}, \quad \psi = g_4 = \frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{k-1}, \quad R = \varphi(\psi, t) \tag{3.13}$$

$$\rho^2 a^2 \left(\frac{u}{\rho}\right)_\psi - \left(\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{k-1}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{u}{\rho}\right)_t - \left(\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{k-1}\right)_\psi = 0 \tag{3.14}$$

$$\rho^2 a^2 \frac{\partial^2 \varphi(\psi, t)}{\partial \psi^2} - \frac{\partial^2 \varphi(\psi, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{3.15}$$

$$\left(\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1}\right)_x + u_t = 0 \tag{3.16}$$

Здесь φ – потенциал течения, определенный стандартным образом: $\dfrac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = u$. Для потенциала φ известны, в частности, приведенные ниже интеграл Коши – Лагранжа и уравнение второго порядка [2–4, 6]

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = 0 \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x \partial t} + (u^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \tag{3.18}$$

Тем самым пример 4 демонстрирует связь точных решений (3.13) не только с новыми формами уравнений, но и с потенциалом φ, а также указывает на то, что при замене независимых переменных (x, t) на (ψ, t) уравнение второго порядка (3.18) переходит в (3.15) и при этом существенно упрощается.

Выбор примеров 1–4 достаточно случаен, он связан лишь с наличием наиболее простых решений $t = f_i(p, u)$ и $\psi = g_i(p, u)$, лежащих в основе указанных примеров. Тем не менее, эти примеры интересны и с методической точки зрения, так как они демонстрируют наличие линейной связи между производными $(f_i)_t$ и $(g_i)_t$ и, как следствие, дивергентными уравнениями из примеров 1–4.

Для примеров 1–3 имеем

$$-u(f_1)_t - p(f_2)_t + (f_3)_t = uu_t - p\left(\frac{1}{\rho}\right)_t - \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho(k-1)}\right)_t = 0$$

$$-u(g_1)_\psi - p(g_2)_\psi + (g_3)_\psi = -up_\psi - pu_\psi + (pu)_\psi = 0$$

после чего получаем аналогичное линейное соотношение, связывающее дивергентные уравнения из примеров 1–3:

$$-u((f_1)_t-(g_1)_\psi)-p((f_2)_t-(g_2)_\psi)+((f_3)_t-(g_3)_\psi) = u(u_t+p_\psi)-p\left(\left(\frac{1}{\rho}\right)_t-u_\psi\right)-$$

$$-\left(\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho(k-1)}\right)_t+(pu)_\psi\right) = 0 \tag{3.19}$$

Следовательно, согласно указанному ранее [15, 16], каждый из трех рассмотренных законов сохранения является дополнительным к двум другим законам сохранения.

Аналогичные линейные соотношения имеют место и для примеров 1, 2 и 4:

$$-\frac{1}{\rho}(f_1)_t+u(f_2)_t-(f_4)_t = \frac{1}{\rho}u_t+u\left(\frac{1}{\rho}\right)_t-\left(\frac{u}{\rho}\right)_t = 0 \tag{3.20}$$

$$-\frac{1}{\rho}(g_1)_\psi+u(g_2)_\psi-(g_4)_\psi = -\frac{1}{\rho}p_\psi+uu_\psi+\left(\frac{u^2}{2}-\frac{p}{\rho}\frac{k}{(k-1)}\right)_\psi = 0 \tag{3.21}$$

$$-\frac{1}{\rho}((f_1)_t-(g_1)_\psi)+u((f_2)_t-(g_2)_\psi)-((f_4)_t-(g_4)_\psi) =$$

$$= \frac{1}{\rho}(u_t+p_\psi)+u\left(\left(\frac{1}{\rho}\right)_t-u_\psi\right)-\left(\left(\frac{u}{\rho}\right)_t-\left(\frac{u^2}{2}-\frac{p}{\rho}\frac{k}{(k-1)}\right)_\psi\right) = 0 \tag{3.22}$$

Нетрудно также заметить, что система уравнений (3.19), (3.22) позволяет выразить дивергентные уравнения из примеров 1 и 2 через дивергентные уравнения из примеров 3 и 4. Тем самым можно считать доказанным, что каждое из дивергентных уравнений из примеров 1–4 может быть записано в виде линейной комбинации двух других дивергентных уравнений из этих же примеров. Следовательно, согласно указанному ранее [15, 16], каждый из законов сохранения из примеров 1–4 является дополнительным к другим законам сохранения из указанных примеров.

Следует заметить, что это достаточно типичная ситуация, когда линейная комбинация из трех или более законов сохранения, записанных в дифференциальной форме, обращается в нуль. Так, в отмеченных выше работах [15, 16] построение дополнительного закона сохранения используется для симметризации уравнений газовой динамики. В работах [11, 12] вопрос о дополнительных законах сохранения не обсуждался, но простой анализ приведенных в [11, 12] дивергентных уравнений позволяет указать на несколько линейных комбинаций, обращающихся в нуль. При этом надо подчеркнуть, что обращение в нуль этих и других отмеченных выше линейных комбинаций никак не переносится на интегральные формы соответствующих законов сохранения. Все это говорит о том, что классификация законов сохранения достаточно сложна и далека от завершения. Заметим, что такая классификация должна учитывать многие факторы, например, является ли рассматриваемое дивергентное уравнение составной частью однородной системы уравнений газовой динамики или нет, зависят ли функции A и B из уравнения $A_t - B_\psi = 0$ лишь от ψ, t, p, u, или возможна их зависимость и от интегральных функционалов, как, например, P, W, x, φ. Как оказывается, более детальное рассмотрение примеров 1–4 подтверждает сказанное.

Рассмотрим примеры 1 и 2. Для этого умножим уравнения второго порядка (3.3) и (3.7) соответственно на x и P. Сложив результаты, получим неоднородное уравнение второго порядка

$$\rho^2a^2(xP)_{\psi\psi}-(xP)_{tt}+2\rho a^2u+2up = 0$$

и отвечающую ему неоднородно-дивергентную систему

$$\rho^2 a^2\left(\frac{P}{\rho} - xu\right)_\psi - (uP + xp)_t + 2\rho a^2 u + 2up = 0 \tag{3.23}$$

$$((xP)_\psi)_t - ((xP)_t)_\psi \equiv \left(\frac{P}{\rho} - xu\right)_t - (uP + xp)_\psi = 0 \tag{3.24}$$

Представляющее интерес дивергентное уравнение (3.24) дает новый закон сохранения на плоскости (ψ, t), который может быть переписан и для плоскости (x, t).

Подчеркнем, что выражения в скобках в уравнении (3.24) включают в себя и интегральные функционалы P и x. Это обстоятельство не усложняет использование закона сохранения в интегральной форме. Необходимо лишь при вычислении интеграла по замкнутому контуру

$$\oint\left(\frac{P}{\rho} - xu\right)d\psi + (uP + xp)dt$$

одновременно вычислять и величины P и x с помощью интегралов из (3.1) и (3.5), вычисляемых по этому же контуру. В то же время, использование интегральных законов сохранения, вытекающих из уравнения (3.24) и ему подобных дополнительных законов сохранения в вариационных задачах об оптимальном движении поршня, например, в развитие полученных ранее результатов [14], приводит к малоизученной ситуации, когда минимизируемый интегральный функционал в качестве аргументов содержит другие интегральные функционалы.

По аналогии с уравнением (3.24) выписываются и пять оставшихся дивергентных уравнений

$$((PW)_\psi)_t - ((PW)_t)_\psi \equiv -\left(uW + P\left(\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k(k-1)}\right)\right)_t - (pW + Ppu)_\psi = 0$$

$$((P\varphi)_\psi)_t - ((P\varphi)_\psi)_t \equiv \left(-u\varphi + P\frac{u}{\rho}\right)_t - \left(p\varphi + P\left(\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{k-1}\right)\right)_\psi = 0$$

$$((xW)_\psi)_t - ((xW)_t)_\psi \equiv \left(\frac{W}{\rho} - x\left(\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k(k-1)}\right)\right)_t - (uW + xpu)_\psi = 0$$

$$((x\varphi)_\psi)_t - ((x\varphi)_t)_\psi \equiv \left(\frac{\varphi}{\rho} + x\frac{u}{\rho}\right)_t - \left(u\varphi + x\left(\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{k-1}\right)\right)_\psi = 0$$

$$((\varphi W)_\psi)_t - ((\varphi W)_t)_\psi \equiv \left(W\frac{u}{\rho} - \varphi\left(\frac{u^2}{2} + \frac{a^2}{k(k-1)}\right)\right)_t - \left(W\left(\frac{u^2}{2} - \frac{a^2}{k-1}\right) + \varphi pu\right)_\psi = 0$$

4. Решения, получаемые методом разделения переменных. Используя стандартный прием, запишем ψ в виде произведения $\psi = h(p)q(u)$ и после подстановки в уравнение (1.4) имеем

$$\rho^2 a^2 \frac{h''(p)}{h(p)} = \frac{q''(u)}{q(u)} = A = \text{const} \tag{4.1}$$

Случаи $A > 0$ и $A < 0$ требуют отдельного рассмотрения.

Отрицательная константа разделения, $A = -\lambda^2 < 0$. Имеем: $q'' = -\lambda^2 q$. Это приводит к двум независимым решениям $q_1 = \cos\lambda u$, $q_2 = \sin\lambda u$. Далее, уравнение второго порядка

$$\rho^2 a^2 h'' = kp^{1+1/k} h'' = Ah$$

также имеет два независимых решения, которые при $A = -\lambda^2$ будем обозначать через $S_1(p, \lambda)$ и $S_2(p, \lambda)$, а при $A = \lambda^2$ – через $Z_1(p, \lambda)$ и $Z_2(p, \lambda)$. Достаточно громоздкие выражения для $S_i(p, \lambda)$ и $Z_i(p, \lambda)$ приведены ранее [7, 8]. Опуская аналогичные выкладки, относящиеся к построению решения для t, получаем собранные, для упрощения записи, в варианты 1 и 2 четыре пары функций, дающих решение системы (1.3) при $A = -\lambda^2$, и связанные с ними, согласно теореме 1, однородно-дивергентные системы первого порядка и уравнения второго порядка на плоскости (ψ, t) и законы сохранения на плоскости (x, t). Для варианта 1 имеем

$$t = f = -\frac{S_i'}{\lambda}\sin\lambda u, \quad \psi = g = S_i\cos\lambda u$$

$$R_i^+(\psi, t) = \int_{t_0}^{t} S_i(\psi, \tau)\cos\lambda u(\psi, \tau)d\tau, \quad i = 1, 2$$

$$\rho^2 a^2 (R_i^+)_{\psi\psi} - (R_i^+)_{tt} \equiv -\rho^2 a^2 \left(\frac{S_i'}{\lambda}\sin\lambda u\right)_\psi - (S_i\cos\lambda u)_t = 0$$

$$((R_i^+)_\psi)_t - ((R_i^+)_t)_\psi \equiv -\left(\frac{S_i'}{\lambda}\sin\lambda u\right)_t - (S_i\cos\lambda u)_\psi = 0$$

$$\left(\rho u\frac{S_i'}{\lambda}\sin\lambda u + S_i\cos\lambda u\right)_x + \left(\rho\frac{S_i'}{\lambda}\sin\lambda u\right)_t = 0$$

(штрих при S_i и Z_i означает дифференцирование по p). Вариант 2 отличается от варианта 1 заменой $\sin\lambda u$ на $-\cos\lambda u$ и $\cos\lambda u$ на $\sin\lambda u$, а также R_i^+ на R_i^-.

По аналогии с теоремой 2 из [1] нетрудно показать, что приведенным выше четырем законам сохранения можно поставить в соответствие два дополнительных закона сохранения. Это достигается сложением дивергентных уравнений с индексом i из обоих вариантов, домноженных соответственно на R_j^+ и R_j^-, где $j = 3 - i$, $i = 1, 2$. В результате получаем искомые дополнительные законы сохранения

$$((R_i^+)_\psi R_j^+ + (R_i^-)_\psi R_j^-)_t - ((R_i^+)_t R_j^+ + (R_i^-)_t R_j^-)_\psi \equiv$$
$$\equiv \left(-\frac{S_i'}{\lambda}\sin\lambda u R_j^+ + \frac{S_i'}{\lambda}\cos\lambda u R_j^-\right)_t - (S_i\cos\lambda u R_j^+ + S_i\sin\lambda u R_j^-)_\psi = 0$$

Данные законы сохранения имеют много общего с дополнительными законами сохранения, приведенными в конце предыдущего раздела. Так, приведенные дивергентные уравнения также являются составной частью неоднородно-дивергентных уравнений одномерной нестационарной газовой динамики.

Положительная константа разделения, $A = \lambda^2 > 0$. Из соотношения (4.1) следует $q'' = \lambda^2 q$, что приводит к двум независимым решениям: $q_1 = e^{\lambda u}$ и $q_2 = e^{-\lambda u}$. Далее, как отмечено выше, уравнение второго порядка для $h(p)$ также имеет два независимых решения, для которых при $A = \lambda^2 > 0$ использованы обозначения $Z_1 = Z_1(p, \lambda)$ и $Z_2 = Z_2(p, \lambda)$. Опуская аналогичные выкладки, относящиеся к построению решения для t, получаем четыре пары функций, дающих решение системы (1.3) при $A = \lambda^2$ и отвечающие им однородно-дивергентные уравнения первого и второго порядка на плоскости (ψ, t) и законы сохранения на плоскости (x, t). Имеем

$$t = f = \mp\frac{Z_i'}{\lambda}e^{\pm\lambda u}, \quad \psi = g = Z_i e^{\pm\lambda u}$$

$$R_i^{\pm} = \int_{t_0}^{t} Z_i(\psi, \tau)e^{\pm\lambda u(\psi, \tau)}d\tau, \quad i = 1, 2$$

$$\rho^2 a^2 (R_i^{\pm})_{\psi\psi} - (R_i^{\pm})_{tt} \equiv \mp\rho^2 a^2\left(\frac{Z_i'}{\lambda}e^{\pm\lambda u}\right)_{\psi} - (Z_i e^{\lambda u})_t = 0$$

$$((R_i^{\pm})_{\psi})_t - ((R_i^{\pm})_t)_{\psi} \equiv \mp\left(\frac{Z_i'}{\lambda}e^{\pm\lambda u}\right)_t - (Z_i e^{\pm\lambda u})_{\psi} = 0$$

$$\left(\rho u\frac{Z_i'}{\lambda}e^{\pm\lambda u} \pm Z_i e^{\pm\lambda u}\right)_x + \left(\rho\frac{Z_i'}{\lambda}e^{\pm\lambda u}\right)_t = 0$$

Варианту 1 соответствует верхний знак, варианту 2 – нижний знак (плюс или минус).

Четырем законам сохранения, отвечающим положительной константе разделения, также можно поставить в соответствие два дополнительных закона сохранения, которые получаются сложением дивергентных уравнений с индексом i из обоих вариантов, взятых с сомножителями, соответственно, R_j^- и R_j^+, где $j = 3 - i$, $i = 1, 2$. В результате имеем

$$((R_i^+)_{\psi}R_j^- + (R_i^-)_{\psi}R_j^+)_t - ((R_i^+)_t R_j^- + (R_i^-)_t R_j^+)_{\psi} \equiv$$

$$\equiv\left(-\frac{Z_i'}{\lambda}e^{\lambda u}R_j^- + \frac{Z_i'}{\lambda}e^{-\lambda u}R_j^+\right)_t - (Z_i e^{\lambda u}R_j^- + Z_i e^{-\lambda u}R_j^+)_{\psi} = 0$$

Замечание. Как оказывается, решения, отвечающие положительной константе разделения обладают интересным свойством. Благодаря тому, что в варианте 1 выражения для t и ψ содержат одинаковый сомножитель $e^{\lambda u}$, получаем

$$\frac{t}{\psi} = -\frac{Z_i'(p, \lambda)}{Z_i(p, \lambda)}, \quad i = 1, 2$$

после чего окончательно имеем

$$p = F\left(\frac{t}{\psi}, \lambda\right), \quad u = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{\psi}{Z_i(p, \lambda)}, \quad i = 1, 2$$

Совершенно аналогично для решения из варианта 2 имеем

$$p = G\left(\frac{t}{\psi}, \lambda\right), \quad u = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\psi}{Z_i(p, \lambda)}, \quad i = 1, 2$$

где F и G – некоторые, подлежащие определению функции.

Тем самым решения, отвечающие положительной константе разделения, обладают следующими свойствами: на плоскости событий (ψ, t) указанные решения характеризуются постоянными значениями давления p и логарифмической зависимостью скорости u от ψ вдоль лучей $\frac{t}{\psi}$ = const.

Автор благодарит Г.Г. Черного, Ю.Д. Шмыглевского, С.К. Годунова и Г.В. Демиденко за обсуждения задач данного направления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00851).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рылов А.И.* Уравнения С.А. Чаплыгина и бесконечное множество однородно-дивергентных уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 1. С. 34–36.
2. *Mises R.* Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. N.Y.: Acad. Press, 1958 = *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1961. 588 с.
3. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
4. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
5. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. *Katnke E.* Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig: Geest and Partig, 1948 = Leipzig: Akademie-Verlag, 1944 = *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.
8. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. 304 с.
9. *Рылов А.И.* Свойства монотонности решений эллиптических систем первого порядка и их приложения к уравнениям механики жидкости и газа // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 758–766.
10. *Ибрагимов Н.Х.* Законы сохранения в гидродинамике // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 6. С. 1307–1309.
11. *Терентьев Е.Д., Шмыглевский Ю.Д.* Полная система дивергентных уравнений динамики совершенного газа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 6. С. 1535–1544.
12. *Шмыглевский Ю.Д.* Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС. 1999. 231 с.
13. *Рылов А.И.* Геометрические свойства некоторых линий уровня в плоских и осесимметричных течениях газа // Сиб. ж. индустр. математики. 2003. Т. 6. № 1. С. 125–137.
14. *Рылов А.И.* Вариационная задача одномерной нестационарной газовой динамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 171–175.
15. *Годунов С.К.* Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН. 1961. Т. 139. № 30. С. 521–523.
16. *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.

Новосибирск
e-mail: rylov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию
16.I.2004