

УДК 532.546

© 2005 г. О. Ю. Динариев

**О РОЛИ ПЕРЕКРЕСТНЫХ ЧЛЕНОВ В ЗАКОНЕ ФИЛЬТРАЦИИ  
ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОКОНДЕНСАТНОЙ СМЕСИ ВБЛИЗИ СКВАЖИНЫ**

Рассматривается задача об установившемся течении газоконденсатной смеси вблизи эксплуатационной скважины. Учитываются капиллярные силы и перекрестные члены в законе фильтрации. Показано, что задача расщепляется на чисто физико-химическую задачу о капиллярной конденсации и задачу об определении поля давлений в фазах. Последняя задача может иметь бесконечно много решений; выделяется одно решение, представляющее наибольший интерес для практики. В случае малого отношения вязкостей газа и конденсата найдено приближенное решение в аналитическом виде.

**1. Введение.** При моделировании фильтрационных течений в пористых средах для смесей типа газ–жидкость или жидкость–жидкость, если гравитационные силы несущественны, обычно используется обобщенный закон Дарси для среднemasовых скоростей фаз [1]

$$u_n^a = -k\mu_n^{-1} f_n \partial_a p_n, \quad n = 1, 2 \tag{1.1}$$

где  $u_n^a$  – скорости фильтрации фаз,  $k$  – абсолютная проницаемость,  $\mu_n$  – сдвиговые вязкости фаз,  $p_n$  – давление в фазах,  $f_n$  – функции относительных фазовых проницаемостей, зависящие от насыщенности одной из фаз.

В то же время моделирование течения двухфазной смеси в капилляре дает результат, отличающийся от (1.1). Так, при описании течения многокомпонентной газоконденсатной смеси в осесимметричном капилляре методом функционала плотности [2] в случае, когда конденсат является смачивающей фазой, получаются следующие выражения для средних локальных скоростей газа и конденсата:

$$u_g = -R^2(\mu_g^{-1}\Sigma_1 + \mu_c^{-1}\Sigma_2) \frac{dp_g}{dx} - R^2\mu_c^{-1}\Sigma_3 \frac{dp_c}{dx} \tag{1.2}$$

$$u_c = -R^2\mu_c^{-1}\Sigma_3 \frac{dp_g}{dx} - R^2\mu_c^{-1}\Sigma_4 \frac{dp_c}{dx} \tag{1.3}$$

где  $x$  – координата вдоль оси капилляра,  $R$  – локальное значение радиуса капилляра,  $p_g, p_c$  – давление в газе и конденсате,  $\mu_g, \mu_c$  – сдвиговая вязкость газа и конденсата,  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$  – безразмерные коэффициенты, зависящие от локальной насыщенности конденсата.

Соотношения (1.2), (1.3) отличаются от выражений (1.1) наличием перекрестных членов: поток одной фазы зависит от градиента давления в другой фазе. Это было давно замечено и послужило основанием для предложений по обобщению фильтрационного закона (1.1). Так, например, предлагались выражения для скоростей фильтрации фаз в виде [3]

$$u_n^a = -k\mu_n^{-1} (f_{n1} \partial_a p_1 + f_{n2} \partial_a p_2), \quad n = 1, 2$$

где  $f_{nm}$  – функции относительных фазовых проницаемостей. Недостаток этих последних выражений состоит в том, что зависимость от вязкостей фаз не соответствует точным соотношениям (1.2), (1.3).

Ниже будут рассмотрены установившиеся течения газоконденсатной смеси вблизи скважины, когда конденсат является смачивающей фазой, что соответствует описанной ранее постановке задачи [2]. Для скоростей фильтрации фаз принимаются выражения с перекрестными членами

$$u_g^a = -k((\mu_g^{-1} f_1 + \mu_c^{-1} f_2) \partial_a p_g + \mu_c^{-1} f_3 \partial_a p_c) \quad (1.4)$$

$$u_c^a = -k\mu_c^{-1} (f_3 \partial_a p_g + f_4 \partial_a p_c) \quad (1.5)$$

где  $f_A = f_A(s_c)$  ( $A = 1, 2, 3, 4$ ) – коэффициенты относительных фазовых проницаемостей, зависящие от насыщенности конденсата  $s_c$ .

Зависимость от вязкости в выражениях (1.4), (1.5) соответствует выражениям (1.2), (1.3). Кроме того, коэффициенты при перекрестных членах в (1.4), (1.5) приняты равными, что также соответствует выражениям (1.2), (1.3) и известным соотношениям симметрии Онзагера в неравновесной термодинамике [3].

Чтобы удовлетворить всем требованиям неравновесной термодинамики [4], матрица коэффициентов в фильтрационном законе (1.4), (1.5)

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \mu_g^{-1} f_1 + \mu_c^{-1} f_2 & \mu_c^{-1} f_3 \\ \mu_c^{-1} f_3 & \mu_c^{-1} f_4 \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

должна иметь неотрицательные собственные значения. Это свойство матрицы (1.6) не должно быть связано с конкретными значениями вязкостей фаз. Поэтому примем следующие условия, налагаемые на коэффициенты относительных проницаемостей, достаточные для неотрицательности матрицы (1.6):

$$f_A(s_c) \geq 0 \quad (1.7)$$

$$\Delta(s_c) = f_2(s_c)f_4(s_c) - f_3(s_c)^2 \geq 0 \quad (1.8)$$

Кроме того, будем предполагать выполненным неравенство

$$f_1(s_c) + f_4(s_c) > 0 \quad (1.9)$$

означающее, что при любом значении насыщенности по крайней мере одна из фаз является подвижной.

Примем также обычные условия для коэффициентов относительных фазовых проницаемостей при граничных значениях насыщенности

$$f_1(0) = f_4(1) = 1 \quad (1.10)$$

$$f_1(1) = f_4(0) = f_2(0) = f_2(1) = f_3(0) = f_3(1) = 0 \quad (1.11)$$

Как известно, соотношения (1.7)–(1.11) выполняются и в задачах с фильтрационным законом (1.1). Нужно отметить, что закон фильтрации (1.4), (1.5), используемый в настоящей работе, не является самым общим. Так, средствами неравновесной термодинамики были получены определяющие соотношения для фильтрационных течений многофазных многокомпонентных сред с учетом диффузии и теплопроводности в рамках модели взаимопроникающих континуумов<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Колесниченко А.В., Максимов В.М. Термодинамика многофазной химически активной смеси. Законы фильтрации Дарси и диффузии. Препринт № 52. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша, 1997. 32 С.; Колесниченко А.В., Максимов В.М. Обобщенный закон фильтрации Дарси, как следствие соотношений Стефана – Максвелла для гетерогенной среды.: Препринт № 45. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша, 1999. 31 с.

В разд. 2 дается качественный анализ решений задачи об установившемся течении газоконденсатной смеси вблизи скважины для фильтрационного закона (1.4), (1.5). В разд. 3 исследуется случай, когда задача имеет решение в аналитическом виде. Методы, применяемые в настоящей работе, соответствуют изложенному ранее подходу [5–7] к изучению фильтрационных течений газоконденсатной смеси для закона (1.1).

**2. Общие свойства решений.** Рассмотрим осесимметричное изотермическое установившееся фильтрационное течение газоконденсатной смеси вблизи эксплуатационной скважины. Выполняется система уравнений сохранения компонентов

$$\partial_r(r(n_{ig}u_g^r + n_{ic}u_c^r)) = 0 \tag{2.1}$$

где  $r$  – расстояние от оси скважины,  $u_g^r, u_c^r$  – радиальные скорости фильтрации газа и конденсата,  $n_{ig}, n_{ic}$  – мольные плотности компонентов газа и конденсата соответственно. Здесь и ниже индекс  $i$  пробегает значения  $1, \dots, M$ , соответствуя номеру компонента.

Уравнения (2.1) имеют  $M$  интегралов

$$2\pi rh(n_{ig}u_g^r + n_{ic}u_c^r) = -Q_i \tag{2.2}$$

где  $h$  – толщина пласта,  $Q_i$  – полный поток компонента газоконденсатной смеси с номером  $i$ .

Будем полагать, что все свойства и характеристики газа и конденсата определяются выражениями, едиными для обеих фаз [8]. Так,  $p_g = p(n_{ig}), p_c = p(n_{ic})$  – давление в газе и конденсате,  $\mu_g = \mu(n_{ig}), \mu_c = \mu(n_{ic})$  – сдвиговая вязкость газа и конденсата,  $\kappa_{ig} = \kappa_i(n_{ig}), \kappa_{ic} = \kappa_i(n_{ic})$  – химические потенциалы компонентов газа и конденсата.

Плотности компонентов газа и конденсата связаны условиями локального термодинамического равновесия

$$\kappa_{ig} = \kappa_{ic} \tag{2.3}$$

$$p_g - p_c = p_{\text{cap}} \tag{2.4}$$

Здесь  $p_{\text{cap}} = p_{\text{cap}}(s_c) \geq 0$  – капиллярный скачок давления. Предполагается, что  $p_{\text{cap}} = p_{\text{cap}}(s_c) \geq 0$  – гладкая монотонно убывающая функция насыщенности конденсата  $s_c$ ,  $p_{\text{cap}}(1) = 0$ .

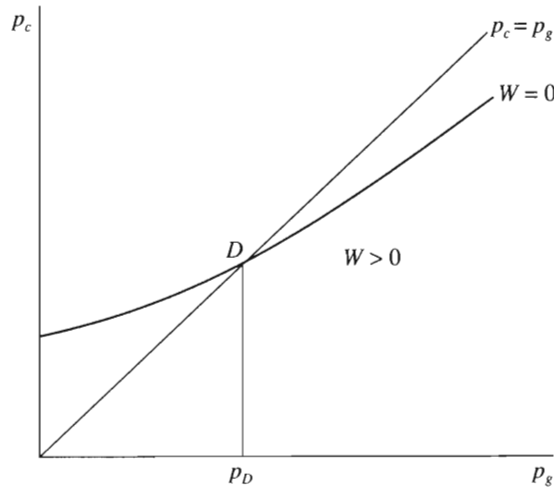
Введем обозначения:  $Q = \sum_i Q_i$  – полный поток всех компонентов смеси,  $n_g = \sum_i n_{ig}$ ,  $n_c = \sum_i n_{ic}$  – полные мольные плотности газа и конденсата соответственно,  $c_{ig} = n_{ig}/n_g$ ,  $c_{ic} = n_{ic}/n_c$  – концентрации компонентов газа и конденсата соответственно.

Из уравнений (2.2) следует соотношение, связывающее концентрации в фазах,

$$(1 - W)c_{ig} + Wc_{ic} = c_{i0} \tag{2.5}$$

$$W = -2\pi r h n_c u_c^r / Q = 1 + 2\pi r h n_g u_g^r / Q \tag{2.6}$$

Систему уравнений (2.3), (2.5) можно интерпретировать как описание распада смеси с составом  $c_{i0}$  на газ и конденсат с составами  $c_{ig}, c_{ic}$  и давлениями в фазах  $p_g, p_c$  соответственно. При этом  $W$  – мольная доля конденсата в смеси. Задача о распаде смеси  $c_{i0}$  на газ и конденсат не зависит от задачи фильтрации и может решаться средствами и методами химической термодинамики, например на основе выбранного



уравнения состояния для смеси [8]. При фиксированном наборе  $c_{i0}$  решение, вообще говоря, имеет следующий функциональный вид:

$$\begin{aligned} c_{ig} &= c_{ig}(p_g, p_c), & n_g &= n_g(p_g, p_c), & c_{ic} &= c_{ic}(p_g, p_c) \\ n_c &= n_c(p_g, p_c), & W &= W(p_g, p_c) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Выражения для частных производных  $\partial W/\partial p_g$ ,  $\partial W/\partial p_c$  приведены в приложении (разд. 4). Важно, что, когда при некоторой паре значений  $p_g, p_c$  функция  $W = W(p_g, p_c)$  обращается в нуль и конденсат отсутствует ( $\partial W/\partial p_c < 0$  (см. неравенство (4.8))). Следовательно, если при данном значении  $p_g$  уменьшить величину  $p_c$ , то в системе появится конденсат.

Напомним, что для газоконденсатных месторождений типична ситуация, когда далеко от скважины конденсат в пласте либо отсутствует, либо количество конденсата незначительно, и его подвижностью можно пренебречь. Поэтому концентрации  $c_{i0}$  описывают газовую фазу пластовой смеси. Вблизи скважины с понижением давления  $p_g$  газовая смесь становится термодинамически неустойчивой, и появляется подвижный конденсат (явление ретроградной конденсации). С учетом предыдущего замечания о характере зависимости функции  $W$  от  $p_c$  можно качественно представить положение кривой  $W = 0$  на плоскости  $p_g, p_c$  (фигура). Точка  $D$  на фигуре соответствует значению давления  $p_D$ , при котором газовая смесь становится насыщенной (точка росы).

Вместо пространственной координаты  $r$  удобно ввести переменную

$$\xi = Q(2\pi kh)^{-1} \ln(r/a) \quad (2.8)$$

Тогда из уравнений (1.4), (1.5), (2.6) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений для давлений в фазах

$$\frac{dp_g}{d\xi} = \frac{(1-W)f_4 n_g^{-1} - W f_3 n_c^{-1}}{\mu_g^{-1} f_1 f_4 + \mu_c^{-1} \Delta} \quad (2.9)$$

$$\frac{dp_c}{d\xi} = \frac{-(1-W)f_3 n_g^{-1} + W(\mu_c \mu_g^{-1} f_1 + f_2) n_c^{-1}}{\mu_g^{-1} f_1 f_4 + \mu_c^{-1} \Delta} \quad (2.10)$$

Уравнение (2.4) в силу монотонности правой части можно рассматривать как неявное определение насыщенности конденсата в виде функции разности давлений в

фазах  $s_c = s_c(p_g - p_c)$ . После подстановки этой функции в систему уравнений (2.9), (2.10) получается замкнутая задача для определения давлений  $p_g = p_g(\xi)$ ,  $p_c = p_c(\xi)$ .

В силу автономности системы уравнений (2.9), (2.10) одно решение задачи  $p_g = p_g(\xi)$ ,  $p_c = p_c(\xi)$  генерирует множество других решений  $p_g = p_g(\xi + \xi_0)$ ,  $p_c = p_c(\xi + \xi_0)$ , где величина  $\xi_0$  произвольна. Вспоминая определение переменной  $\xi$  (2.8), можно сделать вывод, что одно найденное решение позволяет автоматически получить решение исходной фильтрационной задачи (2.1), (2.3), (2.4) при любых иных значениях параметров  $Q, k, h, a$ .

Решение задачи фильтрации газоконденсатной смеси должно удовлетворять обычным граничным условиям – задается давление на забое скважины  $p_w$  и давление в пласте  $p_0$

$$p_g|_{r=r_w} = p_w, \quad p_g|_{r=r_0} = p_0 \tag{2.11}$$

где  $r_w$  – радиус скважины,  $r_0$  – радиус контура питания. Дебит скважины  $Q$  определяется из решения задачи с учетом условий (2.11).

Следует отметить, что решение задачи фильтрации газоконденсатной смеси, вообще говоря, не определяется однозначно граничными условиями (2.11). В самом деле, траектории системы (2.9), (2.10) в общем случае непрерывно заполняют плоскость  $p_g, p_c$  и, следовательно, образуют однопараметрическое семейство. Выбирая любую траекторию, можно из условий (2.11) определить значения параметра  $\xi$ , соответствующие радиусам  $r_w, r_0$ , а затем из уравнения (2.8) вычислить параметры  $Q, a$ . Таким образом, можно получить бесконечно много решений фильтрационной задачи, и необходимо иметь дополнительный критерий для отбора единственного решения.

Рассмотрим проблему неединственности решения более подробно. В соответствии с соотношением (2.6) конденсат подвижен только при условии  $W > 0$ . Следовательно, если имеется ненулевой порог подвижности конденсата  $s_{c1} > 0$ , то при  $W > 0$  насыщенность конденсата должна быть выше этого порога  $s_c > s_{c1}$ . При  $W = 0$  конденсат неподвижен (если он существует), следовательно,  $f_2 = f_3 = f_4 = 0$  и уравнение (2.9) приводится к виду

$$\frac{dp_g}{d\xi} = \frac{\mu_g}{f_1 n_g} \tag{2.12}$$

При этом в правой части уравнений (2.9), (2.10) имеется неопределенность типа 0/0. Для уравнения (2.9) эта неопределенность устранимая – деление числителя и знаменателя правой части на  $f_4$  позволяет доказать непрерывность в точке перехода от однофазного течения к двухфазному. В уравнении (2.10) неопределенность 0/0 неустранима. Именно с этим связана неединственность решения: система (2.9), (2.10) не удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности Пикара – Линдлефа для обыкновенных дифференциальных уравнений [9].

С физической точки зрения, можно выявить два механизма возникновения неоднозначности.

1°. Пусть  $s_c = s_c(p_g)$  – значение насыщенности в зависимости от давления в газовой фазе, полученное в результате исключения параметра  $p_c$  из уравнений  $W(p_g, p_c) = 0$  и (2.4). Другими словами, это такое предельное значение насыщенности конденсата, что смесь с составом  $c_{i0}$  не может распадаться в пористой среде на газовую фазу с давлением  $p_g$  и жидкую фазу с насыщенностью в интервале  $[s_c(p_g), 1]$ . Тогда при некоторых значениях давления в газовой фазе выше давления насыщения  $p_g > p_D$  возможно выполнение неравенства  $s_c(p_g) < s_{c1}$ . В этом случае подвижная газовая фаза с составом  $c_{i0}$  может сосуществовать в термодинамическом равновесии с неподвижной жидкой фазой, причем насыщенность жидкой фазы лежит в интервале  $[s_c(p_g), s_{c1}]$ . Несмотря на

то что жидкость неподвижна, она влияет на поле давления, так как в правой части уравнения (2.12) присутствует коэффициент  $f_1 = f_1(s_c)$ .

Отсутствие или присутствие неподвижной жидкой фазы не противоречит основным уравнениям фильтрационной задачи (2.1), (2.3), (2.4), поэтому в принципе допустимы решения с произвольным набором интервалов радиальной координаты  $r$ , в которых присутствует неподвижная жидкая фаза. Однако если рассматривается течение вблизи скважины, образовавшееся в результате постепенного снижения давления на забое скважины, и при этом изначально конденсат в пласте отсутствовал, то решения с неподвижной жидкостью следует исключить. Наоборот, если в пласте изначально существовал неподвижный конденсат, то он должен остаться и при установившемся течении.

2°. В точке  $\xi = \xi_r$  перехода от области  $W = 0$  к области  $W > 0$  происходит скачок насыщенности. Как обсуждалось выше, при  $\xi > \xi_r$  насыщенность конденсата равна нулю или лежит в интервале  $[s_c(p_g), s_{c1}]$ . При  $\xi < \xi_r$  насыщенность конденсата строго выше значения  $s_{c1}$  и одновременно строго ниже значения  $s_{c2}$ , соответствующего порогу подвижности для газа. Значение  $s_{ct} = s_c|_{\xi = \xi_r - 0}$  может быть выбрано произвольно в интервале  $s_{c1} < s_{ct} < s_{c2}$ , и этот выбор однозначно определяет решение в области  $\xi < \xi_r$ .

Как и в случае 1°, если установившееся течение является результатом монотонной эволюции пластовой системы, в которой конденсат изначально отсутствовал, необходимо выбрать решение с минимальным значением насыщенности конденсата. Это соответствует граничному условию

$$s_{ct} = s_{c1} \quad (2.13)$$

Итак, выбор решений должен основываться на предыстории пластовой системы в целом. В дальнейшем будем рассматривать решение с минимально возможным количеством конденсата. В области  $W = 0$  конденсат отсутствует и поле давления определяется уравнением (2.12) с  $f_1 = 1$ . В области  $W > 0$  решение задачи определяется системой (2.9), (2.10) с граничным условием (2.13).

Напомним, что характерной особенностью газоконденсатных течений является малое значение отношения вязкостей  $(\mu_g/\mu_c) \sim 10^{-3}-10^{-2}$ , поэтому представляет интерес асимптотическое поведение решений в пределе малых отношений  $(\mu_g/\mu_c)$ . Положим  $\mu_g = \epsilon \mu_c \phi$ , где  $\epsilon$  – малая безразмерная величина,  $\phi$  – конечная безразмерная функция. Система уравнений (2.9), (2.10) преобразуется к виду

$$\frac{dp_g}{d\xi} = \epsilon \mu_c \phi \frac{(1-W)f_4 n_g^{-1} - W f_3 n_c^{-1}}{f_1 f_4 + \epsilon \phi \Delta} \quad (2.14)$$

$$\frac{dp_c}{d\xi} = \mu_c \frac{-(1-W)\epsilon \phi f_3 n_g^{-1} + W(f_1 + \epsilon \phi f_2) n_c^{-1}}{f_1 f_4 + \epsilon \phi \Delta} \quad (2.15)$$

Если в этих уравнениях при  $\epsilon \rightarrow 0$  величина  $f_1$  остается конечной и положительной, то в главном приближении получаются уравнения

$$\frac{dp_g}{d\xi} = 0, \quad \frac{dp_c}{d\xi} = \mu_c \frac{W}{n_c f_4}$$

Следовательно, при уменьшении  $\xi$  давление в конденсате монотонно убывает, что в силу условия (2.4) влечет монотонное уменьшение насыщенности и подвижности конденсата. Однако выше отмечалось, что в области  $W > 0$  конденсат заведомо подвижный. Это противоречие означает, что в действительности при  $\epsilon \rightarrow 0$  величина  $f_1$  стре-

мится к нулю, т.е. насыщенность  $s_c$  сходится к величине  $s_{c2}$ , соответствующей порогу подвижности для газа. При этом в соответствии с условием (2.4) величина капиллярного скачка сходится к некоторой постоянной  $\delta_{cap}$ , не зависящей от переменной  $\xi$ .

Из уравнений (2.14), (2.15) и условия

$$d(p_g - p_c)/d\xi = O(\epsilon)$$

можно вычислить главную асимптотику для  $f_1$

$$\begin{aligned} f_1 &= \epsilon\phi((W^{-1} - 1)f_{4*}n_c n_g^{-1} + f_{3*}(-1 + (W^{-1} - 1)n_c n_g^{-1}) - f_{2*}) \\ f_{2*} &= f_2(s_{c2}), \quad f_{3*} = f_3(s_{c2}), \quad f_{4*} = f_4(s_{c2}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставляя выражение (2.16) в правую часть уравнения (2.14), получаем приближенное уравнение для давления в газовой фазе

$$\frac{dp_g}{d\xi} = F; \quad F = \frac{\mu_c W}{n_c(f_{3*} + f_{4*})} + O(\epsilon) \quad (2.17)$$

Можно найти выражение для функции  $F$  с более высоким порядком точности, используя непрерывность правой части уравнения (2.9) в точке перехода от однофазного течения к двухфазному. В самом деле, поскольку  $W = 0$  при  $\xi = \xi_r$ , получаем выражение

$$F = \frac{\mu_c W}{n_c(f_{3*} + f_{4*})} + \frac{\mu_g}{n_g} + O(\epsilon^2) \quad (2.18)$$

Величины в правой части уравнения (2.17), вообще говоря, это функции давления в газовой и жидкой фазе. Однако в силу соотношения  $p_c = p_g - \Delta p$  можно считать  $F$  функцией одного аргумента  $p_g$ , поэтому можно найти решение при  $\xi < \xi_r$  в неявном виде

$$\xi_r - \xi = \int_{p_g}^{p_t} \frac{dp_g}{F(p_g)} \quad (2.19)$$

где  $p_t$  – давление в точке  $\xi_r$ . Решение (2.19) должно быть состыковано с решением при  $\xi > \xi_r$ , определяемым из уравнения (2.12).

В конечном уравнении для давления в газе (2.17) входит сумма прямого и перекрестного коэффициента относительной проницаемости. Можно видеть, что влияние перекрестного коэффициента приводит к уменьшению градиента давления (т.е. к уменьшению депрессии) при заданном дебите скважины.

**3. Решение в аналитическом виде.** Рассмотрим течение газоконденсатной смеси, описываемое уравнением (2.12) в однофазной области и уравнением (2.17) в двухфазной области. В уравнении (2.12) коэффициент  $f_1$  предполагается равным единице. Решение в аналитическом виде может быть получено, только если можно представить правые части уравнений (2.12), (2.17) в виде достаточно простых выражений.

В уравнении (2.12) примем, что вязкость газа  $\mu_g$  постоянна. Уравнение состояния примем в виде

$$p_g = ZRTn_g$$

где  $Z$  – постоянный безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом сверхсжимаемости,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура в пласте. Тогда уравнение (2.12) легко интегрируется

$$p_g^2 - p_t^2 = 2\mu_g ZRT(\xi - \xi_t) \quad (3.1)$$

В уравнении (2.17) примем, что вязкость конденсата  $\mu_c$  и плотность конденсата  $n_c$  – постоянные. Отмечалось [5], что в отсутствие капиллярных сил функция мольной доли конденсата  $W$  хорошо описывается выражением

$$W = a_1 p + a_2 / (p - a_3) \quad (3.2)$$

Здесь  $a_1, a_2, a_3$  – положительные постоянные, определяемые по двум точкам – точке росы и точке максимума функции  $W$  [6]. Другими словами, эти постоянные должны быть найдены из системы уравнений

$$W(p_D) = 0, \quad W(p_m) = W_m, \quad \frac{dW}{dp}(p_m) = 0 \quad (3.3)$$

где  $p_m$  – давление, при котором функция  $W$  принимает максимальное значение  $W_m$ . Система уравнений (3.3) имеет два набора решений при  $p_m/p_D > 0.75$ . Наилучшая аппроксимация экспериментальных кривых контактной конденсации достигается для набора коэффициентов с меньшим значением  $a_3$ .

При учете капиллярных сил необходима модификация выражения (3.2). Наиболее простое обобщение выражения для мольной доли конденсата может быть получено добавлением в правую часть (3.2) слагаемого, линейного по давлению в жидкой фазе,

$$W = a_1 p_g + a_2 / (p_g - a_3) + a_4 (p_g - p_c) \quad (3.4)$$

Здесь  $a_4$  – положительный коэффициент, который должен быть подобран из экспериментальных данных по капиллярной конденсации. Видно, что выражение (3.4) удовлетворяет неравенству (4.8) (см. ниже разд. 4). При фиксированном капиллярном скачке  $p_g - p_c = \delta_{\text{cap}}$  функция  $W$  обращается в нуль в двух точках:  $p_*, p_t$ , причем выполнены неравенства  $p_* < p_D < p_t$ . Таким образом, справедлива формула

$$W = a_1 (p_g - p_*) (p_g - p_t) / (p_g - a_3)$$

Поэтому уравнение (2.17) с точностью до членов  $O(\varepsilon^2)$  приводится к виду

$$\frac{dp_g}{d\xi} = \frac{a_1 \mu_c (p_g - b_1) (p_g - b_2)}{n_c (f_{3*} + f_{4*}) (p_g - a_3)}$$

$$b_1 = p_* + b_0 (p_* - a_3), \quad b_2 = p_t - b_0 (p_t - a_3)$$

$$b_0 = \frac{\mu_g ZRT n_c (f_{3*} + f_{4*})}{a_1 \mu_c p_t (p_t - p_*)}$$

Отсюда в соответствии с формулой (2.18) получается неявное решение задачи в двухфазной области

$$\frac{b_1 - a_3}{b_1 - b_2} \ln \frac{p_t - b_1}{p_g - b_1} + \frac{b_1 - a_3}{b_1 - b_2} \ln \frac{b_2 - p_t}{b_2 - p_g} = \frac{\mu_c (\xi_t - \xi)}{n_c (f_{3*} + f_{4*})} \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) показывает, что перекрестный коэффициент относительной фазовой проницаемости  $f_3$  присутствует в решении в сумме с коэффициентом  $f_4$  и приводит к увеличению подвижности конденсата. Коэффициент  $f_2$  из конечного решения выпадает.

**4. Приложение.** Ниже приводится вывод дифференциальных соотношений, которым удовлетворяют функции (2.7). По повторяющимся индексам, соответствующим номерам компонентов, проводится суммирование. Удобно использовать термодинамический потенциал (энергию Гиббса) смеси  $\psi = \psi(p, c_i) = c_i k_i$ . Поскольку концентрации удовлетворяют условию нормировки

$c_1 + c_2 + \dots + c_M = 1$ , то функция  $\Psi$  фактически зависит от концентраций  $c_1, \dots, c_{M-1}$ . Будем использовать греческие индексы  $\alpha, \beta = 1, \dots, (M - 1)$ , соответствующие этому сокращенному набору концентраций. Также введем обозначения для частных производных:  $\Psi_{,\alpha} = \partial\Psi/\partial c_\alpha, \Psi_{,p} = \partial\Psi/\partial p$ .

Напомним известные соотношения, которым удовлетворяет термодинамический потенциал [5]

$$\Psi_{,\alpha} = \kappa_\alpha - \kappa_M, \quad \Psi_{,p} = n \tag{4.1}$$

С учетом соотношений (4.1) условия фазового равновесия (2.3) запишем в виде

$$\Psi_{,\alpha g} = \Psi_{,\alpha c} \tag{4.2}$$

$$\Psi_g - c_{\alpha g} \Psi_{,\alpha g} = \Psi_c - c_{\alpha c} \Psi_{,\alpha c} \tag{4.3}$$

Дифференцирование  $2M-1$  независимых равенств (2.5), (4.2), (4.3) приводит к  $2M-1$  линейным уравнениям, связывающим  $2M + 1$  дифференциалов концентраций  $dc_{\alpha g}, dc_{\alpha c}$ , давлений  $dp_g, dp_c$  и мольной доли конденсата  $dW$ . Из этих уравнений можно выразить дифференциалы  $dc_{\alpha g}, dc_{\alpha c}, dW$  как линейные функции дифференциалов  $dp_g, dp_c$ .

Чтобы записать эти выражения в компактном виде, удобно перейти к сокращенному матричному описанию для величин, зависящих от греческих индексов. Так, для векторов  $\eta = (\eta_\alpha), \eta' = (\eta'_\alpha)$  определим скалярное произведение по формуле  $(\eta, \eta') = \eta_\alpha \eta'_\alpha$ . Кроме того, введем обозначения

$$c_g = (c_{\alpha g}), \quad c_c = (c_{\alpha c})$$

$$A_g = (A_{\alpha\beta g}) = (\Psi_{,\alpha\beta g}), \quad B_g = (B_{\alpha g}) = (n_g^{-2} n_{,\alpha g})$$

$$A_c = (A_{\alpha\beta c}) = (\Psi_{,\alpha\beta c}), \quad B_c = (B_{\alpha c}) = (n_c^{-2} n_{,\alpha c})$$

$$b_g = n_g^{-1} + (B_g, c_g), \quad b_c = n_c^{-1} + (B_c, c_c)$$

$$\Gamma_g = WA_g, \quad \Gamma_c = (1 - W)A_c$$

Отметим, что обе фазы – газ и конденсат – предполагаются локально термодинамически устойчивыми, поэтому матрицы  $A_g, A_c$  – положительные.

Дифференцируя соотношения (2.5), (4.2), (4.3), получаем уравнения

$$Wdc_c + (1 - W)dc_g + (c_c - c_g)dW = 0$$

$$A_g dc_g - B_g dp_g = A_c dc_c - B_c dp_c \tag{4.4}$$

$$(c_g, A_g dc_g) - b_g dp_g = (c_c, A_c dc_c) - b_c dp_c$$

Исключая из этих уравнений дифференциалы концентраций, получаем выражение для дифференциала мольной доли конденсата

$$dW = \omega_0^{-1} (\omega_g dp_g - \omega_c dp_c) \tag{4.5}$$

$$\omega_0 = \frac{(c_g - c_c, (\Gamma_g - \Gamma_g(\Gamma_g + \Gamma_c)^{-1}\Gamma_c)(c_g - c_c))}{W(1 - W)}$$

$$\omega_g = b_g - (\Gamma_g c_g + \Gamma_c c_c, (\Gamma_g + \Gamma_c)^{-1} B_g)$$

$$\omega_c = b_c - (\Gamma_g c_g + \Gamma_c c_c, (\Gamma_g + \Gamma_c)^{-1} B_c)$$

Аналогичным образом получают выражения для дифференциалов концентраций

$$dc_g = (\Gamma_g + \Gamma_c)^{-1} ((WB_g + \omega_0^{-1} \omega_g A_c (c_c - c_g)) dp_g - (WB_c + \omega_0^{-1} \omega_c A_c (c_c - c_g)) dp_c) \quad (4.6)$$

$$dc_c = (\Gamma_g + \Gamma_c)^{-1} (((W-1)B_g + \omega_0^{-1} \omega_g A_g (c_c - c_g)) dp_g - ((W-1)B_c + \omega_0^{-1} \omega_c A_g (c_c - c_g)) dp_c) \quad (4.7)$$

Соотношения (4.5–4.7) могут быть использованы в численных алгоритмах определения функций  $c_{ig} = c_{ig}(p_g, p_c)$ ,  $c_{ic} = c_{ic}(p_g, p_c)$ ,  $W = W(p_g, p_c)$  методом малых приращений давлений в фазах.

Особый интерес представляет поведение дифференциала  $dW$  в точках, где  $W = 0$ . Для этого случая из формулы (4.5) получается выражение

$$\frac{\partial W}{\partial p_c} = -n_c^{-1} ((c_c - c_g), A_g (c_c - c_g))^{-1} < 0 \quad (4.8)$$

В силу непрерывности неравенство (4.8) сохраняет силу в некоторой окрестности кривой  $W = 0$ . Таким образом, в случае малой мольной доли конденсата понижение давления в конденсате вызывает прирост количества конденсата (капиллярная конденсация).

Работа поддержана международной нефтяной и газовой компанией Schlumberger Oilfield Services.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В.Н., Бондарев Э.А., Миркин М.И. и др. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 192 с.
2. Динариев О.Ю. Описание течения газоконденсатной смеси в осесимметричном капилляре методом функционала плотности // ПМТФ. 2003. Т. 44. Вып. 1. С. 101–107.
3. Курбанов А.К. Об уравнениях движения двухфазных жидкостей в пористой среде // Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1968. С. 281–286.
4. Groot S.R. de, Mazur P. Non-Equilibrium Thermodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1962 = Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
5. Динариев О.Ю. Многокомпонентные стационарные фильтрационные течения с фазовыми переходами // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 78–85.
6. Бабейко А.Ю., Динариев О.Ю. Моделирование ретроградной конденсации при стационарной радиальной фильтрации // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 92–97.
7. Динариев О.Ю. Ретроградная конденсация при стационарной радиальной фильтрации // Инж.-физ. журн. 1994. Т. 67. Вып. 1–2. С. 98–102.
8. Гуревич Г.Р., Брусиловский А.И. Справочное пособие по расчету фазового состояния и свойств газоконденсатных смесей. М.: Недра, 1984. 264 с.
9. Hartman Ph. Ordinary Differential Equations. N.J., etc.: Wiley, 1964 = Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.