УДК (532.5; 539.3):534.1

© 2005 г. Н. А. Кудряшов

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

Предлагается алгоритм нахождения первых интегралов нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, встречающихся при описании нелинейных волновых процессов. Применение метода иллюстрируется рядом примеров. Найденные первые интегралы использованы для построения решения обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза пятого порядка в переменных бегущей волны, которое выражается через гиперэллиптические интегралы.

1. Введение. По существу нахождение первых интегралов – одна из основных задач механики и теории дифференциальных уравнений (ДУ) при попытках получить общее решение той или иной задачи в квадратурах.

Для описания волн на воде было предложено [1, 2] несколько ДУ пятого порядка. Одно из них имеет вид

$$\eta_t + \left(\frac{5}{6} - \chi^2 - \frac{\tau}{2}\right)\left(\chi^2 - \frac{2}{3}\right)\beta^2\eta_{\xi\xi\xi\xi\xi} + \left(\frac{53}{24} - \frac{11}{4}\chi^2 - \frac{9}{8}\tau\right)\alpha\beta\eta\eta_{\xi\xi\xi} +$$

$$+\left(\frac{1}{6} - \frac{\tau}{2}\right)\beta\eta_{\xi\xi\xi} - \left(\frac{139}{24} - 7\chi^2 + \frac{27}{8}\tau\right)\alpha\beta\eta_\xi\eta_{\xi\xi} - \frac{45}{32}\alpha^2\eta^2\eta_\xi + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_\xi + \eta_\xi = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь α и β – малые параметры

$$\alpha = a/h, \quad \beta = h/l$$

a – амплитуда возмущения, h – глубина жидкости, l – длина волны, τ – безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, χ – безразмерное расстояние от поверхности ($0 \le \chi \le 1$), $\eta(\xi, t)$ – профиль волны, зависящий от координаты ξ и времени t.

При произвольных значениях параметров α, β и τ уравнение (1.1) не относится к классу точно решаемых уравнений, поскольку оно не проходит тест Пэнлеве [3]. Используя подход, аналогичный примененному ранее [3], удается найти лишь некоторый набор частных решений. Однако при специальном выборе переменных и параметров

$$\eta = \frac{16}{3\beta'\alpha}w, \quad \xi = Lz, \quad t = -\frac{3L\beta'^2}{4}t', \quad \tau = \frac{11}{9}, \quad \chi = 0, \quad \beta = \frac{3L^2}{\beta'} \qquad (1.2)$$

уравнение (1.1) преобразуется к нелинейному уравнению пятого порядка (штрихи у β' и t' опущены)

$$w_t + w_{zzzzz} - 10ww_{zzz} + \beta w_{zzz} - 20w_zw_{zz} + 30w^2w_z - 6\beta ww_z = 0 \qquad (1.3)$$

При $\beta = 0$ уравнение (1.3) является уравнением Кортевега – де Вриза пятого порядка. С уравнением (1.3) преобразованием Миуры [4–6] связано обобщенное модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза пятого порядка

$$w_t + w_{zzzzz} + \beta w_{zzz} - 40ww_zw_{zz} - 10w^2w_{zz} - 10w_z^3 + 30w^2w_z - 6\beta w^2w_z = 0 \qquad (1.4)$$

Если искать решения волновых уравнений (1.3), (1.4) в переменных бегущей волны

$$w(z, t) = y(x), \quad x = z - c_0 t$$

то из уравнений (1.3), (1.4) после интегрирования по x приходим к нелинейным обыкновенным ДУ

$$y_{xxxx} - 10yy_{xx} - 5y_x^2 + 10y^3 + \beta(y_{xx} - 3y^2) + \delta y + \mu = 0 \quad (1.5)$$

$$y_{xxxx} - 10y^2y_{xx} - 10yy_x^2 + 6y^5 + \beta(y_{xx} - 2y^3) + \delta y + \mu = 0 \quad (1.6)$$

Здесь введены обозначения: $\delta = -c_0$ и μ – постоянная интегрирования.

Возникает задача нахождения общего решения уравнений (1.5) и (1.6). Известно, что для интегрирования N обыкновенных ДУ в общем случае необходимо знать N первых интегралов. Однако для автономных систем достаточно знать $N - 1$ первых интегралов, а для интегрирования гамильтоновых систем в квадратурах, как правило, достаточно знать $N/2$ первых интегралов, что следует из теоремы Лиувилля [7–9].

Нахождение первых интегралов многих нелинейных ДУ (особенно высокого порядка) часто сопряжено с большими трудностями, что объясняется отсутствием общего подхода к решению этой задачи.

В данной работе предлагается алгоритм нахождения первых интегралов нелинейных ДУ, имеющих вид полиномов, от зависимой переменной и ее производных. Алгоритм состоит из следующих этапов: 1) выбор ведущих членов нелинейного ДУ, 2) написание полинома с неопределенными коэффициентами, соответствующего первому интегралу нового ДУ, содержащего ведущие члены исходного уравнения, 3) решение систем линейных алгебраических уравнений для коэффициентов первого интеграла нового ДУ с ведущими членами исходного ДУ, 4) написание полинома с неопределенными коэффициентами, соответствующего исходному уравнению, 5) решение систем алгебраических уравнений для коэффициентов нового полинома и представление первых интегралов исходного ДУ.

Следует заметить, что реализация данного алгоритма едва ли возможна без использования широко распространенных в настоящее время программ аналитических вычислений типа MAPLE и MATHEMATICA.

Предлагаемый алгоритм иллюстрируется при нахождении первых интегралов уравнений (1.5), (1.6) и следующих нелинейных ДУ четвертого порядка, также встречающихся в волновой динамике:

$$y_{xxxx} + 5y_xy_{xx} - 5y^2y_{xx} - 5yy_x^2 + y^5 - \delta = 0 \quad (1.7)$$

$$y_{xxxx} - 4\frac{y_xy_{xxx}}{y} - 3\frac{y_{xx}^2}{y} + \frac{21}{2}\frac{y_x^2y_{xx}}{y^2} - 5\delta\frac{y_{xx}}{y^2} - \frac{9}{2}\frac{y_x^4}{y^3} + 10\delta\frac{y_x^2}{y^3} + \nu y^2 - 2\delta^2\frac{1}{y^3} + \mu = 0 \quad (1.8)$$

$$y_{xxxx} - 2\frac{y_xy_{xxx}}{y} - \frac{3}{2}\frac{y_{xx}^2}{y} + 2\frac{y_x^2y_{xx}}{y^2} - 5y^2y_{xx} - \frac{5}{2}yy_x^2 + \frac{5}{2}y^5 - \beta y^3 + \mu y = 0 \quad (1.9)$$

Уравнение (1.7) – стационарный случай уравнения Савада – Котеры, используемого при описании ряда волновых процессов [10]. Если в правую часть уравнения (1.7) добавить выражение αxy, где α – параметр, y и x – зависимая и независимая переменные, то уравнение (1.7) определяет новую неклассическую специальную функцию, выраженную через решения нелинейного ДУ четвертого порядка [11–13]. Уравнение (1.5) при $\beta = 0$ широко известно. Оно замечательно тем, что при добавлении в правую часть выражения αx (α – параметр, x – переменная) также определяет новые специальные функции. Все ДУ, указанные выше, являются частными случаями ДУ, которое возникает в модели Хенона и Хейлеса при описании поведения звезды в среднем поле галактики [14–16]. Уравнения (1.8) и (1.9), найденные автором [17–19], возникают как частные случаи высших аналогов уравнений Пэнлеве, определяющих новые специальные функции.

Для того чтобы построить общие решения уравнений (1.5)–(1.9) в квадратурах, требуется найти, по крайней мере, два первых интеграла этих уравнений.

2. Алгоритм поиска первых интегралов. В действительности, все перечисленные выше ДУ имеют по одному, достаточно очевидному, первому интегралу, который находится путем умножения ДУ на производную y_x и деления на некоторую степень y. Однако еще один первый интеграл столь же просто найти не удается. Поэтому будем использовать единый подход для нахождения первых интегралов всех перечисленных выше ДУ.

Остановимся на определении первого интеграла ДУ. Для удобства вычислений введем обозначения

$$y = y_0, \quad y_x = y_1, \quad y_{xx} = y_2, \quad y_{xxx} = y_3, \quad y_{xxxx} = y_4$$

Пусть требуется найти первый интеграл следующего нелинейного ДУ:

$$y_4 = E(y_0, y_1, y_2, y_3) \tag{2.1}$$

Пусть также имеется первый интеграл уравнения (2.1) в виде

$$P(y_0, y_1, y_2, y_3) = C_1 \tag{2.2}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

В соответствии с определением первого интеграла для автономного ДУ первый интеграл (2.2) удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\sum_{n=0}^{3} y_{n+1}\frac{\partial P}{\partial y_n} = Q(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)(y_4 - E(y_0, y_1, y_2, y_3)) \tag{2.3}$$

где $Q(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ – некоторое выражение, которое может зависеть от переменной y и ее производных. Принимая во внимание, что y_4 удовлетворяет уравнению (2.1), из уравнения (2.3) получаем

$$\sum_{n=0}^{2} y_{n+1}\frac{\partial P}{\partial y_n} + E(y_0, y_1, y_2, y_3)\frac{\partial P}{\partial y_3} = 0 \tag{2.4}$$

Это основное уравнение, из которого находятся первые интегралы указанных выше нелинейных ДУ.

Для реализации первого этапа предлагаемого алгоритма в исследуемое ДУ подставляются выражения

$$\begin{gathered} y_0 = B_0/x^p, \quad y_1 = -pB_0/x^{p+1}, \quad y_2 = p(p+1)B_0/x^{p+2} \\ y_3 = -p(p+1)(p+2)B_0/x^{p+3}, \quad y_4 = p(p+1)(p+2)(p+3)B_0/x^{p+4} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Следует заметить, что формулы (2.5) совпадают с соответствующими формулами алгоритма Пэнлеве – Ковалевской при анализе нелинейных ДУ на свойство Пэнлеве. Сравнивая члены ДУ и выбирая наименьшую степень в полученных выражениях, находим значение показателя степени p (это значение для точно решаемого ДУ, как правило, всегда равно целому числу, обычно единице или двум). Проделав указанную процедуру, получаем, что для уравнения (1.5) $p = 2$, а для уравнений (1.6)–(1.9) $p = 1$. Например, ведущими членами уравнения (1.7) являются все слагаемые, за исключением последнего.

ДУ, составленное из ведущих членов уравнения (1.7), принимает вид

$$y_{xxxx} + 5y_x y_{xx} - 5y^2 y_{xx} - 5yy_x^2 + y^5 = 0 \tag{2.6}$$

Подставляя выражение (2.5) при $p = 1$ в уравнение (2.6), получаем, что все члены этого ДУ имеют степень x^{-5}. Естественно ожидать, что первые интегралы уравнения (2.6) будут иметь вид полиномов, состоящих также из членов одной степени при подстановке (2.5), и что они будут иметь меньшую степень, чем члены уравнения (2.6). Поэтому следующий этап нахождения первых интегралов уравнения (1.7) – построение полинома с неопределенными коэффициентами, все члены которого имеют одинаковую, но меньшую степень, чем уравнение (2.6). Полином такого вида можно построить, используя следующую рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} &P_{k+4} = y_3 P_k + y_2 P_{k+1} + y_1 P_{k+2} + y_0 P_{k+3}, \quad k = 0, \ldots, n \\ &P_0 = 1, \quad P_1 = y_0, \quad P_2 = y_1 + y_0^2, \quad P_3 = y_0^3 + y_0 y_1 + y_2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Как результат вычисления по формуле (2.7) находится полином, каждый член которого при подстановке в него выражений (2.5) имеет одинаковую степень. Для построения простейших первых интегралов указанных выше ДУ следует выбрать полином, для которого $n \geq 6$.

В данной работе при нахождении первых интегралов всех ДУ использован полином, в котором $n = 12$. В полиноме, найденном по формулам (2.7), при каждом из членов вводятся неопределенные коэффициенты, нахождение которых приводит к построению первого интеграла соответствующего ДУ. Ниже использован полином с неопределенными коэффициентами в виде

$$\begin{aligned} P_{12} = {} & a_0 y_3^3 + (a_1 y_0 y_2 + a_2 y_1^2 + a_3 y_0^2 y_1 + a_4 y_0^4) y_3^2 + (a_5 y_1 + a_6 y_0^2) y_2^2 y_3 + \\ & + (a_7 y_0 y_1^2 + a_8 y_0^3 y_1 + a_9 y_0^5) y_2 y_3 + (a_{10} y_1^4 + a_{11} y_0^2 y_1^3 + a_{12} y_0^4 y_1^2 + a_{13} y_0^6 y_1 + a_{14} y_0^8) y_3 + \\ & + b_0 y_2^4 + (b_1 y_0 y_1 + b_2 y_0^3) y_2^3 + (b_3 y_1^3 + b_4 y_0^2 y_1^2 + b_5 y_0^4 y_1 + b_6 y_0^6) y_2^2 + \\ & + (b_7 y_0 y_1^4 + b_8 y_0^3 y_1^3 + b_9 y_0^5 y_1^2 + b_{10} y_0^7 y_1 + b_{11} y_0^9) y_2 + \\ & + c_0 y_1^6 + (c_1 y_1^4 + c_2 y_0^2 y_1^3 + c_3 y_0^4 y_1^2 + c_4 y_0^6 y_1 + c_5 y_0^8) y_0^2 y_1 + c_6 y_0^{12} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Полином (2.8) с неопределенными коэффициентами $a_0, \ldots, a_{14}, b_0, \ldots, b_{11}, c_0, \ldots, c_6$ использован для построения первых интегралов уравнения (2.6) в виде

$$P = P_{12}/y_0^{12-j} = C_1, \quad j = 6, \ldots, 12 \tag{2.9}$$

Подставляя выражение (2.9) при $j = 6$ в уравнение (2.6) и определяя коэффициенты полинома (2.8) путем решения линейных алгебраических уравнений, получаем простейший первый интеграл уравнения (2.6)

$$P(y_0, y_1, y_2, y_3) \equiv y_1 y_3 - \frac{1}{2} y_2^2 + \frac{5}{3} y_1^3 - \frac{5}{2} y_0^2 y_1^2 + \frac{1}{6} y_0^6 = C_1 \tag{2.10}$$

Видно, что порядок степени каждого слагаемого в (2.10) после подстановки в него выражений (2.5) равен шести. Из уравнения (2.10) следует, что простейший первый интеграл уравнения (1.7) принимает вид

$$P(y, y_x, y_{xx}, y_{xxx}) - \delta y = K_1 \tag{2.11}$$

Здесь K_1 и далее K_2, K_3, K_4 – произвольные постоянные.

Решая алгебраические уравнения для коэффициентов $a_0, \ldots, a_{14}, b_0, \ldots, b_{11}, c_0, \ldots, c_6$ полинома (2.8), находим, что при $j = 7, 8, 9, 10, 11$ все эти коэффициенты равны нулю. Однако при $j = 12$ получаем полином, который может быть представлен в виде еще одного независимого первого интеграла

$$y_3^3 + \left(\frac{3}{2}y_0^4 - 9y_0^2y_1\right)y_3^2 + F_1(y_0, y_1, y_2)y_3 - \frac{15}{8}y_2^4 + 2y_0^3y_2^3 +$$

$$+ F_2(y_0, y_1)y_2^2 + F_3(y_0, y_1)y_2 + F_4(y_0, y_1) = C_2 \tag{2.12}$$

где

$$F_1(y_0, y_1, y_2) = \left(\frac{15}{2}y_1 - 3y_0^0\right)y_2^2 + 3(y_1^2 - 2y_0^2y_1 + y_0^4)y_0y_2 - 7y_1^4 - \frac{9}{2}y_0^2y_1^3 + 30y_0^4y_1^2 - \frac{17}{2}y_0^6y_1$$

$$F_2(y_0, y_1) = \frac{25}{2}y_1^3 + 15y_0^4y_1 - \frac{117}{4}y_0^2y_1^2 - \frac{13}{4}y_0^6$$

$$F_3(y_0, y_1) = 9y_0y_1^4 - 30y_0^3y_1^3 + 36y_0^5y_1^2 - 18y_0^7y_1 + 3y_0^9$$

$$F_4(y_0, y_1) = -\frac{22}{3}y_1^6 + \frac{35}{2}y_0^2y_1^5 + \frac{45}{8}y_0^4y_1^4 - \frac{157}{6}y_0^6y_1^3 + \frac{19}{4}y_0^8y_1^2 + 3y_0^{10}y_1 - \frac{17}{24}y_0^{12}$$

В уравнении (2.12) C_2 – произвольная постоянная. Из выражения (2.12) видно, что каждый член этого ДУ имеет порядок сингулярности, равный двенадцати. Для нахождения первого интеграла исходного уравнения следует использовать новый полином с неопределенными коэффициентами в виде $\delta P_7 + \delta^2 P_2$. В результате получается еще один первый интеграл уравнения (1.7)

$$y_{xxx}^3 + \left(\frac{3}{2}y^4 - 9y^2y_x\right)y_{xxx}^2 + \tilde{F}_1(y, y_x, y_{xx})y_{xxx} - \frac{15}{8}y_{xx}^4 + 2y^3y_{xx}^3 +$$

$$+ \tilde{F}_2(y, y_x)y_{xx}^2 + \tilde{F}_3(y, y_x)y_{xx} + \tilde{F}_4(y, y_x) = K_2 \tag{2.13}$$

где

$$\tilde{F}_1(y, y_x, y_{xx}) = F_1(y, y_x, y_{xx}) - 3\delta y_{xx} + 9\delta y y_x, \quad \tilde{F}_2(y, y_x) = F_2(y, y_x) - \frac{9}{2}\delta y$$

$$\tilde{F}_3(y, y_x) = F_3(y, y_x) - 9\delta y_x^2 + 18\delta y^2 y_x - 3\delta y^4$$

$$\tilde{F}_4(y, y_x) = F_4(y, y_x) + 7\delta y y_x^3 - \frac{27}{2}\delta y^3 y_x^2 - (6\delta y^5 - 3\delta^2)y_x - \frac{9}{2}\delta^2 y^2$$

Подставляя y_{xxx} из уравнения (2.11) в уравнение (2.13), получаем ДУ второго порядка шестой степени, которое также является первым интегралом уравнения (1.7). Найденных двух первых интегралов достаточно, чтобы выразить общее решение уравнения (1.7) через гиперэллиптические интегралы, поскольку исходное ДУ можно записать в виде гамильтоновой системы.

3. Первые интегралы уравнений (1.5), (1.6), (1.8) и (1.9). Процедура нахождения первых интегралов уравнений (1.5), (1.6), (1.8) и (1.9) во многом аналогична описанной в предыдущем разделе для уравнения (1.7). Однако подстановка выражений (2.5) в уравнение (1.5) показывает, что степень сингулярного решения равна двум. Следовательно, соответствующее уравнение, состоящее из ведущих членов уравнения (1.5), принимает вид

$$y_{xxxx} - 10yy_{xx} - 5y_x^2 + 10y^3 = 0 \tag{3.1}$$

Полином с неопределенными коэффициентами для нахождения первых интегралов уравнения (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} P_{12} = {} & A_0 y_3^2 y_0 + A_1 y_3 y_2 y_1 + A_2 y_3 y_1 y_0^2 + A_3 y_2^3 + A_4 y_2^2 y_0^2 + \\ & + A_5 y_2 y_1^2 y_0 + A_6 y_2 y_0^4 + A_7 y_1^4 + A_8 y_1^2 y_0^3 + A_9 y_0^6 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Далее была использована формула (2.9) и найдены первые интегралы уравнения (3.1) с порядками степеней ведущих членов x^{-8} и x^{-10}. Принимая во внимание дополнительные полиномы, первый интеграл запишем в виде

$$y_x y_{xxx} - \frac{1}{2}y_{xx}^2 - 5yy_x^2 + \frac{5}{2}y^4 + \frac{1}{2}\beta(y_x^2 - 2y^3) + \frac{1}{2}\delta y^2 + \mu y = K_1 \tag{3.3}$$

Еще один первый интеграл уравнения (1.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & y_{xxx}^2 - 12yy_x y_{xxx} - 4yy_{xx}^2 + 2y_x^2 y_{xx} + 20y^3 y_{xx} + 30y^2 y_x^2 - 24y^5 + \\ & + \beta(y_{xx} - 3y^2)^2 + \delta(2yy_{xx} - y_x^2 - 4y^3) + 2\mu(y_{xx} - 3y^2) = K_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Этих двух первых интегралов достаточно, чтобы выразить общее решение уравнения (1.5) через гиперэллиптические интегралы.

Подставляя формулы (2.5) в уравнение (1.6), получаем порядок степени сингулярного решения, равный единице. Ведущие члены ДУ имеют степень x^{-5}. Для нахождения первых интегралов также использовался полином (2.8) двенадцатой степени. Полученные первые интегралы принимают вид

$$y_x y_{xxx} - \frac{1}{2}y_{xx}^2 - 5y^2 y_x^2 + y^6 + \frac{1}{2}\beta(y_x^2 - y^4) + \frac{1}{2}\delta y^2 + \mu y = K_1 \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} & y_{xxx}^2 - 12y^2 y_x y_{xxx} - 4y^2 y_{xx}^2 + 4yy_x^2 y_{xx} + 12y^5 y_{xx} - y_x^4 + 30y^4 y_x^2 - 9y^8 + \\ & + \beta(y_{xx} - 2y^3)^2 + \delta(2yy_{xx} - y_x^2 - 3y^4) + 2\mu(y_{xx} - 2y^3) = K_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

При нахождении первых интегралов уравнений (1.8) и (11.9) использован описанный выше алгоритм. Первый интеграл уравнения (1.8) принимает вид

$$\frac{y_x y_{xxx}}{y^2} - \frac{1}{2}\frac{y_{xx}^2}{y^2} - 2\frac{y_x^2 y_{xx}}{y^3} + \frac{9}{8}\frac{y_x^4}{y^4} - \frac{5}{2}\delta\frac{y_x^2}{y^4} + \frac{1}{2}\delta^2\frac{1}{y^4} - \mu\frac{1}{y} + \nu y = K_1 \tag{3.7}$$

При нахождении первого интеграла (3.7) сначала был найден первый интеграл уравнения, состоящего из ведущих членов, а затем часть интеграла, учитывающая слагаемые с параметрами.

Еще один первый интеграл уравнения (1.8) имеет вид

$$\frac{y_{xxx}^2}{y^2} - 6\frac{y_x y_{xx} y_{xxx}}{y^3} + 3\frac{y_x^2 y_{xxx}}{y^4} + 9\frac{y_x^2 y_{xx}^2}{y^4} - 9\frac{y_x^4 y_{xx}}{y^5} + \frac{9}{4}\frac{y_x^6}{y^6} -$$

$$-2\delta\left(3\frac{y_x y_{xxx}}{y^4} + \frac{y_{xx}^2}{y^4} - 10\frac{y_x^2 y_{xx}}{y^5} + \frac{19}{4}\frac{y_x^4}{y^6}\right) - \delta^2\left(4\frac{y_{xx}}{y^5} - 11\frac{y_x^2}{y^6}\right) - 2\delta^3\frac{1}{y^6} +$$

$$+ 2\nu y_{xx} - 3\nu\frac{y_x^2}{y} + 2\mu\frac{y_{xx}}{y^2} - \mu\frac{y_x^2}{y^3} + 6\delta\nu\frac{1}{y} + 2\delta\mu\frac{1}{y^3} = K_2 \tag{3.8}$$

Первый интеграл (3.8) получен с учетом сингулярной части уравнения (1.8), которая найдена сначала для ДУ, составленного из ведущих членов (ДУ при этом можно получить из уравнения (1.8), полагая в нем $\delta = \mu = \nu = 0$). Найденный первый интеграл совпадает с уравнением (3.8) при $\delta = \mu = \nu = 0$. Далее к полученному выражению добавляются дополнительные полиномы меньшей степени, учитывающие параметры δ, μ и ν.

Первый интеграл уравнения (1.9), полученный с помощью предложенного выше алгоритма, принимает вид

$$\frac{y_x y_{xxx}}{y} - \frac{1}{2}\frac{y_{xx}^2}{y} - \frac{y_x^2 y_{xx}}{y^2} - \frac{5}{2}y y_x^2 + \frac{1}{2}y^5 - \frac{1}{3}\beta y^3 + \mu y = K_1 \tag{3.9}$$

При нахождении первого интеграла (3.9) также принималась во внимание размерность параметров β и μ. Еще один первый интеграл уравнения (1.9) имеет вид

$$\frac{y_{xxx}^2}{y^2} - 2\frac{y_x y_{xx} y_{xxx}}{y^3} - 8 y_x y_{xxx} - \frac{1}{3}\frac{y_{xx}^3}{y^3} + \frac{y_x^2 y_{xx}^2}{y^4} - y_{xx}^2 + 11\frac{y_x^2 y_{xx}}{y} + 5y^3 y_{xx} +$$

$$+ 10y^2 y_x^2 - \frac{10}{3}y^6 + 2\mu\frac{y_{xx}}{y} - 4\mu y^2 - 2\beta y y_{xx} + 2\beta y_x^2 + 2\beta y^4 = K_2 \tag{3.10}$$

Приведенные выше интегралы могут быть использованы для построения общих решений уравнений (1.5)–(1.9)

4. Общее решение уравнения (1.5). В качестве иллюстрации алгоритма рассмотрим общее решение уравнения (1.5). Решение уравнения (1.5) при $\beta = 0$ было получено впервые Драшем [20], затем общее решение этого ДУ было переоткрыто другими авторами [21, 22].

Найдем общее решение уравнения (1.5) при $\beta \neq 0$. Используем переменные

$$H = y_{xx} - 3y^2 - \frac{1}{2}\delta, \quad I = y y_{xx} - \frac{1}{2}y_x^2 - 3y^3 - \frac{1}{2}\mu$$

Тогда первые интегралы (3.3) и (3.4) можно представить в виде

$$y_x H_x - \left(y^2 + \frac{1}{2}\delta - \beta y\right)H - (\beta + 2y)J - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}\beta\delta y = K_1 \tag{4.1}$$

$$H_x^2 + \beta H^2 - 4HJ + \beta\delta H = K_2 \tag{4.2}$$

Пусть $P(t)$ – гиперэллиптическая кривая второго рода

$$P(t) = t^5 + m_0 t^4 + m_1 t^3 + m_2 t^2 + m_3 t + m_4$$

Здесь m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 – неопределенные коэффициенты. Подставляя выражение $J(x)$ из (4.2) в равенство (4.1) и полагая

$$y = \frac{1}{2}(u(x) + v(x) - \beta), \quad H(x) = \frac{1}{2}u(x)v(x)$$

при условии, что

$$(u - v)u_x = \sqrt{P(u)} \quad (u - v)v_x = -\sqrt{P(v)} \tag{4.3}$$

из первых интегралов (4.1) и (4.2) находим

$$P(t) = t^5 - 3\beta t^4 + (3\beta^2 + 2\delta)t^2 - 4\mu t^2 + 2(\beta^2\delta + 4K_1)t + 4K_2 \tag{4.4}$$

Из уравнений (4.3) следует [23, 24] система

$$I_0(u(x)) + I_0(v(x)) = K_3, \quad I_1(u(x)) + I_1(v(x)) = x + K_4 \tag{4.5}$$

$$I_0(w) = \int\limits_{\infty}^{w} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}, \quad I_1(w) = \int\limits_{\infty}^{w} \frac{tdt}{\sqrt{P(t)}}$$

совпадающая с возникающей в теории обращения интегралов Якоби [23]. Решение системы (4.5) аналогично решению, полученному Ковалевской для описания движения твердого тела около неподвижной точки [25, 26]. Это решение является мероморфной функцией, явно выражается через тэта-функцию Римана и строится по кривой (4.4). При определенных соотношениях между параметрами уравнения (1.5) можно выписать частные случаи решения этого уравнения, используя гиперэллиптические интегралы (4.5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00693) и Международного научно-технического центра (1379-2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Olver P.J.* Hamilton and non-Hamilton models for water waves // Lecture Notes in Physics. N.Y.: Springer, 1984. № 195. P. 273–290.
2. *Чжи Ли, Сибгатуллин Н.Р.* Уточненная теория длинных волн на поверхности воды // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 2. С. 184–189.
3. *Кудряшов Н.А., Сухарев М.Б.* Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 884–894.
4. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981 = *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1987. 480 с.
5. *Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C.* Solitons and Nonlinear Wave Equations. L. elc.: Acad. Press, 1982 = *Додд Р., Эйлбек Д., Гиббон Д., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
6. *Newell A.C.* Solitons in Mathematics and Physics. Philadelphia. Pa: SIAM, 1985 = *Ньюэл А.* Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 233 с.
7. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
8. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997. 495 с.

9. *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 237 с.
10. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва – Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2004. 360 с.
11. *Kudryashov N.A.* The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them // Phys. Letters. A. 1997. V. 224. № 6. P. 353–360.
12. *Kudryashov N.A.* On new transcendents defined by nonlinear ordinary differential equations // J. Phys. A.: Math. Gen. 1998. V. 31. № 6. P. L. 129–L.137.
13. *Kudryashov N.A.* Transcendents defined by nonlinear fourth-order ordinary differential equations // J. Phys. A.: Math. Gen. 1999. V. 32. № 6. P. 999–1013.
14. *Hénon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments // Astron. J. 1964. V. 69. № 1. P. 73–79.
15. *Fordy A.P.* The Hénon – Heiles system revisited // Physica D. 1991. V. 52. № 2, 3. P. 204–210.
16. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 270 с.
17. *Kudryashov N.A.* One generalization of the second Painlevé hierarchy // J. Phys. A.: Math. Gen. 2002. V. 35. № 1. P. 93–99.
18. *Kudryashov N.A.* Fourth-order analogies to the Painlevé equations // J. Phys. A.: Math. Gen. 2002. V. 35. № 21. P. 4617–4632.
19. *Kudryashov N.A.* Amalgamations of the Painlevé equations // J. Math. Phys. 2003. V. 44. № 12. P. 6160–6178.
20. *Drach J.* Sur l'integration par quadratures de l'equation // C. r. l'Acad. Sci. Paris. 1919. V. 168. P. 337–340.
21. *Дубровин Б.А.* Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Вриза в классе конечнозонных потенциалов // Функциональный анализ и его приложения. 1975. Т. 9. Вып. 3. С. 41–51.
22. *Cosgrove C.* Higher-order Painlevé equations in the polynomial class // Stud. Appl. Math. 2000. V. 104. № 1. P. 1–65.
23. *Дубровин Б.А.* Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Москва–Ижевск: РХД, 2001. 152 с.
24. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
25. *Kowalewski S.* Sur une proprieté du système d'equations differentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math. 1880. V. 14. P. 81–93.
26. *Kowalewski S.* Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math. 1889. V. 12. P. 177–232.

Москва
e-mail: kudr@dampe.mephi.ru

Поступила в редакцию
4.II.2003