УДК 531.36

© 2005 г. А. П. Евдокименко

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ ГИРОСТАТА, ПОДВЕШЕННОГО НА СТЕРЖНЕ, В ЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача о существовании, устойчивости и бифуркации установившихся движений орбитальной связки двух тел в случае, когда одно из тел представляет собой симметричный спутник с ротором на оси симметрии. Указаны однопараметрические семейства установившихся движений, исследованы их устойчивость и бифуркации. Получены условия, связывающие параметры системы, при которых возможна стабилизация найденных семейств с помощью вращающегося ротора.

В литературе предложено большое число моделей систем нескольких связанных тел в центральном ньютоновском поле тяготения (материальные точки на стержне или связанные невесомой нитью материальная точка и твердое тело, гибкая тяжелая нить, система нескольких твердых тел с различными видами связи), а также моделей сил, действующих на такую систему (аэродинамические, магнитные, силы светового давления и их комбинации). Исследовались ограниченная и неограниченная постановки задачи (см., например, монографии [1–11]). Для рассматриваемой ниже системы, являющейся частным случаем более общей системы [11], дополнительная симметрия задачи приводит к существованию установившихся движений, невозможных в общем случае.

1. Постановка задачи. Рассматривается механическая система, состоящая из пары твердых тел, связанных безмассовым абсолютно твердым стержнем с помощью двух сферических шарниров, в центральном гравитационном поле. Предполагается, что одно из тел равномерно движется по круговой кеплеровой орбите, не возмущаемой движением другого тела, которое динамически симметрично и несет ротор, вращающийся вокруг своей оси симметрии с постоянной относительно этого тела угловой скоростью.

Предположим, что одна из концевых точек стержня – точка A – совершает движение по круговой кеплеровой орбите радиуса R вокруг притягивающего центра N. Пусть $AX_\alpha X_\beta X_\gamma$ – орбитальная система координат, единичные векторы которой $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ направлены соответственно по касательной к орбите, по нормали к плоскости орбиты и по радиус-вектору $\mathbf{NA}$ ($\mathbf{NA} = R\boldsymbol{\gamma}$), а $\dot\psi$ – модуль орбитальной угловой скорости. Пусть второй конец B стержня длины l фиксирован в гиростате, при этом $\mathbf{AB} = l\boldsymbol{\rho}$, где $\boldsymbol{\rho}$ – также единичный вектор. Пусть центр масс гиростата G лежит на его оси симметрии на расстоянии a от точки подвеса. Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}$ центра масс в абсолютном пространстве можно представить в виде $\mathbf{r} = R\boldsymbol{\gamma} + l\boldsymbol{\rho} + a\mathbf{s}$, где $\mathbf{s}$ – единичный направляющий вектор оси симметрии, фиксированный в гиростате. Обозначим через Ω величину угловой скорости ротора относительно гиростата, через J – его осевой момент инерции, а через $K = J\Omega$ – величину собственного кинетического момента ротора.

Введем систему координат $Gx_1x_2x_3$, связанную с гиростатом, с осями, совпадающими с главными осями инерции гиростата. В дальнейшем все векторные величины проектируются на эту систему координат. В случае, когда $l + a \ll R$, можно воспользоваться приближенным выражением для гравитационного потенциала

$$U = -\frac{fmM}{R}\left(1 - 2\left(\boldsymbol{\gamma} + \frac{l\boldsymbol{\rho} + a\mathbf{s}}{2R}, \frac{l\boldsymbol{\rho} + a\mathbf{s}}{2R}\right) + \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{\gamma}, \frac{l\boldsymbol{\rho} + a\mathbf{s}}{R}\right)^2\right) -$$

$$-\frac{fm}{2R^3}(2A + C - 3(I\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})); \quad I = \operatorname{diag}(A, A, C)$$

где I – тензор инерции тела. Будем полагать, что $C \neq A$.

Уравнения движения гиростата имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m(\dot{\psi}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}) - m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} + \psi\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}) + \partial U/\partial \mathbf{r} - T\boldsymbol{\rho}$$

$$\dot{\mathbf{K}}_g = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_g - aT\mathbf{s} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r} \times \partial U/\partial \mathbf{r}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\beta}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} + \psi\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}$$

$$l\dot{\boldsymbol{\rho}} = -\boldsymbol{\omega}^0 \times (l\boldsymbol{\rho} + a\mathbf{s}) + \mathbf{v}$$

где

$$\mathbf{K}_g = I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0 + \psi\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{K} = (0, 0, K)$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость центра масс гиростата, $\boldsymbol{\omega}^0$ – собственная угловая скорость гиростата, $\mathbf{K}_g$ – его кинетический момент, $\mathbf{K}$ – кинетический момент ротора, T – сила реакции стержня.

Уравнения движения допускают следующие пять первых интегралов:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(I\boldsymbol{\omega}^0, \boldsymbol{\omega}^0) - \frac{1}{2}m\psi^2(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r})^2 - \frac{1}{2}\psi^2(I\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{K}, \boldsymbol{\beta})\psi + U = h$$

$$(\mathbf{K}_g, \mathbf{s}) = k, \quad F_1 = \boldsymbol{\beta}^2 = 1, \quad F_2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad F_3 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

Эти интегралы выражают обобщенный закон сохранения энергии, закон сохранения проекции момента количества движения на ось x_3 (этот интеграл существует лишь в случае симметричного гиростата), а также единичность и ортогональность векторов $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Предполагается также, что выполнено условие недеформируемости стержня

$$F_4 = \boldsymbol{\rho}^2 = 1$$

2. Тривиальные установившиеся движения и их устойчивость. Установившиеся движения системы отвечают критическим точкам функции

$$W_\pi = -\frac{1}{2}((I\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) - m(\boldsymbol{\beta}, l\boldsymbol{\rho} + a\mathbf{s})^2) - (\mathbf{K}, \boldsymbol{\beta})\psi^{-1} +$$

$$+\frac{3}{2}((I\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) - m(\boldsymbol{\gamma}, l\boldsymbol{\rho} + a\mathbf{s})^2) + \frac{(C\psi\beta_3 - k)^2}{2C\psi^2} +$$

$$+ 3\lambda(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{2}\nu(\boldsymbol{\beta}^2 - 1) - \frac{3}{2}\sigma(\boldsymbol{\gamma}^2 - 1) + \frac{1}{2}\chi ml(\boldsymbol{\rho}^2 - 1)$$

где λ, ν, σ, χ – неопределенные множители Лагранжа. Система уравнений для нахождения критических точек функции W_π допускает следующие однопараметрические семейства решений:

$$S_1\colon \boldsymbol{\beta} = (0, 0, -\kappa_2), \quad \boldsymbol{\rho} = (0, 0, -\kappa_1), \quad \gamma_3 = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$$

$$\sigma = A, \quad \lambda = 0, \quad \chi = -\kappa_1(l\kappa_1 + a)$$

$$\nu = -m(l\kappa_1 + a)^2 - (K + k)\psi^{-1}\kappa_2$$

$$S_2\colon \boldsymbol{\beta} = (0, 0, -\kappa), \quad \rho_3 = a/l, \quad \rho_1^2 + \rho_2^2 = 1 - a^2/l^2$$

$$\gamma_3 = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \gamma_1\rho_1 + \gamma_2\rho_2 = 0$$

$$\sigma = A, \quad \lambda = 0, \quad \chi = 0, \quad \nu = -(K + k)\psi^{-1}\kappa, \quad \kappa = \kappa_{1,2} = \pm 1$$

Решение S_1 существует при любых значениях параметров, геометрически оно означает, что точки A, B, G находятся на одной прямой, коллинеарной вектору $\boldsymbol{\beta}$ (т.е. ортогональной плоскости орбиты точки A).

Решение S_2 существует лишь при условии $a < l$, оно означает, что центр масс гиростата движется по той же круговой орбите, что и точка A, его ось симметрии ортогональна плоскости орбиты точки A, стержень ненапряжен. В обоих случаях гиростат равномерно вращается вокруг своей оси симметрии с произвольной угловой скоростью.

Исследование устойчивости установившихся движений, определяемых решениями S_1, S_2, по второй вариации функции W_π на линейном многообразии $\delta\mathbf{F} = (\delta F_1, \delta F_2, \delta F_3, \delta F_4) = 0$ дает следующие результаты.

Рассмотрим решение S_1 и введем безразмерные параметры:

$$c = l\kappa_1 + a, \quad p = \frac{l\kappa_1 + a}{l}, \quad q = \frac{mcl}{A}, \quad x = -1 - pq - \frac{\kappa_2}{A\psi}(K + k)$$

$$r = \frac{C}{A}, \quad M_0 = r - 1 - pq - \frac{5pq + q}{p - 3}, \quad M = -2q + 3M_0$$

Положим $\kappa_1 = -1$ и пусть $M_0 < 0$. На основании общей теории (см. например [12]) степень неустойчивости решения S_1 может быть представлена в виде следующей таблицы:

	$x > -M - q$	$x \in (q, -M - q)$	$x < q$
$p > 3$	0	1	2
$p \in (0, 3)$	1	2	3
$p < 0$	2	3	4

Если $M_0 > 0$, то q и $-M - q$ меняются местами.

Рассмотрим случай $\kappa_1 = 1$. Если $M_0 < 0$, то степень неустойчивости зависит от параметров следующим образом:

$x > -M + q$	$x \in (-q, -M + q)$	$x < -q$
2	3	4

Если $M_0 > 0$, то $-q$ и $-M + q$ меняются местами.

Таким образом, имеет место изменение степени неустойчивости в узлах таблицы и, следовательно, бифуркации решения S_1. Отметим, что кинетический момент ротора линейно выражается через x и κ_2, что позволяет легко переписать неравенства относительно K или Ω, учитывая знак κ_2.

Степень неустойчивости решения S_2 распределена следующим образом. Пусть

$$x = -1 - \frac{\kappa}{A}(K+k)\dot{\psi}^{-1}, \quad p^2 = 1 - \frac{a^2}{l^2}, \quad r = \frac{C}{A}$$

Тогда аналогично предыдущему имеем

	$x < -3(r-1)$	$x \in (-3(r-1), 0)$	$x > 0$
$C > A$	3	2	1

Если C < 1, то 0 и $-3(r-1)$ меняются местами.

Видно, что при $x = 0$, $x = -3(r-1)$ происходит изменение степени неустойчивости и, следовательно, ветвление решений. Отметим, что, как и в случае первого семейства, степень неустойчивости зависит от направления вращения ротора. Учитывая выражение для x, можно, как и в случае первого семейства, переписать условия устойчивости решения S_2 в виде неравенств относительно кинетического момента K или угловой скорости ротора Ω.

3. Нетривиальные установившиеся движения. Систему для определения критических точек функции W_π можно переписать в следующем (безразмерном) виде:

$$\left\| \begin{matrix} 1-\sigma & \lambda & Ic_\gamma \\ 3\lambda & \nu - 1 & Ic_\beta \\ -3\alpha c_\gamma & \alpha c_\beta & \chi \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \gamma_i \\ \beta_i \\ \alpha\rho_i \end{matrix} \right\| = 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.1}$$

$$(r-\sigma)\gamma_3 + \lambda\beta_3 - Ic_\gamma(\alpha\rho_3 - 1) = 0$$

$$3\lambda\gamma_3 + \nu\beta_3 + Ic_\beta(\alpha\rho_3 - 1) = x$$

$$-3\alpha c_\gamma\gamma_3 + \alpha c_\beta\beta_3 + \chi(\alpha\rho_3 - 1) = -\chi$$

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\rho}^2 = 1 \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

$$c_\gamma = \alpha\gamma_1\rho_1 + \alpha\gamma_2\rho_2 + \gamma_3(\alpha\rho_3 - 1)$$

$$c_\beta = \alpha\beta_1\rho_1 + \alpha\beta_2\rho_2 + \beta_3(\alpha\rho_3 - 1)$$

Здесь за новыми безразмерными переменными оставлены старые обозначения:

$$\sigma = \frac{\sigma}{A}, \quad \nu = \frac{\nu}{A}, \quad \lambda = \frac{\lambda}{A}, \quad \chi = \frac{\chi}{a}, \quad I = \frac{ma^2}{A}, \quad \alpha = \frac{l}{a}, \quad x = \frac{(K+k)\dot{\psi}^{-1}}{A}$$

Видно, что если $\gamma_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\rho_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям (3.1) и хотя бы одно из них не равно нулю, то ранг матрицы

$$D = \left\| \begin{matrix} 1-\sigma & \lambda & Ic_\gamma \\ 3\lambda & \nu - 1 & Ic_\beta \\ -3\alpha c_\gamma & \alpha c_\beta & \chi \end{matrix} \right\|$$

должен быть меньше трех. Поэтому можно рассматривать случаи, когда $\operatorname{rank} D$ равен 0, 1, 2 и таким образом находить установившиеся решения. Обозначим через d_1, d_2, d_3 строки матрицы D.

Рассмотрим случаи, когда $\operatorname{rank} D \le 1$.

Пусть $d_1 = 0$, $d_2 = 0$. Тогда $\sigma = 1$, $\lambda = 0$, $\nu = 1$ $c_\gamma = 0$, $c_\beta = 0$. Система уравнений принимает вид

$$\chi\rho_1 = 0, \quad \chi\rho_2 = 0 \quad (r-1)\gamma_3 = 0, \quad \beta_3 = x, \quad \chi(\alpha\rho_3 - 1) = -\chi$$

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\rho}^2 = 1 \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = 0$$

Заметим, что при ее анализе необходимо учитывать соотношения $c_\gamma = 0$, $c_\beta = 0$. Если $\chi \ne 0$, то получаем $\boldsymbol{\rho} = 0$, что противоречит условию $\boldsymbol{\rho}^2 = 1$. Если $\chi = 0$, то получаем решение

$$S_3\colon \sigma = 1, \quad \lambda = 0, \quad \nu = 1, \quad \chi = 0, \quad \gamma_1\rho_1 + \gamma_2\rho_2 = 0$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \gamma_3 = 0, \quad \beta_1\rho_1 + \beta_2\rho_2 + x(\alpha\rho_3 - 1) = 0$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 - x^2, \quad \beta_3 = x, \quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0, \quad \boldsymbol{\rho}^2 = 1$$

Геометрически решение S_3 означает, что центр масс гиростата движется по той же круговой орбите, что и точка A, а ось его симметрии наклонена на некоторый угол в плоскости, касательной к орбите в точке G.

Видно, что при $x = \pm 1$ это решение совпадает с решением S_2. Таким образом, найдено одно из решений, ответвляющихся от S_2.

Определим ограничения параметров системы, при которых решение S_3 существует. Можно показать, что координата ρ_3 выражается следующим образом:

$$\rho_3 = \frac{x^2}{\alpha} \pm \sqrt{(1-x^2)(\alpha^2 - x^2)}$$

Учитывая требование положительности подкоренного выражения и выполнения неравенств $-1 \le \beta_3 \le 1$, $-1 \le \rho_3 \le 1$, получаем следующие ограничения, налагаемые на параметры x и α:

$$x^2 \le 1, \quad x^2 - \alpha^2 \le 0$$

Устойчивость решения S_3 зависит от параметра $R = (C - A)/(ma^2)$, а именно: если $R < 0$, то степень неустойчивости решения S_3 равна 1 (решение неустойчиво), если $R > 0$, то степень неустойчивости равна 2 (возможна гироскопическая стабилизация). При $x \ne 1$ бифуркации не происходит.

Аналогично рассматриваются другие случаи, когда хотя бы одна из строк матрицы D нулевая и $\operatorname{rank} D = 1$. При этом можно найти еще два семейства установившихся движений (S_4, S_5)

$$S_4\colon \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \gamma_3 = 0, \quad \boldsymbol{\beta} = -\kappa\boldsymbol{\rho}, \quad \beta_3 = \frac{x - \kappa I\alpha}{1 + I}$$

$$\sigma = 0, \quad \lambda = 0, \quad \nu = 1 - I\alpha\frac{\kappa x + \alpha}{1 + I}, \quad \chi = -\frac{\kappa x + \alpha}{1 + I}$$

(при $x = \kappa I\alpha \pm (1 + I)$ это решение совпадает с решением S_1; геометрически решение S_4 означает, что стержень перпендикулярен плоскости орбиты точки A, ось симметрии гиростата наклонена в плоскости, касательной к орбите в точке A)

$$S_5\colon \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{x^2}{(4-3r)^2}, \quad \gamma_3 = \kappa\left(1 - \frac{x^2}{(4-3r)^2}\right)^{1/2}$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1 - \frac{x^2}{(4-3r)^2}, \quad \beta_3 = \frac{x}{4-3r}$$

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1 - \frac{1}{\alpha^2}, \quad \rho_3 = \frac{1}{\alpha}, \quad 9\mu^2 = \frac{(4-3r)^2}{x^2} - 1$$

$$\lambda = -\frac{3\mu(r-1)}{1+9\mu^2}, \quad \chi = 0, \quad \nu = 1 - \frac{3(r-1)}{1+9\mu^2}, \quad \sigma = 1 + \frac{9\mu^2(r-1)}{1+9\mu^2}$$

При $x^2 = (4-3r)^2$ это решение переходит в решение S_2. Решение S_5 означает, что центр масс гиростата движется по той же круговой орбите, что и точка A, ось его симметрии наклонена в плоскости, проходящей через радиус-вектор точки A и перпендикулярной плоскости орбиты.

4. Заключение. Таким образом, найдены все решения, ответвляющиеся от решения S_2, и одно из решений, ответвляющихся от S_1. Случай, когда все три строки матрицы D пропорциональны, а также случаи, когда $\operatorname{rank} D = 2$, ведут к усложнению выкладок, и их изучение не столь тривиально.

Коротко сформулируем основные результаты работы: найдены два простейших семейства установившихся движений и условия их существования, исследована их устойчивость по отношению к переменным, характеризующим отклонение от этих семейств, обнаружена зависимость степени неустойчивости от геометрических и инерционных параметров, т.е. невозможность стабилизации решений вращающимся ротором при нарушении условий, накладываемых на эти параметры; обнаружена бифуркация установившихся движений. Найдены все решения, ответвляющиеся от S_2, исследована устойчивость одного из них, отмечено отсутствие бифуркации при изменении параметров; также найдено одно из решений, ответвляющееся от S_1. Добавим, что случаи с ненулевой четной степенью неустойчивости требуют дополнительного исследования.

Автор благодарит А.В. Карапетяна за постоянное внимание к работе на всех ее этапах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00141), Российского фонда фундаментальных исследований – Бюро научно-технического сотрудничества (01-01-02001) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-2000.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
2. *Белецкий В.В., Новикова Е.Т.* О пространственном движении связки двух тел на орбите // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 23–28.

3. *Болотина Н.Е., Вильке В.Г.* Об устойчивости положений равновесия гибкой тяжелой нити, привязанной к спутнику на круговой орбите // Космич. исследования. 1978. Т. 16. № 4. С. 621–626.
4. *Докучаев Л.В., Ефименко Г.Г.* Влияние атмосферы на относительное движение связки двух тел на орбите // Космич. исследования. 1972. Т. 10. № 1. С. 57–65.
5. *Ефименко Г.Г.* Пространственное движение связки двух тел под действием гравитационных и аэродинамических сил // Космич. исследования. 1973. Т. 11. № 3. С. 484–486.
6. *Жук В.И., Шахов Е.М.* О колебаниях спутника-зонда малой массы под действием аэродинамических и гравитационных сил // Космич. исследования. 1990. Т. 28. № 6. С. 820–830.
7. *Верещагин И.Ф., Иванов А.П.* Об относительном движении связки твердого тела и точки на круговой орбите // Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М.: Наука, 1975. С. 105–109.
8. *Сарычев В.А.* Положения равновесия маятника в спутнике // Космич. исследования. 2000. Т. 38. № 1. С. 71–77.
9. *Сарычев В.А.* Положения равновесия системы спутник–несимметричный маятник на круговой орбите // Космич. исследования. 2000. Т. 38. № 4. С. 412–422.
10. *Набиуллин М.К.* Устойчивость и стабилизация положений равновесия орбитальной тросовой системы // Нелинейная механика / Под ред. В.М. Матросова и др. М.: Физматлит, 2001. С. 402–430.
11. *Burov A.A.* On collinear relative equilibrium of a tethered gyrostat in a central Newtonian field // Institut Mechanik, Technische Universität Wien, 1996. 32 S.
12. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.

Москва
e-mail: reppa@yandex.ru

Поступила в редакцию
24.I.2003