

УДК 531.36

© 2005 г. А. А. Буров

**О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ  
В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА  
ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ  
ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОСТОРОННЕЙ СВЯЗИ**

Для задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки с ограничениями по углу между восходящей вертикалью и вектором, фиксированным в теле, рассматривается вопрос о существовании интегрируемых случаев типа случаев Эйлера и Лагранжа, а также частных интегралов типа Гесса–Аппельрота без дополнительных предположений, касающихся величины постоянной площадей.

Было показано [1, 2], что на нулевом уровне интеграла площадей задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии ограничения на изменение угла нутации сводится к задаче о движении точки в специальном сферическом бильярде. Было установлено [1, 2], что при выполнении условий Ковалевской и Горячева–Чаплыгина обе задачи остаются интегрируемыми и при наложении такой связи.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки  $O$ . Пусть  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости тела,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  – вектор восходящей вертикали,  $c = (c_1, c_2, c_3)$  – вектор, соединяющий неподвижную точку  $O$  и центр масс тела – точку  $C$ ,  $m$  – масса тела,  $g$  – ускорение силы тяжести. Тогда, как обычно, уравнения движения в осях  $Ox_1x_2x_3$ , направленных по главным осям тензора инерции тела  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  относительно неподвижной точки, запишутся в виде

$$I\dot{\omega} = I\omega \times \omega + mg\gamma \times c, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega \tag{1.1}$$

Эти уравнения допускают интеграл энергии

$$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{2}(I\omega, \omega) + mg(c, \gamma) \tag{1.2}$$

интеграл площадей

$$\mathcal{T}_\psi = (I\omega, \gamma) \tag{1.3}$$

и геометрический интеграл

$$\mathcal{T}_g = (\gamma, \gamma) \tag{1.4}$$

**2. Уравнения движения при соприкосновении со связью.** Пусть  $e = (e_1, e_2, e_3)$  – единичный вектор, фиксированный в теле. Наложим на систему связь

$$f = (\gamma, e) - \gamma_e \geq 0 \tag{2.1}$$

Физически это означает, что угол между восходящей вертикалью и вектором  $e$  не превосходит величины  $\arccos \gamma_e$ . Для реализации этой связи можно воспользоваться, например, тросом длины  $\sqrt{2 - 2\gamma_e}$ , соединяющим концы векторов  $e$  и  $\gamma$ .

Согласно общей теории движения твердых тел при наличии ударных взаимодействий [3] значения угловой скорости тела до ( $\omega$ ) и после ( $\omega'$ ) удара связаны соотношением

$$\mathbf{I}(\omega' - \omega) = R\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e} \quad (2.2)$$

причем, так как удар предполагается абсолютно упругим, величина  $R$  находится из условия сохранения кинетической энергии (потенциальная энергия во время удара остается неизменной)

$$(\mathbf{I}\omega', \omega') = (\mathbf{I}\omega, \omega) \quad (2.3)$$

*Утверждение 1.* Величины

$$\mathcal{T}_e = (\mathbf{I}\omega, \mathbf{e}), \quad \mathcal{T}_\psi = (\mathbf{I}\omega, \boldsymbol{\gamma}) \quad (2.4)$$

сохраняются во время удара.

Доказательство сводится к умножению левой и правой частей равенства (2.2) скалярно на векторы  $\mathbf{e}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  соответственно.

Таким образом, в частности, проекция вектора кинетического момента на вертикаль сохраняется не только во время непрерывного движения, но и во время удара, т.е. во все время движения.

*Определение реакции.* Для определения реакции  $R$  домножим скалярно левую и правую части равенства (2.2) на  $\omega + \omega'$ . Имеем

$$(\mathbf{I}\omega', \omega') - (\mathbf{I}\omega, \omega) = R(\mathbf{f}, \omega' + \omega) = 0$$

Тогда, если  $R \neq 0$ , то

$$(\mathbf{f}, \omega' + \omega) = 0 \quad (2.5)$$

В момент выхода на связь  $\mathbf{f} \neq 0$ , иначе  $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}) = \pm 1$ . Тогда, выражая из (2.2) величину  $\omega'$ , имеем

$$\omega' = \omega + R \cdot \Gamma^{-1} \mathbf{f} \quad (2.6)$$

Подставляя это выражение в равенство (2.5), находим

$$R = -2 \frac{(\omega, \mathbf{f})}{(\Gamma^{-1} \mathbf{f}, \mathbf{f})} \quad (2.7)$$

### 3. Случай существования дополнительных интегралов.

*Случай Эйлера.* Как известно, в случае Эйлера сохраняется квадрат вектора кинетического момента  $\mathcal{T}_K = (\mathbf{I}\omega, \mathbf{I}\omega)$ ; умножая скалярно левую и правую части равенства (2.2) на  $\mathbf{I}(\omega' + \omega)$ , из условия сохранения квадрата вектора кинетического момента имеем

$$(\mathbf{I}\omega', \mathbf{I}\omega') - (\mathbf{I}\omega, \mathbf{I}\omega) = R(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \mathbf{I}(\omega' + \omega)) = 0$$

откуда следует, что

$$R = -2 \frac{(\mathbf{I}\omega, \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e})}{(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e})} \quad (3.1)$$

В общем случае правые части выражений (2.7) и (3.1) не совпадают, а значит, в общем случае для абсолютно упругих ударов квадрат вектора кинетического момента не сохраняется. Это означает отсутствие интегрируемого случая типа случая Эйлера.

*Случай Лагранжа.* В случае Лагранжа выполнены определенные условия существования дополнительного интеграла, например,  $I_1 = I_2$  и  $c_1 = c_2 = 0$ . Тогда, если векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{e}$  коллинеарны, то в силу соотношения (2.6)

$$\omega'_3 = \omega_3$$

и все первые интегралы сохраняются и в случае наложения односторонней связи.

*Случай Гесса–Апфельбота.* Пусть для определенности  $I_1 > I_2 > I_3$ . Обозначим

$$\Delta_{ij} = \sqrt{I_i^{-1} - I_j^{-1}}$$

Как известно, в случае движения без связи в этом случае при выполнении условий

$$\mathbf{a}_\varepsilon = (a_1, a_2, \varepsilon a_3): a_1 = \Delta_{21}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \Delta_{32}, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a}_\varepsilon, \quad \lambda = \text{const} \quad (3.3)$$

существует частный интеграл, который имеет вид

$$F_\varepsilon = a_1 I_1 \omega_1 + \varepsilon a_3 I_3 \omega_3 = 0, \quad (3.4)$$

Тогда, в силу утверждения 1, если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{e}$  коллинеарны, частные интегралы  $F_\varepsilon$  существуют и для системы, стесненной неударяющей связью (2.1).

*Замечание.* Приведенные выше результаты, касающиеся существования первых интегралов, остаются справедливыми и при наложении на систему двух связей вида

$$\gamma_e^- \leq (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}) \leq \gamma_e^+ \quad (3.5)$$

Физически это означает, что угол между восходящей вертикалью и вектором  $\mathbf{e}$  заключен между углами  $\arccos \gamma_e^+$  и  $\arccos \gamma_e^-$ . Для реализации этой связи можно воспользоваться, например, тросом длины  $\sqrt{2 - 2\gamma_e^-}$ , соединяющим концы векторов  $\mathbf{e}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$ ,

и другим тросом длины  $\sqrt{2 - 2\gamma_e^+}$ , соединяющим концы векторов  $\mathbf{e}$  и  $-\boldsymbol{\gamma}$ .

**4. Распространение результатов на случай тяжелого гиростата, вращающегося вокруг неподвижной точки.** Полученные выше результаты, касающиеся интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела при наличии односторонней связи (2.1), распространяются и на случай, когда вместо тела рассматривается тяжелый гиростат, также совершающий вращение вокруг неподвижной точки.

В этом случае первое слагаемое в правой части уравнения движения принимает вид  $(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega}$ , где  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  – неизменный вектор гиростатического момента. Интеграл энергии и геометрический интеграл по-прежнему имеют вид (1.2) и (1.4) соответственно, а интеграл площадей записывается в виде

$$\mathcal{T}_\psi = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) \quad (4.1)$$

Уравнения удара (2.2) остаются прежними, поэтому остается прежним и выражение (2.7) для величины  $R$ .

*Утверждение 2.* Величины

$$\mathcal{T}_e = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \mathbf{e}), \quad \mathcal{T}_\psi = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) \quad (4.2)$$

сохраняются во время удара.

Для доказательства представим соотношение (2.2) в виде

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{k}) - (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) = R\mathbf{f}$$

Дальнейшие рассуждения сводятся к умножению левой и правой частей последнего равенства скалярно на векторы  $\mathbf{e}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  соответственно.

Таким образом, в частности, проекция вектора полного кинетического момента на вертикаль сохраняется не только во время непрерывного движения, но и во время удара, т.е. во все время движения.

Рассуждения, подобные представленным выше, доказывают, что в случае уравновешенного гиростата дополнительный интеграл Вольтерры–Жуковского

$$\mathcal{F}_K = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k})$$

при отображении (2.2), вообще говоря, не сохраняется. Однако сохраняется дополнительный интеграл  $\omega'_3 = \omega_3$ , имеющий место при выполнении условий  $I_1 = I_2$ ,  $c_1 = c_2 = 0$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, k_3)$  и коллинеарности векторов  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{e}$ . Сохраняется также интеграл Сретенского [4], аналогичный интегралу Гесса–Аппельерота, имеющий вид

$$F_\epsilon = a_1 I_1 \omega_1 + \epsilon a_3 I_3 \omega_3 + \delta = 0 \quad (4.3)$$

и существующий при выполнении условий (3.2), (3.3), а также

$$k_2 = 0, \quad \delta I_2 \Delta_{21} \Delta_{32} = \Delta_{32} k_1 - \epsilon \Delta_{21} k_3 \quad (4.4)$$

последнее из которых определяет величину постоянной  $\delta$ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00196), программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ 2000.2003.1) и Федеральной целевой программы “Интеграция”.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Козлова Т.В. Системы с упругими отражениями, допускающие полиномиальные интегралы третьей и четвертой степени // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2001. № 3. С. 69–71.
2. Kozlova T.V. Billiard systems with polynomial integrals of third and fourth degree // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. V. 34. № 11. P. 2121–2124.
3. Routh E.J. Dynamics of a System of Rigid Bodies. L.: MacMillan, 1882 = Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983. 463 с.
4. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1963. № 3. С. 60–71.

Москва  
e-mail: aburov@ccas.ru

Поступила в редакцию  
10.VII.2003